Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales

Resumen

La noción de infinito ha jugado un papel importante en casi todas las disciplinas del saber humano. A pesar de ello, las diferentes ramas de las ciencias cognitivas han dedicado muy pocos esfuerzos al estudio de este fascinante aspecto de la actividad mental humana. La idea de iteración es un interesante punto de partida para estudiar los procesos cognitivos subyacentes a la noción de infinito. En particular, la subdivisión iterativa constituye un área muy rica para abordar la cuestión de cómo la idea de infinito en lo pequeño emerge en nuestras mentes. En este estudio, en el cual participaron 32 alumnos de 8, 10, 12 y 14 años de edad (de alto y bajo rendimiento escolar), se investigó —desde el punto de vista del desarollo— una versión de la paradoja de Zenón por medios de entrevistas individuales. Los resultados sugieren que entre las edades de 10 y 12 años, comienza a emerger una cierta intuición de las consecuencias que trae consigo el proceso de subdivisión. Esta intuición permanece más tarde muy lábil y muy susceptible de ser influenciada por factores contextuales. Un 66% de los alumnos de 12 y 14 años señalaron que el proceso iterativo presente en el problema se termina. Menos de un 25% consideró (con muchas dudas y cuestionamientos) la posibilidad del que tal proceso pudiera continuar indefinidamente. Se discuten algunas consecuencias epistemológicas basadas en el enfoque teórico denominado *embodied cognition*.

Abstract: Throughout history the concept of infinity has played an important role in almost every branch of human knowledge. Paradoxically, very little effort has been done by the various theoretical schools in Cognitive Science to study such a fascinating aspect of human mental activity. The idea of iteration is an interesting starting point to study the cognitive processes underlying the notion of infinity. In particular, the study of subdivision offers a rich subject matter to address the question of how does the idea of infinity in the small emerge in our minds. 32 students, aged 8, 10, 12 and 14 (high and low intellectual –academic performers), participated in this study, in which a version of one of Zeno's paradoxes was analyzed by means of individual interviews. Results suggest that between ages 10 and 12, a certain intuition of the entailments of subdivision emerges, remaining very labile afterwards such that is very influenced by the context. 66% of the 12- and 14-year-old children said that the process involved in the paradox comes to an end. Less than 25% considered (with deep hesitations) the possibility that the process might continue endlessly. Some epistemological consequences are discussed from the perspective of embodied cognition.

Rafael Núñez Errázuriz[1]

University of California at Berkely
Berkely, CA, EUA

[1] redacción de este artículo se benefició del apoyo del Fondo Suizo de Investigaciones Científicas (proyecto número 8210-033279).

Introducción

Desde el origen de las civilizaciones, la idea de infinito ha jugado un importante papel en casi todas las disciplinas del saber humano, fascinando y amedrentando a filósofos, teólogos, científicos y matemáticos. Cargado de aspectos contraintuitivos, el infinito ha sido siempre un concepto muy controvertido y esquivo, y su estudio ha presentado innumerables dificultades y disputas. Un concepto tan peculiar e importante de la actividad mental humana representa una valiosísima fuente de estudio para las ciencias cognitivas por dos razones: primero, debido al importante rol que este concepto ha desempeñado en las diferentes disciplinas del saber humano, y segundo, debido a que es un rico y representativo concepto de una dimensión de la actividad mental humana –el pensamiento abstracto– que no está basada en la experiencia directa. Sin embargo, paradojalmente las distintas escuelas de pensamiento dedicadas al estudio empírico del conocimiento han dedicado muy pocos esfuerzos a la investigación de tan fascinante aspecto de la actividad mental humana.

Tanto la historia de la matemática, como algunos estudios en el área del desarrollo cognitivo del pensamiento matemático, muestran que el infinito en lo pequeño –involucrado en subdivisiones iterativas– ha sido mucho más controvertido y esquivo que el infinito en lo grande (Boyer, 1986; Kline, 1972; Núñez Errázuriz, 1993a). Ellos muestran además que los niños comienzan a entender la idea de infinito en lo pequeño mucho más tarde que aquella del infinito en lo grande (Langford, 1974; Núñez Errázuriz, 1993b; Piaget e Inhelder, 1948; Taback, 1975). Así, aun cuando niños de 8 años pueden reconocer con facilidad la naturaleza interminable del proceso de conteo, no es sino a la edad de 11-12 años que comienzan a considerar a la subdivisión indefinida como un proceso potencialmente sin fin, y a reconocer esta situación como un problema legítimo (Núñez Errázuriz, 1993a). El presente estudio pretende contribuir al entendimiento de los procesos cognitivos involucrados en el desarrollo de la idea de infinito en lo pequeño.

El problema

Hace unos 2500 años en Elea, al sur de la actual Italia, un discípulo del filósofo Parménides, conocido como Zenón el Eléata, concibió algunas paradojas presumiblemente con la intención de probar la inconsistencia de las ideas pitagóricas de multiplicidad y cambio. Además pretendió con estas paradojas dar argumentos en favor de la unidad y permanencia del ser –principios fundamentales de su escuela de pensamiento. Con el paso de los años, han llegado hasta nosotros diferentes versiones de estas paradojas, las cuales, sorprendentemente, continuan a intrigar filósofos y matemáticos, así como a educadores y a investigadores del pensamiento. Una versión abreviada de una de estas paradojas podría expresarse de la siguiente manera. Imaginemos que nos piden ir de un lugar A a un lugar B pero nos dicen que debemos hacerlo siguiendo una regla que dice: primero avance la mitad del trayecto, en seguida avance la mitad de lo que queda, luego la mitad de lo que queda, y así sucesivamente. ¿Llegaremos alguna vez al lugar B? Dado que cada paso cubre sólo la mitad del trayecto que queda al realizar el paso anterior, siempre habrá una pequeña distancia por recorrer. Esto sugiere que nunca llegaremos al lugar B. Esto, por supuesto, no es lo que nuestra experiencia nos dice cuando vamos de un lugar a otro. Además, ¿cómo conciliar el hecho de cubrir una distancia finita con un número infinito de pasos? Surge entonces la paradoja.

Desde un punto de vista cognitivo, el estudio de paradojas, tales como ésta de Zenon, no sólo constituye un tema interesante para abordar la cuestión de cómo la mente construye la idea de infinito en lo pequeño, sino que además contribuye al escasamente estudiado dominio del infinito. Núñez Errázuriz (1993a) ha sugerido que los aspectos paradójicos de los argumentos propuestos por Zenón, en oposición a otras situaciones en las cuales está involucrado el infinito pero que no llevan a consideraciones paradójicas, podrían ser explicadas parcialmente en términos de una coordinación particularmente compleja de atributos iterados indefinidamente. El argumento se basa en observaciones hechas por Langford (1974), Piaget e Inhelder (1948) y Taback (1975) en cuanto a las diferencias entre el infinito en lo pequeño y en lo grande, así como en algunas observaciones hechas por Tall (1980) relativas a las diferencias entre aspectos cardinales y de medición del infinito. En el ejemplo anterior si uno sigue la regla del problema, dos atributos han de ser iterados simultáneamente, a saber, el número de pasos que uno tiene que realizar y la distancia que cada uno de estos pasos cubre. Por un lado, es posible observar que el **tipo** de iteración es diferente para cada atributo, porque el número de pasos aumenta mientras que la distancia cubierta por estos pasos disminuye. Llamemos a estos dos **tipos** de iteración, *divergente* y *convergente*, respectivamente. Por otro lado, la **naturaleza** del contenido iterado es también diferente para ambos atributos: el número de pasos se refiere a la *cardinalidad* (número de pasos) mientras que la distancia cubierta por estos pasos se refiere a *espacio*. A diferencia de las situaciones en las cuales dos atributos del mismo **tipo**, o de la misma **naturaleza**, son iterados indefinidamente en una situación coordinada, la coordinación que se observa en la paradoja de Zenón debe incorporar componentes heterogéneos. Esto es, debe incorporar simultáneamente diferentes **tipos** de iteraciones (*divergente* y *convergente*) y diferentes **naturalezas** de contenido (*cardinalidad* y *espacio*), lo que la hace cualitativamente más compleja.

En general, cualquier situación que involucre la subdivisión, que pudiera llevar a la concepción del infinito en lo pequeño[2], presenta esta estructura: una coordinación simultánea de un número creciente de pasos (número de iteraciones) y una longitud parcial decreciente del tamaño de los pasos (en valor absoluto). Desde un punto de vista cognitivo, entonces, resulta de grán interés estudiar cómo esta compleja coordinación emerge en la actividad mental y qué formas toma a través de diferentes contextos conceptuales.

Lo que viene a continuación presenta algunos aspectos cualitativos de una investigación que formó parte de un proyecto mas amplio concebido para estudiar aspectos psicocognitivos y del desarrollo subyacentes a la idea de infinito.

[2] Obviamente esta no es la única forma que pudiera llevar a concebir el infinito en lo pequeño. En análisis no-estándar, por ejemplo, los infinitesimales son vistos como los recíprocos de números infinitamente grandes. Sin embargo, desde un punto de vista del desarrollo, la idea de subdivisión parece ser más básica.

Método

Procedimiento

Se estudiaron dos variables relacionadas con el rendimiento general intelectual y académico. El primero fue medido con el test de Matrices Progresivas de Raven y el segundo fue medido por las notas escolares obtenidas en matemática y francés[3] (idioma oficial en esa escuela y región lingüística). Se escogió el test de Raven por varias razones. Primero, porque siendo un test diseñado para medir un factor de inteligencia general (*g* de Spearman) goza de un amplio respaldo en cuanto a su utilización tanto en la práctica clinica como en investigación, y presenta la ventaja de poder administrarse colectivamente. Segundo, porque se trata de un instrumento único que puede evaluar sujetos de edades correspondientes a las aquí estudiadas (8 a 14 años. Raven, 1960; Anastasi, 1961). Por último, porque el test de Raven pone de manifiesto el pensamiento inductivo –en gran parte responsable del factor *g* (Pellegrino y Glaser, 1980; Sternberg, 1977)– lo cual era de particular interés para el proyecto más amplio en el cual ésta investigación está inserta.

El test de Raven se administró en clases durante la jornada escolar. El estudio fue llevado a cabo mediante entrevistas individuales (50 minutos) y fue presentado a los estudiantes como un estudio de psicología (no se mencionó la matemática en ninguna etapa de la investigación). Las entrevistas se llevaron a cabo en una sala de la escuela y fueron registradas en video. La paradoja de Zenón fue uno de los temas tratados durante la entrevista.

Sujetos

Fueron entrevistados 32 estudiantes de dos escuelas de la ciudad de Friburgo (Suiza), cuyas edades eran 8, 10, 12 y 14 años. A cada grupo de edad (8 sujetos) se le asignó cuatro sujetos de alto rendimiento académico-intelectual y otros cuatro de bajo rendimiento académico-intelectual (percentiles 66 a 100 y 0 a 33 respectivamente, en ambos criterios de rendimiento, seleccionados entre 172 estudiantes de dichas escuelas). La muestra estaba balanceada por sexo.

Material

El problema se presentó en forma verbal como una pregunta abierta y fue: "Imagina que queremos ir desde este lado de la mesa hasta el otro lado. Se nos dice que primero debemos avanzar la mitad del trayecto, en seguida continuar con la mitad de lo que queda, luego con la mitad de lo que queda y así sucesivamente. ¿Llegaremos alguna vez al otro

[3] Se observó previamente que las notas en francés resultaban ser un buen indicador general del rendimiento escolar. Se estimó que las asignaturas de matemáticas y francés, en conjunto, entregaban un buen perfil del rendimiento escolar general por tratarse además de asignaturas representativas de las áreas "científico" y "humanista", respectivamente.

lado de la mesa?" Algunas veces el sujeto que realizaba la acción fue un pequeño insecto. Se le permitió a los estudiantes usar diversos materiales como papel, lápices, reglas, etc. que estaban encima de la mesa.

Resultados

En general, las respuestas de los niños pueden ser clasificadas en tres grandes categorías, a saber: aquellas que dicen que se llega al destino, aquellas que dicen que no se llega (ya sea porque el proceso se atasca o porque sólo se aproxima al destino), y aquellas provenientes de sujetos dubitativos que defendían dos respuestas diferentes, a menudo contradictorias. Sujetos de los cuatro grupos de edades dieron respuestas de las dos primeras categorías, la última categoría se observó solamente en los grupos mayores. A continuación se presenta el razonamiento subyacente a estas respuestas. No se observaron diferencias entre los sexos.

Grupo de 8 años de edad

En el grupo de esta edad, se observó una diferencia ente los argumentos dados por los subgrupos de alto y bajo rendimiento intelectual-académico. El primero mostró una actitud más analítica respecto al problema. Los alumnos de bajo rendimiento tendieron a considerar la pregunta como algo trivial y respondieron con un simple «llegamos», como si hubiera que realizar la iteración solamente un par de veces para cubrir la distancia.

Basándose en la idea que uno puede atascarse debido a la pequeñez de los pasos, dos niños consideraron la posibilidad que uno podría no llegar, y otro dijo que uno no llega nunca. Estos tres eran alumnos de alto rendimiento. Ellos percibieron vagamente que uno podría continuar potencialmente durante algun tiempo realizando pequeños pasos, pero al final ellos resolvieron esta situación inestable mediante una alteración de las condiciones del problema. Esto, ya sea alterando las condiciones del *setting* (una nueva destinación), o las condiciones de la *acción* (esto es, deteniendo la iteración), o ambos. Un ejemplo del primer caso es el siguiente[4]:

Grupo de 10 años

En este grupo hubo la misma diferencia entre los alumnos de alto y bajo rendimiento que en el grupo anterior. Los niños de 10 años titubearon más que los de 8 años, y algunos de ellos presentaron dos posiciones diferentes simultaneamente, pero al igual que

[4] El texto en itálica corresponde a las afirmaciones de los sujetos. Los símbolos + y – indican alto y bajo rendimiento intelectual-académico, respectivamente, de acuerdo con los criterios metodológicos denifidos anteriormente. Se indica también la edad (años, meses). La traducción del francés de estas afirmaciones intenta mostrar expresiones idiomáticas equivalentes en niños de habla hispana.

los mas jóvenes, el conflicto algunas veces fue resuelto mediante la alteración de las condiciones del *setting* durante las "últimas" iteraciones (nuevo destino).

> Ban + (7;9): *Si avanzamos siempre la mitad, llegamos muy cerca, pero estamos obligados a volver a avanzar la mitad, siempre la mitad.* ¿Entonces? ... *(reflexiona)* ... *Hay siempre una pequeña mitad.* Nos acercamos pero ¿llegamos o no? *Nos acercamos pero ... si avanzamos la mitad no queda más que un paso, y si avanzamos la mitad, no queda más que una mitad, ... y avanzamos la mitad, y llegamos* (no muy convencido). ¿Tienes dudas? ... (piensa y reanaliza la situación con sus dedos al borde de la mesa), ... *o quizás nos queda todavía un pedazo antes de la llegada, y decimos que vamos a parar ahí.* ¿Cómo es eso? *Ponemos la llegada antes de donde queremos ir y así estamos seguros que podemos llegar.*

Como fue señalado en el *procedimiento* otros contenidos fueron también cubiertos durante la entrevista, entre ellos se incluyó un problema descrito en otras fuentes (Núñez Errázuriz, 1993b), en el cual se debía transformar figuras geométricas planas siguiendo un proceso iterativo de construcción similar (**tipo** de iteración y **naturaleza** del contenido). Vale la pena señalar que algunos alumnos de alto rendimiento manifestaron una posición infinitista (aceptación de la iteración sinfin) en la paradoja de Zenón, pero una posición finitista en el problema geométrico, mientras que otros lo hicieron en el sentido contrario. Euo + (10;1), por ejemplo, quien se mostró claramente convencido por sus argumentos de la iteración sinfin involucrada en el problema geométrico, ni siquiera titubeó al decir que la iteración en la paradoja termina:

> Euo +(10;1): ¿Llegamos al otro lado? *Sí, seguro, ... si avanzamos la mitad, la mitad, la mitad, la mitad, la mitad, la mitad, la mitad, la mitad, ... después seguro que llegaremos.* Tengo un amigo que dice que no llegamos porque hay siempre una mitad por avanzar (el experimentador le muestra paso a paso, pero a cada paso ejemplificado por el experimentador, Euo responde inmediatamente con el paso siguiente como si este completara así "la otra mitad") ... *y una vez más la mitad, y una vez más la mitad, y llegaremos.* ¿Y si hacemos esto solamente en nuestra imaginación? *En nuestra imaginación y en la realidad también* (llegamos).

Ode, +(9;9), por el contrario, mantuvo una posición finitista en el problema geométrico pero sugirió la naturaleza sinfin de la iteración de la paradoja:

> Ode +(9;9): ¿Llega (una hormiga)? ... (Analiza los "últimos" pasos) ... *¿Siempre la mitad?* (pregunta al experimentador). *Es realmente, ... si está ahí avanza la mitad* (sigue los movimientos sobre la mesa), *se demorará mucho, porque después no hace más que un paso, ... y luego la mitad, y después siempre la mitad, ... no, no llega. Ahí, por ejemplo* (muestra el borde de la mesa), *está ahí y después avanza la mitad, llega ahí y después ahí, ... no yo pienso que no llega, avanzando siempre una mitad.*

Grupos de 12 y 14 años

A diferencia de los grupos de 8 y 10 años, aquí no se encontraron diferencias entre los argumentos provenientes de sujetos de alto y bajo rendimiento intelectual-académico. Los patrones de respuesta en los grupos de 12 y 14 años fueron muy similares entre sí, por lo tanto serán analizados en conjunto.

Cerca de dos tercios de los niños de 12 y 14 años (de alto y bajo rendimiento en conjunto) dieron respuestas de las formas "tomará mucho tiempo pero llegaremos" o "uno llegará porque al final uno no podrá avanzar la mitad, estará muy cerca" (alterando así las condiciones de la *acción*). Entre estos sujetos algunos mostraron profundos titubeos manteniendo posiciones antagónicas– a menudo, oponiendo ideas basadas en consideraciones físicas inmediatas (aunque no necesariamente concretas) e ideas basadas en el hecho que la iteración lleva a aproximarse al destino (no necesariamente abstractas):

> Mal –(14;8): ¿Llega? ... (reflexiona, suspira) ... *No quiero ponerme a medir la mesa pero, pienso que no llegamos justo al borde, puede ser que lleguemos como a un milímetro. Pienso que llegaremos, pero que no llegaremos de inmediato, ... si cada vez tenemos que, ... en fin no sé, ... pienso que ella* (una hormiga) *llegará exactamente al punto, y pienso que no llegará al justo. Tengo dos opiniones. Yo no sé si será "al justo" o si será justo un milímetro antes.*

Otros cambiaron de opinión cunado la escala del problema fue amplificada:

> Frc –(14;7): ¿Llegamos? *Por supuesto, ya está casi ahí, ...* (reflexiona), *pero es cada vez más y más chico, ... pienso que se debe llegar.* Y si la distancia es aquella entre Suiza y Suecia. *¡Ah no!, en ese caso no. ... siempre queda un poco, ... es cada vez más pequeño, después hay una mitad* (verifica con sus dedos al borde de la mesa), *y hay que avanzarla, pero usted ya casi no avanza, está muy apretado... Uf! es difícil.* ¿Y llegamos? *No sé. Pienso que en pequeñas distancias se llega, pero en distancias largas creo que no, ... no estoy seguro, pero creo que no.* ¿Y en distancias medianas? ... (reflexiona), ... *si, creo que se llega, porque después hay distancias pequeñas.*

Aumentar la distancia a una dimensión cualitativamente mucho mayor, pareciera poner los "últimos" pasos de la iteración mucho más separados entre sí, dejando espacio para más iteraciones de tal manera que ya no se logra llegar. Este punto de vista considera las distancias medianas como pertenecientes a una familia similar a la de las distancias cortas. Ellas comparten las mismas características al final de proceso.

Finalmente, menos del 25% de los sujetos de 12 y 14 años presentaron argumentos a favor de la idea de que uno sólo se aproximará al destino, sin nunca alcanzarlo y sólo un sujeto estuvo seguro al respecto. En general, estos argumentos se caracterizan por: estar cargados de dudas y titubeos; respetar las condiciones del *setting* y de la *acción* y algunas veces por la emergencia explícita de la idea de infinito:

> Joé +(14;4): ... (reflexiona) ... *Al infinito no llegaremos nunca, eso sobrepasa la imaginación, pero si vemos* (muestra la mesa) *llegaremos, pero en realidad no llegaremos, ... no sé, eso sobrepasa la imaginación. Si avanzamos cada vez la mitad del trayecto que tenemos por delante, es difícil que lleguemos, después eso será microscópico, infinitamente pequeño.*

El único sujeto que estuvo seguro acerca de la imposibilidad de alcanzar el destino a pesar del hecho que la iteración continúa sin terminar mostró un enfoque pragmático a través de toda la entrevista. El nunca se comprometió con razonamientos extremadamente abstractos y especulativos, aunque concibió los objetos del problema como objetos teóricos en los cuales las limitantes físicas no eran relevantes para el análisis:

> Stn –(14;1): *No, no llegaremos nunca.* ¿Aunque estemos siempre avanzando? *Si, porque avanzamos sólo la mitad. Nos acercaremos, estaremos muy muy cerca del borde* (de la mesa)

pero no llegaremos nunca ... Abrá siempre un pequeño pedazo por recorrer. ¿Incluso si siempre nos estamos acercando? *Si, incluso.*

El sigue las condiciones del problema evitando cualquier consideración especulativa centrándose en el hecho que siempre queda algo,.independientemente de cuantos pasos se realicen. La posición obtenida por cualquiera de las iteraciones nunca es el destino final y por lo tanto la iteración continúa sinfin.

Discusión

Entre las variables estudiadas, sólo la edad mostró claras diferencias en los argumentos (excepto para las edades 12 y 14). No se encontraron diferencias por sexo. El rol del rendimiento intelectual-académico parece haber sido significativo solamente para los grupos de 8 y 10 años. Los argumentos dados por los alumnos de alto rendimiento a estas edades fueron más analíticos y tendieron a considerar el problema como tal, mientras que aquellos dados por los alumnos de bajo rendimiento tendieron a considerar el problema como algo trivial (era evidente para ellos que se podía alcanzar el destino después de un par de pasos, de tal manera que no eran necesarias consideraciones posteriores). No encontrar grandes diferencias intelectual-académico en los grupos de mayor edad puede ser parcialmenteexplicado por dos factores. Por un lado, debido a que la validez del test de Raven (inteligencia) disminuye a medida que aumenta la edad –dado a un efecto techo– y por otro lado debido a que en los grados más altos el rendimiento académico se vuelve un fenómeno más complejo de tal forma que factores no cognitivos, tales como la autoestima o cambios motivacionales durante la pre adolescencia, juegan un rol importante (Bolognini, Plancherel, Núñez Errázuriz, y Bettschart, 1994).

En términos matemáticos la versión de la paradoja de Zenón aquí presentada corresponde a una serie de la forma $d/2 + d/4 + d/8 + \ldots$ (d = distancia). Usando este lenguaje para describir la visión de los niños (el cual, por supuesto, no es el de ellos), podríamos decir que hemos observado enfoques de las siguientes formas:

a) Alteración temprana de las condiciones de la *acción*

$$d/2 + d/4 + \ldots + d/2^k + d/2^k = d$$

En general k toma un valor entre 3 y 5. Las dos útlimas etapas son inadvertidamente consideradas como iguales, lo cual lleva a una llegada exacta a destino. Este enfoque fue obsevado entre los alumnos de 8 y 10 años de bajo rendimiento. El problema en este caso es trivial.

b) Alteración de las condiciones del *setting*

$$d/2 + d/4 + d/8 + \ldots + d/2^k = e$$

Repentinamente se trunca la serie considerándose un nuevo destino, que define una nueva distancia $e = \sum_{k=1}^{p} d/2^k$, al cual ya se ha llegado (en general $e < d$). Este enfoque fue observado en algunos alumnos de 8 y 10 años de alto rendimiento, y parece emerger como una solución para reconciliar intuiciones tempranas acerca de iteraciones *convergentes* de larga duración (subdivisión).

c) Alteración de las condiciones de la *acción*

$$d/2 + d/4 + d/8 + \ldots + d/2^k < d \text{ (donde } k \text{ es un entero finito grande)}$$

El proceso se atasca debido a la pequeñez de los pasos y no puede continuar. Este enfoque fue observado en los cuatro grupos de edad, pero k tendió a ser más grande en los grupos de 12 y 14 años que en el de 10.

d) Respeto de las condiciones del *setting* y de la *acción*

$$d/2 + d/4 + d/8 + \ldots < d$$

El proceso sólo se aproxima al destino y continúa para siempre. Esto se observó en un sólo sujeto (14 años). Sin embargo, cerca de un 25% de los sujetos de 12 y 14 años también se refirió a él, aunque con profundos titubeos que involucraban también al enfoque c).

Nunca se observó un enfoque de la forma $d/2 + d/4 + d/8 + \ldots = d$, el cual es –razonando con límites– "matemáticamente correcto".

Para poder concebir la situación paradojal generada por el problema de Zenón, uno debe ser capaz de distinguir los elementos involucrados y respetar las condiciones del problema (esto es, en cuanto al *setting*, manteniendo la distancia original que ha de ser cubierta o recorrida, y en cuanto a la *acción*, continuando la iteración sin fin). Los enfoques a), b), y c) se refieren a alteraciones de las condiciones del problema de tal manera que ellos no generan situaciones paradojales. Nuestra paradoja entonces no es paradoja para los niños. ¿Pero cómo entender la emergencia de lo pardójico? ¿Son racionales las alteraciones observadas? ¿Se trata de estructuras proto-matemáticas? Pensamos que para responder a estas preguntas es necesario hacer algunas reflexiones en torno a la naturaleza de la matemática.

Las visiones tradicionales en filosofía de la matemática (platonismo, constructivismo, formalismo) consideran la existencia de objetos matemáticos (o fórmulas en el caso del formalismo), en varias formas y grados, como independientes de los seres humanos. La matemática es vista como algo objetivamente estructurado independientemente de cualquier tipo de entendimiento. Ella tiene un significado universal independiente de nuestra actividad mental. Pero en cuanto investigador del pensamiento o científico de la cognición –y no en cuanto matemático– es legítimo preguntarse ¿dónde residen los componentes paradójicos de los problemas como el de Zenón? ¿Y donde residen, por ejemplo, las controversias en torno al infinito que se observan entre matemáticos constructivistas y no-constructivistas? Pensamos que para intentar dar respuesta a estas preguntas es inadecuado asumir desde el principio que la matemática "pre-existe" objetiva e independientemente del entendimiento humano. La tarea no es describir y explicar cómo "descubrimos" la matemática, sino que es explicar cómo seres vivos (como nosotros) han podido crear semejante aparato conceptual. Para ello es preciso mirar hacia otras alternativas que parecen ser más prometedoras para abordar la cuestión de la naturaleza del pensamiento matemático donde paradojas, incertidumbres y controversias son consideradas como parte del proceso mismo de permanente creación de lo que la matemática es.

Una proposición consiste en adoptar una visión a la vez no-objetivista y no-subjetivista del conocimiento[5], lo cual es fundamentalmente diferente de las posiciones de los enfoques tradicionales[6]. Ella consiste en concebir la cognición como un fenómeno intrínsecamente codefinido con el permanente proceso de enacción de significados que manifiestan organismos al existir en sus medios. Este proceso de enacción esta enraizado en la experiencia de corporaleidad que estos organismos tienen al existir biológicamente y que adquiere formas semánticas cuando ellas son coordinadas a través del fluir de interacciones realizadas en comunidades de organismos[7]. Experiencia, significado, conceptos, cognición, y lenguaje no sólo van de la mano, sino que además se definen mutuamente. Al llevar estas ideas al plano de las interacciones de seres vivos superiores (Homo sapiens) se puede observar que la matemática emerge como un lenguaje no-denotativo que coordina coordinaciones de acción, el cual –aunque altamente abstracto– se basa de manera última en los espacios consensuales de experiencias corporales (Lakoff y Núñez Errázuriz, en impresión). La matemática así es concebida como dependiente totalmente de los seres humanos; como emergente a través de un lenguaje configurado históricamente a través de la interacción de seres biológicos que evolucionan en sus medios. Ella, por lo tanto, depende de la naturaleza misma de los procesos interrelacionados de conceptos enraizados en la experiencia de corporaleidad (*embodiment*), interacciones sociales y lenguaje. En otras palabras: sin seres humanos no hay matemática; distintos seres biológicos implican diferentes "matemáticas".

Con estas ideas en mente volvamos a la paradoja de Zenón y al desarrollo cognitivo. Por su parte, el espacio consensual depende, entre otros, de la estructura biológica de los sujetos (por ejemplo, en el caso de los niños, de la estructura del sistema nervioso en desarrollo) que participan en el permanente proceso de definición de lo que es el espacio consensual. Este punto es esencial en psicología del desarrollo cognitivo porque el mundo conceptual que emerge de la actividad cognitiva de un niño pequeño se basa en un espacio consensual que es fundamentalmente diferente del nuestro (porque su neurobiología, su lenguaje, su cognición enactada es fundamentalmente diferente). Nosotros los adultos damos por descontado que el extenso uso de objetos idealizados en matemática (por ejemplo, puntos como entes sin volumen), así como del rigor necesario para establecer pruebas y crear nuevos objetos[8], emergen, de ma-

[5] Para una discusión mas detallada sobre enfoques alternativos a la tradicional dicotomía objetivismo-subjetivismo en ciencias cognitivas, ver Núñez Errázuriz (1995; en impresión).

[6] Como por ejemplo las teorías piagetanas o las teorías cognitivistas basadas en la idea de procesamiento de la información.

[7] Una descripción detallada de este enfoque, denominado *embodied cognition*, sobrepasa los contenidos de este artículo. Se aconseja consultar: Johnson (1987); Maturana y Varela (1987); Lakoff (1987); Varela, Thompson, and Rosch (1991); Edelman (1992); Thelen y Smith (1994); Núñez Errázuriz, (1995). En particular para una discusión elaborada sobre *embodied cognition* en relación con las Matemáticas, ver Lakoff y Núñez Errázuriz (en impresión).

[8] El rigor es consensual. La historia del cálculo muestra que el rigor ha tenido distintos significados para los griegos (Eudoxus, Arquímides), los matemáticos del siglo XVII (Leibniz, Newton), siglo XIX (Weierstrass) y siglo XX (Robinson).

nera última, de los espacios consensuales establecidos a través de permanente interacción. El respeto de las condiciones del problema de Zenón por parte de los niños no existe en los espacios consensuales que nuestras fisiologías de adulto definen. Lo que ellos enactan a partir de un planteamiento simple[9] es un mundo semántico donde hay otras características de idealización y de rigor, tan fundamentales en matemática. En el caso de la paradoja es posible constatar que el respeto de las condiciones del problema ocurre dentro del espacio consensual antes mencionado.

Desde este punto de vista, las alteraciones inadvertidas de las condiciones del problema de Zenón por parte de los niños (*setting* y *acción*) se realizan en un espacio consensual coherente con el permanente proceso de enacción de significados que ellos experimentan, el cual es fundamentalmente diferente del espacio que definimos nosotros los adultos. Aunque esta situación se da a diario en la interacción entre niños y adultos, ella se pone de manifiesto claramente con esta paradoja. Los sujetos más pequeños, determinados en su estructura neurobiológica en desarrollo, enactan un espacio consensual claramente diferente del nuestro cuando el significado del **tipo** de iteración *convergente* está en juego. De hecho, antes de la edad de 12 años existe una abismante diferencia ontológica entre el infinito en lo grande (**tipo** *divergente*) y el infinito en lo pequeño (**tipo** *convergente*). Así, uno de los sujetos de 10 años señaló:

> Yak +(10;1): Si ese es el infinito más grande como dices, cuando mencionas el infinito más pequeño, ¿es eso lo mismo pero en el sentido contrario? *Si, pero hay una sola diferencia. Que en un momento dado eso se vuelve tanto más pequeño que ni siquiera se puede saber donde está.* Entonces ¿cuál es la diferencia entre el infinito más grande y el infinito más pequeño? *Que en un momento dado cuando estamos en el infinitamente pequeño eso* (el proceso) *se detiene, mientras que el infinitamente grande puede continuar hasta ... el infinito.*

Podemos constatar que aqui se está en presencia de infinitos sinfin e infinitos que se detienen, ¡siendo ambos infinitos! Nótese que este último contradice nuestra noción misma de "infinito". A los 8 años de edad la idea de sinfin (relacionada con el **tipo** *divergente* y con el infinito en lo grande) constituye una coordinación de significados posibles en el espacio consensual que nosotros con estos niños mantenemos. La distinción "infinito en lo pequeño" por el contrario (relacionada con iteraciones del **tipo** *convergente*), requiere de otros componentes experienciales que no son enactados por los niños pequeños y por lo tanto el espacio consensual adquiere otras formas. Parece ser que entre las edades de 10 y 12 años emerge una cierta intuición de las iteraciones del **tipo** *convergente* y de sus consecuencias, permaneciendo muy lábil posteriormente de tal manera que se ve muy influenciada por contextos figurales y conceptuales. Así alumnos de 10 años de alto rendimiento y alumnos de 12 y 14 años dieron diferentes respuestas con diferentes argumentos a situaciones isomorfas en las cuales el contexto había sido cambiado (por ejemplo, distancia a recorrer). De acuerdo con nuestras observaciones, la subdivisión no pareciera ser dominada a la edad correspondiente a las operaciones formales, al menos no con la claridad y certeza presentadas en la obra temprana de Piaget (1948). De cualquier manera, es imperioso conocer más a fondo las sutilezas que existen en el proceso de cristalización del entendimiento de las iteraciones del **tipo** *convergente*: ¿Cuáles son las bases biológicas responsables de su

---

[9] El problema en sí, tal como es planteado, no contiene términos técnicos incomprensibles.

aparición tardía en el desarrollo, y cuáles son las formas que toma el proceso de cristalización en diferentes contextos conceptuales?

Finalmente vale la pena mencionar que estas observaciones se basaron en adaptaciones específicas de la paradoja de Zenón y de la coordinación de componentes heterogéneos (diferente **tipo** y **naturaleza**). Sería interesante estudiar situaciones similares controlando ciertos factores contextuales que pudieran desempeñar un papel en la actividad cognitiva dada la labilidad de las intuiciones de los sujetos respecto al infinito en lo pequeño:

(a) considerando distancias d cualitativamente diferentes (por ejemplo, entre los lados de una mesa, entre dos lugares en un edificio, en una ciudad, en un país, etc.);

(b) considerando valores distintos a 1 y 2 para p y q respectivamente, en la serie $\sum_{k=1}^{\infty} [p(q-p)^{k-1}/q^k]d$, de tal manera que la iteración no siempre sea realizada en torno a mitades (por ejemplo, también 1/10 o 3/4);

(c) presentando el problema de una manera regresiva (como en la paradoja del movimiento de Zenón), y no sólo de una manera progresiva como fue estudiada aquí;

(d) centrando la pregunta no solamente en la serie $\sum_{k=1}^{\infty} d / 2^k = d$ ("¿llegamos?") sino también en el $\lim_{n\to\infty}(d/2^k) = 0$ (los elementos de la secuencia: "¿Qué pasa con los pasos?").

El estudio del rol desempeñado por estos factores pudiera revelar más acerca de cómo nuestras mentes construyen la idea de subdivisión y de infinito en lo pequeño.

Referencias bibliográficas

Anastasi, A. (1961). *Psychological Testing*. Nueva York: Macmillan.

Bolognini, M., Plancherel, B., Núñez Errázuriz, R., Bettschart, W. (Eds.). (1994). *Préadolescence: Théorie, Recherche et Clinique*. Paris: ESF éditeur.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.

Edelman, G. (1992). *Bright Air, Brilliant Fire: on the Matter of the Mind*. Nueva York: BasicBooks.

Johnson, M. (1987). *The Body in the Mind: The Bodily Basis of Meaning, Imagination, and Reason*. Chicago, IL: University Press.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nueva York: Oxford.

Lakoff, G. (1987). *Women, Fire, and Dangerous Things: What Categories Reveal About the Mind*. Chicago: University Press.

Lakoff, G. y Núñez Errázuriz, R. (en impresión). The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-Based Mathematics. En L. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Langford, P.E. (1974). Development of concepts of infinity and limit in mathematics. *Archives de Psychologie, 42* (167-168), 311-322.

Maturana, H. y Varela, F. (1984). *El árbol del conocimiento: Las bases biológicas del entendimiento humano*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria.

Núñez Errázuriz, R. (1993a). *En deçà du transfini: Aspects psychocognitifs sous-jacents au concept d'infini en mathémathiques*. Fribourg: Editions Universitaires.

Núñez Errázuriz, R. (1993b). Big and small infinities: Psycho-cognitive aspects. *Proceedings of the 17th International Conference Psychology of Mathematics Education, (Tsukuba, Japan)*, Vol. II, pp. 121-128.

Núñez Errázuriz, R. (1995). What Brain for God's-Eye? Biological Naturalism, Ontological Objectivism, and Searle. *Journal of Consciousness Studies*, 2(2), 149-166.

Núñez Errázuriz, R. (en impresión). Eating Soup with Chopsticks: The "Difficult" Problem of Conscious Experience. *Journal of Consciousness Studies*.

Pellegrino, J.W. y Glaser, R. (1980). Components of inductive reasoning. En R.E. Snow, P-A Federico y W.E. Montague (Eds.), *Aptitude, Learning, and Instruction. Vol. I.* (pp. 177-217). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* Paris: P.U.F.

Raven, J.C. (1960). *Guide to the Standard Progressive Matrices.* London: H.K. Lewis.

Sternberg, R.J. (1977). *Intelligence, Information Processing, and Analogical Reasoning: The Componential Analysis of Human Abilities.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Taback, S. (1975). The child's concept of limit. In Rosskopf, M. F. (Ed.), *Six Piagetian studies in mathematics education.* Teachers College Press.

Thelen, E., y Smith. L. (1994). *A Dynamic Systems Approach to the Development of Cognition and Action.* Cambridge, MA: MIT Press.

Varela, F., Thompson, E., y Rosch, E. (1991). *The embodied Mind.* Cambridge, MA: MIT Press.