

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CÁLCULO DE ÁREA DE REGIONES SOMBREADAS EN FIGURAS PLANAS DE NATURALEZA FRACTAL INTEGRANDO CABRI GÉOMÈTRE II PLUS

Diana Catalina Moreno, asukadreizehn@gmail.com, Universidad de Nariño.
Jesús Humberto Guerrero, jezuzz777@hotmail.com, Universidad de Nariño.

Resumen. El trabajo de investigación tuvo en cuenta los referentes teóricos de visualización y el planteamiento y resolución problemas, además integró el programa Cabri Géomètre II Plus para evidenciar los procedimientos descritos por los estudiantes en el desarrollo de problemas del cálculo de áreas como magnitudes dentro de regiones sombreadas en figuras geométricas planas con un contenido fractal. Para llevar a cabo la investigación se plantearon objetivos relacionados con: El diseño de problemas en programa Cabri Géomètre II plus; diseño y aplicación de una situación de aula en la cual se encuentran tres cuestionarios, cada uno con un nivel de dificultad distinto, los estudiantes realizaron procedimientos que permitieron evidenciar la forma como visualizan los problemas y se pudo categorizar los resultados.

Palabras claves. Problemas, visualización, área, fractales, Cabri

1. Presentación.

Es conocido que el Planteamiento y Resolución de Problemas es de vital importancia en Educación Matemática y sobre esto se han elaborado numerosas investigaciones. Acerca de investigaciones que se centran en el desarrollo y comprensión del cálculo de áreas de regiones poligonales. Marmolejo y Vega (2012), muestran que no todos los estudiantes resuelven problemas de forma similar. Existen distintas formas de ver o visualizar un problema que conduce a distintos procedimientos desarrollados con el fin de lograr llegar a la solución. Los procesos cognitivos que emergen de estos problemas son potencializados si se incorporan fractales, porque éstos poseen características que conllevan a explotar todo el potencial visual de los estudiantes generando diversas operaciones, maneras de ver, heurísticas y transformaciones y, además, han sido poco tenidos en cuenta en este tipo de investigaciones por ser un conocimiento relativamente nuevo.

Es así como Polya (1989), en su libro “Cómo Plantear y Resolver Problemas”, acerca al lector a informarse sobre la forma cómo los estudiantes pueden abordar un problema para comprenderlo, concebir un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás para verificar la solución obtenida; de esta manera se puede ver que existen diversas formas de ver y resolver un problema.

Los problemas de comparación de áreas han ayudado a mejorar la comprensión de los fenómenos visuales que se generan en los estudiantes, a desarrollar una heurística abundante, ejercitación de procesos importantes y manejar diferentes registros de representación; además son fundamentales para promover la enseñanza de la visualización vinculada con figuras geométricas (Marmolejo y Vega, 2012), ya que el estudiante al enfrentarse a problemas de áreas está inducido a distintas maneras de ver que dan lugar a distintos procedimientos. Las matemáticas requieren de la visualización como herramienta heurística que se adapte a las exigencias de problemas que requieren distintas formas de solución.

La integración de fractales a estos estudios sería una propuesta encaminada a potencializar todo lo anteriormente mencionado, desarrollando en los estudiantes habilidades que refuercen su pensamiento espacial, esto se logra trabajando sus propiedades como la inclusión del límite en las figuras, homotecia, simetría, rotación, traslación, fracciones, congruencia, relaciones y propiedades geométricas.

Se puede observar que aunque el estudio de fractales es reciente se encuentran investigaciones que informan acerca de su naturaleza y propiedades, como el cálculo de áreas, pero no coinciden con la aplicación de problemas de comparación de áreas integrando Cabri Géomètre II Plus donde se analice la visualización. La integración de estos aspectos es pertinente para estudiar los fenómenos visuales que favorecen la comprensión de problemas y el desarrollo de habilidades en los estudiantes.

Sobre la visualización se debe decir que su estudio es incipiente en cuanto al análisis de los aspectos cognitivos que se tiene cuando se resuelven problemas de cálculo de áreas. Un estudio que se acerca al desarrollo temático de este trabajo de investigación se puede encontrar en Marmolejo y González (2013), que consiste en un análisis visual de libros de texto y que sugiere un mayor interés en la incorporación de este tema en la enseñanza.

La forma cómo los estudiantes utilizan Cabri Géomètre II Plus para expresar sus ideas puede dar una noción del potencial heurístico que han adquirido, las operaciones en las que se han utilizado como fraccionamientos, reconfiguraciones, traslaciones, rotaciones; la focalización global o local que se ejerce en las figuras y sus transformaciones como conversiones del registro de representación así como sus diferentes tratamientos.

El grupo de estudiantes estudiado, del cual se detallará más adelante, produjeron procedimientos acerca de los cuales se realizó un estudio de los fenómenos visuales que intervinieron en ellos y donde los problemas de cálculo de áreas involucrando fractales fue fundamental, ya que estos problemas hacen posible llegar a procesos visuales importantes.

La incorporación de Cabri Géomètre II Plus es un aporte tecnológico al trabajo de Planteamiento y Resolución de Problemas destacándose porque sus propiedades permiten diseñar problemas donde se

pueda trabajar contenidos visuales así como ver y discriminar los procedimientos realizados al desarrollar estos problemas.

En la primera parte de este trabajo se presentó el problema de indagación referente al estudio de la geometría, al planteamiento y resolución de problemas, al estudio del área como magnitud y al uso del programa de Cabri Géomètre II Plus, teniendo en cuenta las dificultades que se presentan en la enseñanza y en el aprendizaje de éstos temas. Para responder esto, se plantearon unos objetivos, basándose en aspectos histórico-epistemológicos, matemáticos, didácticos y cognitivos, se muestra la metodología de investigación donde se habla sobre la situación de aula implantada, el espacio de trabajo y los participantes del mismo.

Desarrollando la metodología, se realizó un análisis enfocado en la visualización con lo cual, se llegó a la obtención de una categorización en términos visuales que muestra procesos, tales como heurística, focalización y transformaciones realizadas por los participantes. Por último, se muestran las conclusiones obtenidas.

2. Desarrollo de la temática.

El trabajo surgió de la necesidad de solucionar un problema de la cartilla del proyecto Matemática Recreativa de Colombia Aprendiendo (2004), el cual busca que los estudiantes de bachillerato del colegio Champagnat de la ciudad de Popayán, Colombia, se motiven por el estudio de la geometría, ésta cartilla está inspirada en una colección de problemas de geometría tomados de materiales como textos y revistas de matemáticas utilizados en la escuela alemana, se entiende por escuela alemana al tipo de enseñanza impartido en las escuelas de educación media en Alemania.

El problema que motivó éste trabajo de investigación es el siguiente:

M y N son puntos medios. ¿Qué fracción del área del cuadrado es el área sombreada?

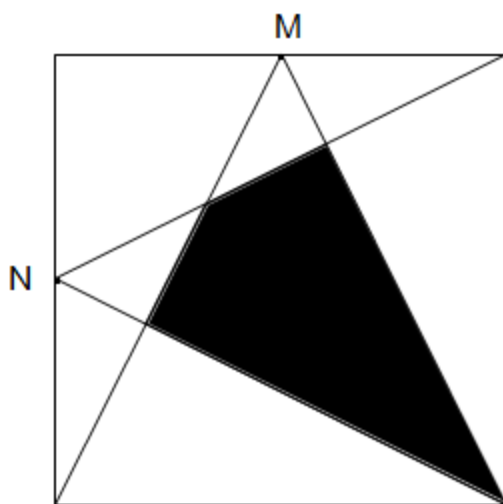


Figura 1. Problema de cálculo de área sombreada propuesto en XXX Problemas de geometría de la escuela alemana. Fundemar, Colegio Champagnat. Popayán, Colombia.

El problema mencionado se resolvió involucrando fractales, apoyándose en el programa de geometría dinámica Cabri Géomètre II Plus, posteriormente se inició la búsqueda de problemas similares, es decir, problemas que involucraran fractales y que se resolvieran usando geometría dinámica, aritmética y álgebra. Sin embargo, al no encontrarlos se plantearon y solucionaron problemas de estas características.

Resolver el anterior problema estimuló para seguir trabajando con la idea de hallar áreas de regiones sombreadas pero de figuras fractales y que se trabajen en el programa Cabri Géomètre II plus obteniendo como resultado infinitos problemas de los cuales se presenta aquí uno de ellos:

La figura sombreada es un fractal y se construyó a partir de los puntos medios del cuadrado.
¿Qué fracción es el área sombreada respecto al área del cuadrado?

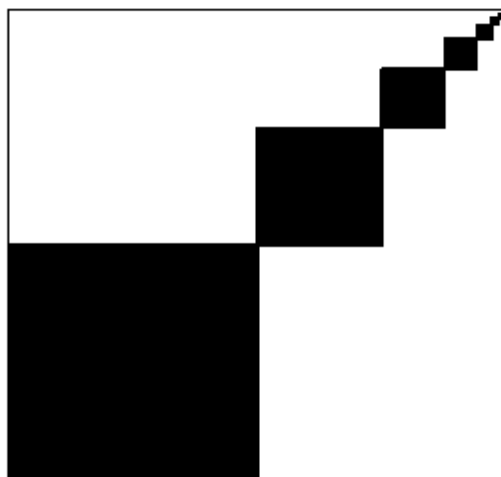


Figura 2. Problema de cálculo de áreas sombreadas de figuras fractales.

Para Kantowski (1981), un problema difiere de un ejercicio en que el sujeto que lo resuelve desconoce la vía de solución, no tiene un proceso algorítmico que lo conduciría con certeza a la solución y adopta un carácter activo frente al problema. El presente trabajo de investigación no busca estudiar ejercicios sino problemas que demandan mayor interrelación mental.

Puesto que la resolución de problemas de geometría es motivo de estudio, es conveniente desarrollar proyectos similares a este. La necesidad de trabajar por la comprensión y el aprendizaje en la resolución de problemas es una actividad que ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático; es el eje central de diferentes propuestas curriculares constituyéndola como un objeto primario de la enseñanza, además de una parte integral de la actividad humana.

Los estudiantes que resuelven problemas ganan confianza, desarrollan una mente inquisitiva y perseverante, mejoran su capacidad de comunicación matemática y su capacidad de utilizar procesos de pensamiento de alto nivel.

Ahora bien, el término fractal es reciente y los problemas que existen sobre el cálculo de área de regiones sombreadas en figuras planas de este tipo son escasos, razón por la cual se estudian solo los fractales conocidos como el triángulo de Sierpinski. En otros casos se estudia la teoría pero no se proponen problemas o no se usa un programa de geometría dinámica para generar un problema con fractales.

El trabajo de investigación centra su interés en la comprensión y aprendizaje de la resolución de problemas, considerando problemas matemáticos de áreas sombreadas en regiones planas de naturaleza fractal. Para ello es conveniente comprender la teoría acerca de la resolución de problemas expuesta por Polya (1989); las teorías relacionadas con la visualización de Duval (2003) y Marmolejo (2012) en sus artículos. Esta actividad es importante en el desarrollo y estudio del conocimiento de las matemáticas como eje central de las propuestas curriculares, constituyéndose en objetivo primario de la enseñanza, además de ser parte integral de la actividad humana.

Se reconoce la necesidad de coordinar los enfoques analíticos y sintéticos como una estrategia para superar la falsa división curricular entre las dos geometrías: una, la sintética presente en la geometría escolar y primeros cursos universitarios; la segunda, la analítica, propia de la educación media y de cursos universitarios más avanzados.

Existen investigaciones que se proponen considerar, en el currículo de matemáticas, el desarrollo y aplicación de diversas estrategias para nuevas situaciones de problemas, la generalización de soluciones y la adquisición de confianza en el aprendizaje significativo de las matemáticas.

De acuerdo con las exigencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), ésta investigación cumple con dichas expectativas puesto que aborda: la resolución y planteamiento de problemas, el pensamiento espacial ya que se hacen necesarias las transformaciones de las figuras, la interdisciplinariedad porque se complementan los enfoques sintético y analítico y, por último, la geometría dinámica haciendo uso de Cabri Géomètre II Plus.

Teniendo en cuenta lo anterior surgió la pregunta de investigación:

¿Cómo los futuros docentes de matemáticas que cursan décimo semestre de la Universidad de Nariño visualizan y resuelven problemas de área como magnitud de regiones sombreadas en figuras planas de naturaleza fractal apoyándose en el programa Cabri Géomètre II Plus?

Para dar respuesta a la pregunta se plantearon los siguientes Objetivos

Objetivo general

Hacer un análisis de la resolución de problemas de cálculo de áreas de regiones sombreadas en figuras planas de naturaleza fractal, cuyas soluciones se dan a partir de las Geometrías Euclidiana, Analítica, de Transformaciones y en el Cálculo Matemático integrando el programa Cabri Géomètre II Plus.

Objetivos específicos

- Diseñar problemas relacionados con el cálculo de áreas de figuras geométricas planas de naturaleza fractal integrando el programa Cabri Géomètre II Plus, dirigido a futuros docentes de matemáticas quienes cursan décimo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño.

- Diseñar una situación de aula que incluya a los problemas de geometría propuestos y aplicarla a los futuros docentes de matemáticas, que cursan décimo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño.
- Caracterizar, en términos visuales, las formas de resolver un problema de fractales donde se moviliza el área como magnitud.
- Realizar una colección de las construcciones geométricas más representativas integrando el programa Cabri Géomètre II Plus.

DISEÑO METODOLÓGICO

La metodología utilizada es de carácter cualitativo, se denomina estudio de casos, la importancia de la aplicación de éste tipo de metodología reside en que ésta es de carácter descriptivo y permite analizar situaciones que presentan múltiples variables.

Para Pérez (1994), los estudios de casos son particularistas, descriptivos y heurísticos, y se basan en el razonamiento inductivo al manejar múltiples fuentes de datos. Particularista, puesto que se caracteriza por un enfoque ideográfico orientado a comprender la realidad singular, característica útil para descubrir y analizar situaciones únicas.

Esto se ve reflejado dentro del trabajo de investigación puesto que las respuestas a cada cuestionario aplicado son particulares ya que cada estudiante tiene sus propios métodos para resolver un problema y por lo tanto cada análisis de resultados se realiza de manera particular.

La estructura del trabajo de investigación se diseñó en tres partes: La primera consiste en llevar a cabo el planteamiento de problemas del cálculo de áreas de figuras geométricas planas y fractales, apoyándose en el programa Cabri Géomètre II Plus con elementos de la geometría euclidiana con el fin de formar

figuras fractales en las cuales se pide hallar razones entre áreas, donde se aporta información enfocada a la solución del problema.

La segunda parte comprende el diseño de la situación de aula así como también la aplicación de la misma, teniendo en cuenta el enfoque de Polya (1989), aquí se realizan los procesos de solución de problemas propuestos geoméricamente a través de Cabri Géomètre II Plus, la geometría euclidiana, la geometría de transformaciones y mediante representaciones algebraicas tales como progresiones geométricas y ecuaciones. Además se hicieron los debidos tratamientos a cada uno de los problemas con el fin de clasificarlos.

Y la tercera parte hace referencia al análisis y organización de la información obtenida, para ello se diseñó una tabla que recoge los resultados obtenidos, la cual permitió una mejor interpretación de los resultados obtenidos teniendo en cuenta la información consignada en el marco teórico.

La situación de aula

La situación de aula contiene tres actividades las cuales poseen un grado de dificultad cada vez mayor. Cada actividad está dividida en dos partes: la primera, un cuestionario que consta de un problema y una serie de preguntas y la segunda, un diseño del problema y soluciones en el programa Cabri Géomètre II Plus.

Los problemas constan de una consigna y una figura geométrica plana constituida por figuras geométricas conocidas que forman una figura fractal, dichos problemas están diseñados para encontrar caminos o vías de solución de áreas de figuras sombreadas.

Las preguntas se han adecuado del libro de Polya (1989), las cuales están diseñadas para guiar al estudiante a abordar el problema, para poder comprenderlo, concebir un plan, ejecutar ese plan y al final examinar la solución obtenida.

El diseño en Cabri Géomètre II Plus consta de cinco partes, en la primera se expone el problema geométrico, en la segunda se muestra una solución geométrica donde se aprovecha el dinamismo de la figura, la tercera evidencia una solución algebraica utilizando progresión geométrica, la cuarta una solución algebraica utilizando ecuaciones y por último se presenta una quinta parte donde se muestra el cálculo del perímetro.

Espacio de trabajo

Esta investigación se llevó a cabo en el aula de informática del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Nariño, la cual cuenta con todo el equipo necesario para realizar las actividades, incluyendo computadores que tienen instalado el programa Cabri Géomètre II Plus.

Participantes

Para la elección de los participantes se tuvo en cuenta aspectos relevantes tales como su escolaridad, ya que por la naturaleza de los problemas a resolver, resultaría inoficioso aplicarlo a estudiantes que no cumplan con los siguientes requisitos:

- Ser estudiantes de licenciatura en Matemáticas de la universidad de Nariño
- Haber cursado y aprobado la asignatura de Geometría de Transformaciones

Con éste segundo requisito se asegura que el estudiante no sólo sabe resolver problemas de cálculo de áreas sino que también tiene conocimientos de algebra, geometría euclidiana, manejo de Cabri Géomètre II Plus y cálculo.

Teniendo en cuenta lo anterior se eligió a 6 futuros docentes de matemáticas de décimo semestre que cumplieron con estas características como población y mediante un muestreo direccionado se escoge un grupo reducido de estudiantes de ésta población a quienes se les aplicó el cuestionario de manera individual.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis se realizó teniendo en cuenta el tipo de problemas presentados y las respuestas suministradas en la información recolectada con los cuestionarios. Este análisis se hace con base en a aspectos relevantes para la investigación, que se presentaron en el diseño metodológico y en base al proceso de comprensión de la visualización, que permite dar cuenta de la evolución en cuanto a la resolución de problemas y del uso de Cabri Géomètre II Plus como instrumento de apoyo para el desarrollo del tipo de problemas planteados.

Descripción de la Experimentación

La aplicación de los cuestionarios se desarrolló en tres sesiones las cuales tuvieron lugar en las aulas de informática de la universidad de Nariño y tuvieron una duración de: una y dos horas.

1° Sesión. La sesión tuvo una duración de dos horas, en ella los estudiantes resolvieron el cuestionario 1 de manera individual, cada uno tuvo un computador con Cabri Géomètre II Plus, después de que los estudiantes resolvieron el cuestionario, se realizó la cuarta etapa de la Resolución de Problemas propuesto por Polya (1989) correspondiente a la visión retrospectiva mediante una presentación de algunas posibles vías de solución del problema propuesto en el cuestionario usando el programa Cabri Géomètre II Plus y proyectado en un video beam.

2° Sesión: La sesión tuvo una duración de una hora, donde los estudiantes resolvieron el cuestionario 2 de manera individual y en las mismas condiciones que en la primera sesión, por cuestiones de tiempo y disponibilidad, se realizó la cuarta epata de Resolución de Problemas de Polya (1989) de manera individual, presentando la solución del problema propuesto haciendo uso del programa Cabri Géomètre II Plus y sin el uso del video beam.

3° Sesión: La sesión tuvo una duración de una hora, donde los estudiantes resolvieron el cuestionario 3 de manera individual y en las mismas condiciones que en la primera y segunda sesión, se realizó la cuarta etapa de Resolución de Problemas de Polya (1998) de manera individual, presentando una solución del problema propuesto haciendo uso del programa Cabri Géomètre II Plus y sin el uso del video beam.

Codificación de los cuestionarios

Para un mejor manejo e interpretación de la información obtenida en los cuestionarios aplicados a los estudiantes de décimo semestre de licenciatura en matemáticas se realizó una codificación de cada cuestionario. En la figura 18 se muestra un ejemplo de dicha codificación. Para posteriores referencias, la codificación aparecerá en paréntesis.

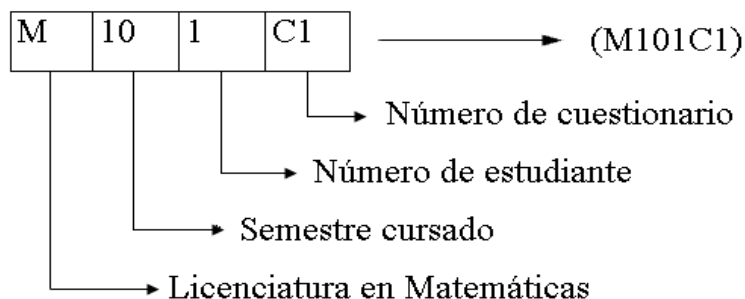


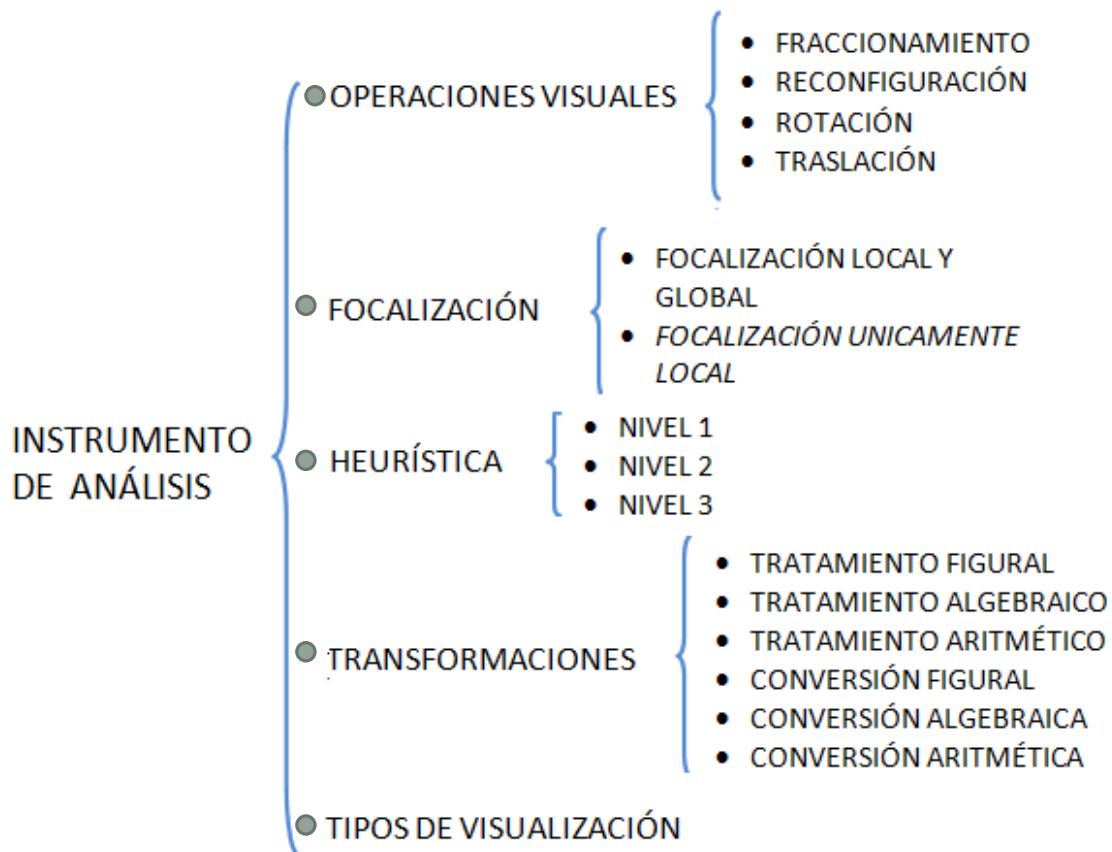
Figura 3. Ejemplo de la codificación utilizada para identificar cada cuestionario.

Instrumento de Análisis

Para la identificación de los registros de representación necesarios en el trabajo de visualización se estudiaron los procedimientos de resolución de tres cuestionarios los cuales contienen problemas de tipo geométrico, cada uno con un diferente nivel de dificultad. Se analizaron las respuestas que los estudiantes dieron a cada uno de los interrogantes del cuestionario y los archivos digitales de Cabri Géomètre II Plus a la luz de la Resolución de Problemas y la Visualización.

En los tres cuestionarios se revisaron las respuestas correspondientes a las cuatro etapas de Polya (1989). A pesar de haber pedido a los estudiantes que justifiquen las respuestas, fue evidente que la capacidad argumentativa que poseen algunos estudiantes es escasa. Sin embargo, las respuestas consignadas en los cuestionarios por parte de los estudiantes permitieron entender la forma en que se abordaron cada uno de los problemas propuestos.

Para el análisis de la información obtenida, se tuvieron en cuenta las categorías de análisis propuestas por Duval (1998), Marmolejo y Vega (2012), con las cuales se discriminaron tipos de visualización. A continuación se presenta las categorías y se definen los elementos característicos de estas con un respectivo ejemplo donde se visualizan.



CONCLUSIONES

Sobre el problema de indagación:

Los estudiantes tienen diferentes formas de visualizar los problemas propuestos, dependiendo de los conocimientos previos adquiridos por cada uno de ellos. Aunque los enunciados propuestos para cada problema son claros, se evidencia que cada estudiante presentó una interpretación diferente acertada o errónea y la vía de solución presentada no siempre fue la más acertada.

Algunos estudiantes presentaron soluciones geométricas, sin embargo, estas soluciones no fueron suficientemente convincentes para ellos, recurrieron a la asignación de variables y a tratamientos algebraicos para comprobar la respuesta. Esto demuestra la inclinación que tienen los estudiantes hacia la demostración algebraica y la carencia de trabajo en la solución geométrica.

A pesar de que los estudiantes tienen conocimiento sobre el funcionamiento del programa Cabri Géomètre II Plus, algunos estudiantes solo se centraron en la utilización de las herramientas calculadora y medición de área.

Sobre el diseño de los problemas:

Se necesita tener conocimiento del programa Cabri Géomètre II Plus para realizar buenas macro-construcciones de las figuras fractales, deslizadores y puntos móviles para el dinamismo de la solución geométrica y el ajuste armónico de la figura geométrica en la pantalla.

Sobre el análisis y resultados obtenidos: Se siguieron las teorías de visualización propuestas por Duval (2004) y Marmolejo y Vega (2012) en sus trabajos de investigación, sin embargo, el análisis de este trabajo se diferenció en la definición de nuevas categorías de análisis, esto se dio por la implementación de fractales en los problemas planteados, por la utilización del programa Cabri Géomètre II plus y por estar dirigidos a estudiantes de décimo semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño.

Aunque cada estudiante es diferente en el aspecto cognitivo y en su forma de resolver los problemas, se pudo discriminar ocho tipos diferentes de visualización, en los cuales los estudiantes coincidieron como: operaciones visuales, heurísticas, focalización y transformaciones.

Si bien dentro de los cuestionarios se pedía una solución geométrica del problema, ninguno de los estudiantes proporcionó una solución puramente geométrica, sino que fueron necesarios tratamientos algebraicos y aritméticos para llegar a una solución, que en algunos casos no fue la correcta. Esto demuestra la falta de desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes a la hora de enfrentarse a un problema geométrico.

En los cuestionarios se presentó la consigna del problema, la cual es clara y hace referencia a una comparación de áreas, pero las respuestas de los estudiantes fueron encaminadas a encontrar el área de la configuración fractal mas no a hallar la fracción pedida, correspondiente a la comparación de áreas entre la configuración fractal y el cuadrado.

De los 17 cuestionarios aplicados, solo 1 presentó una respuesta correcta correspondiente a la comparación entre el área sombreada y el área del cuadrado, de los restantes una parte encontró el área de la configuración fractal y la otra parte no encontró ninguna solución, lo que lleva a pensar en las deficiencias en la formación matemática de los estudiantes.

Sobre la integración del programa Cabri Géomètre II Plus:

Permitió el dinamismo de las figuras, por medio del arrastre, lo que es una visible ventaja en comparación a los procesos realizados en papel, sin embargo la mayoría de estudiantes no aprovechó esta ventaja remitiéndose a realizar gráficos en el papel, posiblemente por su incapacidad de usar adecuadamente el programa a pesar de que en la Licenciatura se brinda un acercamiento a él dentro de las asignaturas cursadas.

3. Referencias bibliográficas.

Barrera, F. & Santos, L. (2000). *Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento*. México. CINVESTAV-IPN. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-81040_archivo3.pdf

Barreto, J. (2008). *Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos*. Números. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.php

Boyer, C.B. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

Callejo, M. (1998). *Resolver problemas: Ayudar a los alumnos a pensar por sí mismos*. Números, Revista Didáctica de las Matemáticas. P. 179. España. Recuperado de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo36.pdf>

Carrasco, J. & Peralta, E. (2012). *Fractales en el aula de secundaria*. Recuperado de <http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1348011188/actas.pdf>

Definición abc. *Heurística*, 2007. Recuperado de <http://www.definicionabc.com/general/heuristica.php>

Duval, R. (1999). *Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo editorial Iberoamericana.

Duval R. (2003). *Voir en mathématiques, Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, 2003.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. [trad.] Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Escribano, J. & Jiménez, M. (2005). *Problemas clásicos de geometría desde un punto de vista actual: Guía del profesor*. Recuperado de <http://revmat.webs.ull.es/geometria/inicio/gprofesor.pdf>

D'Amore, B. & Fandiño, M. (2007). *Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y estudiantes*. *Revista electrónica de Relime*, Núm. 1, Vol. 10, 39-68. Extraído el 1 de mayo de 2015 de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500103>

Fandiño, M. (2012). Convicciones de los docentes sobre área y perímetro: una investigación. Recuperado de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/fandino/204%20Area%20y%20perimetro%20I%20SEM%20Corrientes.pdf>

Fernández, E. (2011). Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II plus. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

García, Y. & Zúñiga, R. (2014). Planteamiento y resolución de problemas de áreas en el laboratorio de educación matemática. Universidad del Valle. Cali, Colombia. Trabajo de grado. Recuperado de <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/7639/1/3469-0473475.pdf>

Gascón, J. (2001). *Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica: un punto de vista didáctico-matemático*. Disertaciones del seminario de Matemáticas Fundamentales (Mod. 28). UAB. Recuperado de http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/DISERTACIONES MATEMATICAS_28.pdf

Godino, J. Batanero, C. & Roa, r. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-maestros. España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Kantowski, M. (1981). *Problem solving. Mathematics Education Research: Implications for the 80's* 4, 111-126. Virginia. EEUU: Fennema.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Marmolejo, G. & González, M. (2013). *Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares*. Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. Núm. 3, Vol. 25, pp. 61-102 Grupo Santillana México Distrito Federal, México. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40529854004>

Marmolejo, G. & Vega, M. (2012). *La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje Educación Matemática*. Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. Núm. 3, Vol. 24, pp. 7-32 Grupo Santillana México Distrito Federal, México. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846001>

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá, D.C.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, D.C

Moreno-Marin, J. (2012). Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales. *Suma*, No. 40, 91-104. Recuperado de <http://revistasuma.es/revistas/40-junio-2012/experiencia-didactica-en.html>

Pereira, F. (2012). *A utilização da engenharia didática para analisar as diferenças nas concepções de geometria, dos alunos utilizando geomtria fractal*. Recuperado de <http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1348011188/actas.pdf>

Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa: Retos, interrogantes y métodos*. (1ra ed.), España. Editorial La Muralla, S.A.

Pool, S. (2012). *Introducción a la Geometría fractal y su relación con la naturaleza. Abstracción y Aplicación*. No. 7, 1-24. Recuperado de <http://intranet.matematicas.uady.mx/journal/>

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
XIII COLOQUIO REGIONAL DE MATEMÁTICAS y III SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. (15ava ed.), (J.Zugazagoitia, Trad.). México, D.F.: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).

Puerto, J. (2003). *Fractales para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico-variacional a través del software Cabri “del pensamiento numérico al pensamiento algebraico-variacional*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2721/1/El_uso_de_los_fractales_para_potenciar_el_desarrollo.pdf

Real academia española. (2014). *Fractal*. Recuperado de <http://buscon.rae.es/drae/srv/search?Val=fractal>

Santos, L. (2008). *La resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. Cinvestav- IPN Recuperado el 20 de abril de 2014 de <http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf>

Tuerango, P. (1993). *De la noción de área a su definición: investigación histórica sobre las técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida*. Servicio de publicaciones de la universidad de Castilla, La Mancha. Recuperado de <https://books.google.com.co/books?id=Uo2EsENtGCQC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>

Theoktisto, V. (2011) *Fractales*. Universidad Simón Bolívar. Caracas, Venezuela. Recuperado de <http://ldc.usb.ve/~vtheok/cursos/ci4321/sd11/adicionales/Fractales%201.pdf>

Zuluaga, C. & Cuellar, H. (2004). *XXX Problemas de geometría de la escuela alemana*. Fundemar, Colegio Champagnat. Popayán, Colombia.