Por:
José Luis Orozco Tróchez
Docente de Matemáticas
Colegio Champagnat - Bogotá
joselot2007@yahoo.es

TI–Nspire™ CAS

DESARROLLO DE LA FLUIDEZ REPRESENTACIONAL

Resumen:

En este taller se mostrará la importancia pedagógica de la tecnología TI–Nspire™ CAS, en el desarrollo del pensamiento lógico matemático y de la fluidez representacional de los estudiantes; de manera especial cuando tienen que enfrentarse a la solución de situaciones problema que implican el estudio de algunas funciones sinusoidales y a la solución: algebraica, gráfica y numérica de algunos problemas de física; o cuando tienen que solucionar ecuaciones racionales cuyos procesos algebraicos conducen a soluciones extrañas.

Palabras claves:

Variabilidad, funciones sinusoidales y TI–Nspire™ CAS.

1. Introducción:

La representación gráfica de funciones y análisis de la misma debe considerarse parte importante en el desarrollo de los procesos matemáticos que tienen que ver con el estudio de la trigonometría, el cálculo y la física, en los grados décimo y undécimo (preparatoria). En la mayoría de los casos una gráfica, una expresión algebraica y una tabla de valores analizadas conjuntamente son muy útiles; especialmente cuando se mide una variable y, cuyo valor depende de otra variable x, que varía independientemente; proceso que permite interpretar la relación funcional entre las variables.

En este orden de ideas la representación gráfica de funciones utilizando tecnología *TI–Nspire™ CAS*

a) Contribuye con el desarrollo de la **fluidez representacional,** entendida esta como la representación: gráfica, geométrica, tabular y algebraica; mediante la que se expresan conceptos y procedimientos matemáticos. La fluidez representacional implica: Codificar, decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación. Entender las interrelaciones que se dan entre las entre diversas formas de representación y optar por las más adecuada de acuerdo con la situación problema que se esté trabajando.

b) Favorece el aprendizaje significativo que se da través de la solución de situaciones problema, donde el estudiante aprende, cuando domina diferentes sistemas de representación.

c) Da lugar a la construcción, exploración, manipulación directa y dinámica de objetos en pantalla, que conduce en un nivel bajo a la elaboración de conjeturas, en un nivel medio a la argumentación y un nivel superior al desarrollo de demostraciones.

d) Permite "Problematizar lo visual, de tal forma que surja la necesidad de examinar, conjeturar, predecir y verificar" [21] es decir, brinda al estudiante la posibilidad de pensar y de preguntarse sobre el porqué de determinados hechos, al explorar diversas situaciones y formas de representación.

e) Conlleva a correlacionar: lo geométrico, con lo espacial, con lo simbólico, con lo numérico, con lo aleatorio y con lo variacional.

f) Permite ampliar el rango de formulación y resolución de situaciones problema.

Ministerio de educación Nacional de Colombia. Serie Documentos. Tecnologías Computacionales en el currículo de Matemáticas, autores varios.[21]

g) Facilita la simulación de microentornos de trabajo, en los que se puede desarrollar actividades significativas [22] contextualizando problemas. El aprendizaje significativo se logra a través de la solución de situaciones problema, en las que el estudiante aprende entre otras formas cuando domina diferentes sistemas de representación y los usa para el desarrollo de diferentes actividades.

h) Permite "Dudar de lo que se ve", significa esto no tomar por verdadero relaciones percibidas de una imagen estática construida en la pantalla del computador o dibujada sobre una hoja de papel. No es lo mismo trabajar con un objeto estático, que con un objeto dinámico (que se desplaza por la pantalla) y que le brinda la posibilidad al usuario de examinar su comportamiento, es decir, permite ver más de lo que se ve, lo que consiste en estudiar una figura o una gráfica para tratar de descubrir relaciones que no están presentes a simple vista". [23]

1. Tema a desarrollar: Análisis de las funciones sinusoidales expresadas de la forma *y = Asen (B(x+C)) +D*, y, *y = ACos (B(x+C)) + D* utilizando tecnología

1.1 Metodología:

La metodología de trabajo para el desarrollo de este taller es la siguiente:

a) Leer la breve información conceptual del tópico o tema propuesto a desarrollar.
b) Revisar los ejemplos desarrollados cuando estos se presenten.
c) Desarrollar las actividades sin utilizar tecnología informática.
d) Desarrollar las actividades haciendo uso del computador y del programa *TI–Nspire™ CAS*

Información Conceptual:

Para las funciones sinusoidales y = Asen (B(x+C)) +D, y, y = ACos (B(x+C)) + D se tiene que:

A Representa la amplitud de la función, es decir, la cantidad de unidades que la gráfica sube y baja a partir de la recta y = D, que es paralela a eje x.
D Representa el desplazamiento vertical de la función a partir de y= 0.
C Representa el desplazamiento horizontal o desfasamiento a partir de x=0.
Si $C > 0$, la gráfica se desplaza para la izquierda de x=0.
Si $C < 0$, la gráfica se desplaza para la derecha de x=0.

Una situación significativa es una situación real o imaginada, que crea un contexto en el cual los alumnos dan significado y sentido a la acción. (Grisales, A. & Orozco, J.; 2013, p.74). [22]

Ministerio de educación Nacional de Colombia. Serie Documentos. Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, página 23 autores varios. [23]

T Representa el periodo de la función.
M Representa el valor de la ordenada en el punto máximo relativo.
N Representa el valor de la ordenada en el punto mínimo relativo.

Las siguientes son las fórmulas de recurrencia para calcular el periodo, la amplitud y el desplazamiento vertical.

$$T = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{360°}{|B|} \qquad A = \left|\frac{M-N}{2}\right| \qquad D = \frac{M+N}{2}$$

Actividad 1.

Estudie y comprenda el siguiente ejemplo, en el que se indica la forma de construir la gráfica de una función sinusoide utilizando cinco puntos. Si $y = 2Sen\left(\frac{1}{3}(x-10)\right) - 1$ significa que:

$A = 2$	$B = \frac{1}{3}$	$C = -10$	$D = -1$	$T = \frac{360}{\frac{1}{3}} = 1080$

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función $y = Sen\ x$, en la que se indican cinco puntos claves.

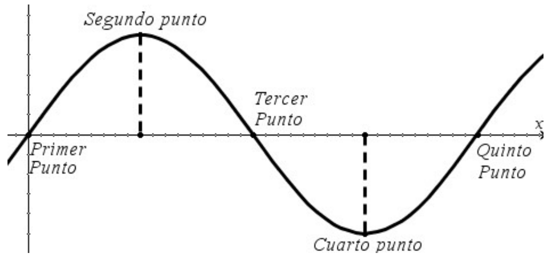

Figura 1

Para la construcción de $y = 2Sen\left(\frac{1}{3}(x-10)\right) - 1$ se realiza el siguiente proceso:

1. Cálculo del periodo: $T = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{360}{\frac{1}{3}} = 1080$

Se divide $\frac{1080}{4} = 270°$; significa que entre punto y punto hay 270°.

2. Organización del plano cartesiano. *Figura 2.*

a) Como $D = 1$, se traza una recta paralela al eje x, por $y = -1$. A partir de esta recta la gráfica sube y baja 2 unidades, porque $A = 2$, por lo tanto, se desplaza hasta la recta $y = 1$ y hasta la recta $y = -3$, como se muestra en la *figura 2*.

b) Como $C = -10$, significa que se desplaza 10° para la derecha y como el periodo es 1080°, la gráfica se dibuja desde 10° hasta 1090°.

c) El intervalo (10,1090) se divide en cuatro partes iguales como se muestra en la *figura 2*.

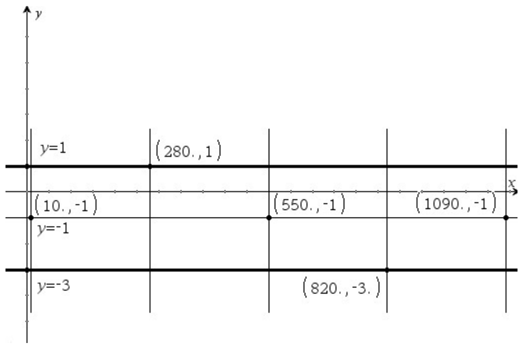

Figura 2

3. *Especificación de los cinco puntos claves.*

Primer punto *(10°,-1)*, aquí se inicia la construcción de la gráfica.

Segundo punto *(280°,1)*, aquí la gráfica se desplaza **2** hacia arriba a partir de *y=-1* y alcanza el punto máximo.

Tercer punto *(550°,-1)*, aquí la gráfica regresa la recta *y= -1*

Cuarto punto *(820°,-3)*, aquí la gráfica se desplaza **2** hacia abajo a partir de *y=-1* y alcanza el punto mínimo.

Quinto punto *(1090°,-1)*, aquí la gráfica regresa la recta *y=-1*

4. *Ubicación de los cinco puntos y trazado de la curva.*

El resultado esperado se muestra en la figura 3.

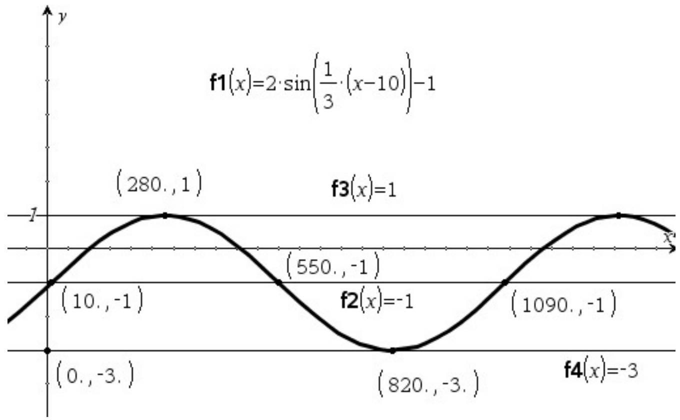

Figura 3

De lo anterior se concluye que:

$$M=1,\quad N=-3\quad A=\frac{M-N}{2}=\frac{1-(-3)}{2}=2\quad D=\frac{M+N}{2}=\frac{1+(-3)}{2}=-1$$

Actividad 2

Construya la gráfica de las siguientes funciones sinusoidales, ubicando en el plano cartesiano, solo cinco puntos.

1. $y=3Sen(0.5(x+5))-1$
2. $y=-4Sen(0.5(x-10))+1$
3. $y=4Cos\left(\frac{1}{4}(x+10)\right)+2$
4. $y=-2Cos(2(x-15))+2$
5. $y=3Sen(0.5(x+5))-1$
6. $y=3Sen(2(x-10))-2$
7. $y=4Cos\left(\frac{1}{4}(x+10)\right)+2$
8. $y=4Cos(4(x-5))+2$

En la figura 4, se muestra la gráfica del ejercicio 1.

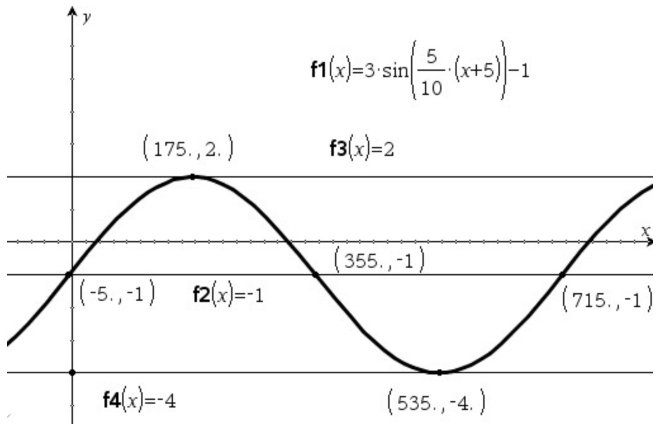

Figura 4

Actividad 3

Construya la gráfica de las sinusoidales formuladas en la actividad 2, utilizando el programa **TI-Nspire Cas.** De ser necesario tenga en cuenta las explicaciones dadas a continuación.

- Active el programa. Prepare el ambiente para trabajar con 0 decimales, haga clic en las opciones: ARCHIVO, CONFIGURACIÓN, CONFIGUAR DOCUMENTO. En la pestaña mostrar dígitos, seleccione fijo 0 y defina la medida de los ángulos en grados.
- Haga clic en ACEPTAR.
- Haga clic en: INSERTAR, GRÁFICOS.
- Digite *Sin(x)* y presione enter.
- Haga clic en el cuarto icono y active la opción AMPLIAR-TRIG. Figura 5.
- Haga clic en el sexto icono y active la opción PUNTOS DE INTERSECCIÓN, luego sobre los puntos de intersección de la curva con el eje x.
- Halle las coordenadas de los puntos de intersección, haga clic en el primer icono y active la opción COORDENADAS Y ECUACIONES, figura 6.
- Finalmente haga clic sobre cada punto de intersección.

Los resultados esperados se muestran en la figura 7.

Figura 5

Figura 6

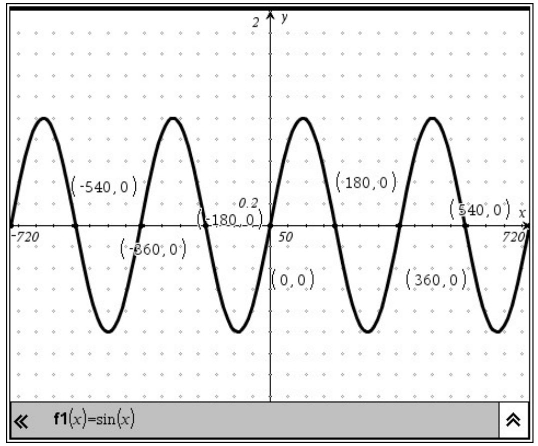

Figura 7

Construcción de las gráficas de las funciones trigonométricas modificando la amplitud y el período.

- Active el programa.
- Haga clic en el primer icono e inserte un control del deslizador. Figura 8.
- Cambie el nombre de la variable, asígnele la letra **a.** Figura 9.
- Active el puntero del Mouse y haga sobre el deslizador con el botón derecho.
- Active la opción configuración y modifique los valores como se muestra en la figura 9.
- Digite en la línea de edición, *a * sin (x)* presione enter, luego mueva el botón del deslizador. Los resultados esperados se muestran en la figura 10.

Figura 8

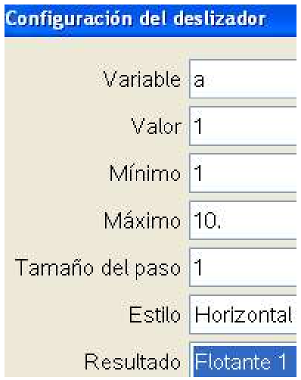

Figura 9

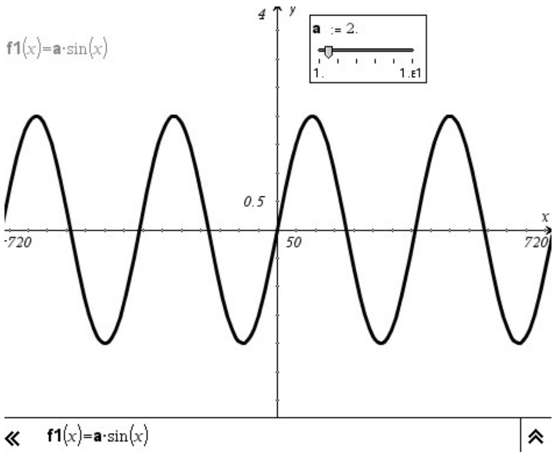

Figura 10

Ensaye insertando otro deslizador de variable **b**.

- Digite *a * sin (b * x)* presione enter y mueva cada uno de los deslizadores.
- Digite *a * sin (-b * x)* presione enter y mueva cada uno de los deslizadores.

Información Conceptual:

Cualquier combinación lineal de las funciones: seno y coseno con el mismo ángulo se puede transformar en una sinusoide simple y una sinusoide simple se puede escribir como una combinación lineal de las funciones seno y coseno.

Sea $y_1 = Asen\,(bx)$, y, $y_2 = BCos\,(bx)$ dos funciones, entonces:

$y = y_1 + y_2 = Asen\,(bx) + BCos(bx)$

$y = CSen\,(bx+t)$

En donde

$C = \sqrt{A^2+B^2}$	$Sen\,t = \frac{A}{C},\ con\ C \neq 0$	$Cos\,t = \frac{B}{C},\ con\ C \neq 0$	$Tan\,t = \frac{A}{B},\ con\ B \neq 0$

Actividad 4

Con la anterior información para cada uno de los siguientes ejercicios:

a) Halle la ecuación de la sinusoide de forma *y = CSen (bx+t)*

b) Halle la magnitud del ángulo *t*.

c) Construya la gráfica de la sinusoide.

1. $y_1 = 2Sen(x)$, y, $y_2 = 2Cos(x)$
2. $y_1 = 3Sen(x)$, y, $y_2 = -3\sqrt{3}Cos(x)$
3. $y_1 = -2Sen(3x)$, y, $y_2 = \sqrt{5}Cos(3x)$
4. $y_1 = -\sqrt{5}Sen(2x)$, y, $y_2 = 2Cos(2x)$

El desarrollo del ejercicio 1 se presenta a continuación y su representación gráfica se muestra en la figura 11.

El desarrollo del ejercicio 1 se presenta a continuación y su representación gráfica se muestra en la figura 10.

Si $y_1 = 2Sen(x)$, y, $y_2 = 2Cos(x)$ significa que:

$$A = 2, B = 2, y, C = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$y = 2\sqrt{2}\,(Sin(x+t))$$

$$Sen\,t = \frac{A}{C} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

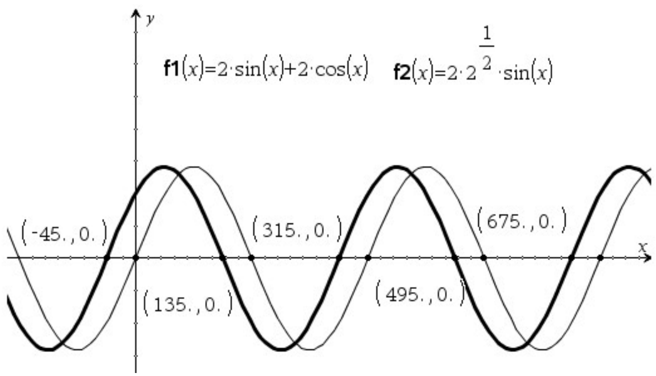

Figura 11

En la figura 11 se muestra la gráfica de la sinusoidal $y = 2\,Sin\,x + 2Cos\,x$, comparada con la gráfica de $y = 2\sqrt{2}\ (Sen\,x)$. Observe el desfase 45° de ésta última con respecto a la sinusoidal $y = 2\,Sin\,x + 2Cos\,x$

$$t = Sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$$

$$y = 2\sqrt{2}\ (Sin\,(x+45))$$

$\sin(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$t=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$t=45$

Información Conceptual:

La amplitud de onda es el valor máximo, tanto positivo como negativo, que puede llegar a adquirir la sinusoide. El valor máximo positivo que toma la amplitud de una onda sinusoidal recibe el nombre de "pico o cresta", mientras que el valor máximo negativo de la propia onda se denomina "vientre o valle". El punto donde el valor de la onda se anula al pasar del valor positivo al negativo, o viceversa, se conoce como “nodo” o “cero”. Figura 12.

El tiempo que demora cada valor de la sinusoide en repetirse o cumplir un ciclo completo, ya sea entre pico y pico, entre valle y valle o entre nodo y nodo, se conoce como “período”. El período se expresa en segundos y se representa con la letra $T =$

La frecuencia se presenta con la letra $F = \frac{total\ ciclos}{tiempo}$ y su unidad de medida es el ciclo por segundo o hertz (Hz).

La longitud de onda representa la distancia existente:

Entre dos picos, crestas o valles consecutivos

Es el doble de la distancia entre un nodo y otro de la onda sinusoidal medida en metros.

La longitud de onda se representa por medio de la letra griega lambda $\lambda = V_p T$, donde

$V_p = velocidad\ propagada$

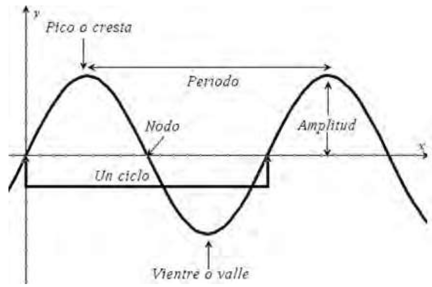

Figura 12

Actividad 5

La marea alta o **pleamar** es el momento en que el agua del mar alcanza su máxima altura dentro del ciclo de las mareas.

La m**area baja** o **bajamar** es el momento opuesto, en que el mar alcanza su menor altura. Algunas veces el tiempo aproximado entre una pleamar y la bajamar es de 6 horas, completando un ciclo de 24 horas 50 minutos.

Estudie y comprenda el siguiente ejemplo.

En cierta ciudad costera[24] la marea alta se produce a las $9:36\ a.m.$ y alcanza una profundidad de $2.7\ m$ y la marea baja se produce a las $3{:}48\ p.m.$ y alcanza una profundidad de $2.1\ m$ Suponga que dicha profundidad se representa por una función sinusoidal cuyo periodo es de 12 horas y 24 minutos. Con esta información responda las siguientes preguntas:

¿A qué hora ocurrió la marea baja?

¿Cuál es la profundidad aproximada del agua a las $6{:}00\ a.m.$ y a las $3{:}00\ p.m.$?

¿A qué hora el agua alcanzó una profundidad aproximada de $2.4\ m$?

De acuerdo a la profundidad de las mareas se concluye que:

DEAMA FRANKLIN, KENNEDY DANIEL, FOLEY GEORGE, BLITZER ROBEERT, Matemáticas Universitarias Introductorias, editorial Pearson, 2009, página 32 [24]

$M = 2.7$, $N = 2.1$, $A = \frac{M-N}{2} = \frac{2.7-2.1}{2} = 0.3$, $D = \frac{M+N}{2} = \frac{2.7+2.1}{2} = 2.4$

Como el periodo es 12 horas y 24 minutos se tiene:

$T = 12 + \frac{24}{60} = 12.4\ horas$ $\quad T = \frac{2\pi}{|B|}$ $\quad B = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12.4} = \frac{\pi}{6.2}$

Como a las 9:36 a.m. la marea estaba en el punto máximo significa que el desfase de la sinusoidal es

C = 9:36 = 9 + $\frac{36}{30}$ = 9.6 horas

La ecuación resultante se formula a continuación y la representación gráfica esperada se muestra en la figura 13.

y= ACosB (x +C) +D $\qquad$ y = 0.3 Cos $\left(\frac{\pi}{6.2}\right)$ (x - 9.6) +2.4

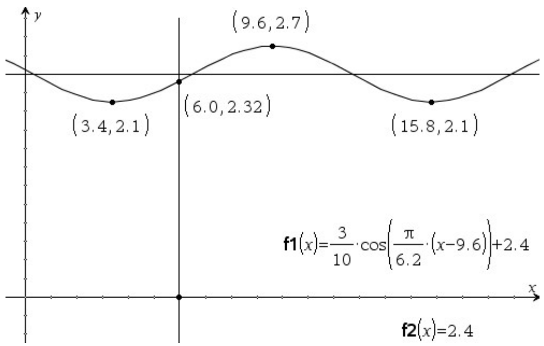

Figura 13

¿A qué hora ocurrió la marea baja?

La gráfica muestra que en el primer mínimo local se produce la marea baja, es decir, a las 3.4

$3.4 = 3 + (0.4)\ 60 = 3.24\ a.m.$

¿Cual es la profundidad aproximada del agua a las $6{:}00\ a.m.$ y a las $3{:}00\ p.m.$?

$f1(x)$	$\frac{3\cdot\cos(0.5\cdot x-4.9)}{10}+2.4$
$f1(6)$	2.32
$f1(15)$	2.12

¿A que hora el agua alcanzó una profundidad aproximada de 2.4 m?

Esto corresponde al punto de intersección entre la gráfica de la función

$y = 0.3Cos\left(\frac{\pi}{6.2}\right)(x - 9.6) + 2.4$ y la gráfica de $y = 2.4$, es decir, cuando $x = 0.3$

En la figura 14, se muestra esta situación , por lo tanto:

0 + 0.3 (60) = 0.18 a.m. = 12:18 a.m.

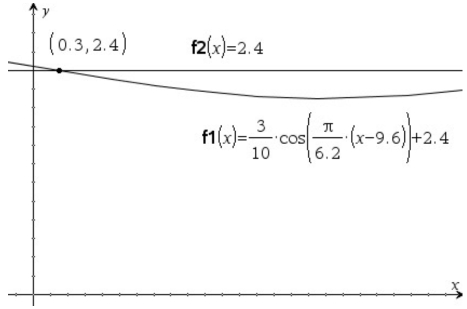

Figura 14

Resuelva los siguientes problemas [25]; utilizando tecnología $TI-NspireCas^{TM}$

En la ciudad de Bogotá la temperatura varía continuamente debido al fenómeno de la niña, en una muestra de datos se concluyó que la ecuación que permite calcularla en grados centígrados es $T = 15\ Sen\ (15x) + 9$ ¿Para qué valor de $0 \le x \le 24$ la temperatura es de 20° centígrados? Construya la gráfica

$x = 0$, equivale a las $6{:}00\ a.m.$ $\qquad$ $x = 6$, equivale a las $12{:}00\ m$

$x = 12$, equivale a las $6{:}00\ p.m.$ $\qquad$ $x = 18$, equivale a las $12{:}00\ m$

La ecuación y = 3 Sen (0.5 (x -4)) + 8 permite calcular la profundidad que alcanza el agua de un río, en determinado momento respecto al tiempo. ¿A que hora la profundidad del río es de 11m? Construya la gráfica

La ecuación y = 0.002 Sen (100 x) permite calcular el desplazamiento de una molécula de aire, a consecuencia de un sonido simple, ¿Para que valor de x, en segundos el desplazamiento es de 0.00176 pulgadas? [26] Construya la gráfica

El movimiento ondulatorio, es el proceso por medio del cual se propaga energía de un lugar a otro, sin transferencia de materia mediante ondas mecánicas o electromagnéticas. En cualquier punto de la trayectoria de propagación se produce un desplazamiento periódico u oscilación, alrededor de una posición de equilibrio. [25]

Modelo de problemas tomados de: CHRISTIAN HIRSCH, HAROLD SHOEN, LARSON, HOSTETLER, Matemáticas 10, nivel 5, editorial MacGraw-Hill, 1986 [26]

3. *Tema a desarrollar: Ecuaciones con soluciones extrañas:*

Una solución extraña es una solución de la ecuación derivada de la ecuación original, que no es solución de la ecuación original. Este tipo de solución se presenta en ecuaciones escritas como una expresión racional, en la que aparecen fracciones polinómicas; las cuales para resolverlas se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Actividad 6

A continuación se presenta la solución de dos ecuaciones que tienen soluciones extrañas.

Primera ecuación

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x^2-4x+3}$$

Si $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-4x+3}$, entonces:

$$\frac{2x\,(x-3)}{(x-1)(x-3)} + \frac{(x-1)}{(x-1)(x-3)} \qquad \frac{2}{(x-1)(x-3)}$$

$$2x\,(x-3) + (x-1) = 2$$

$$2\,x^2 - 6x + x - 1 - 2 = 0$$

$$2\,x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\frac{(2x-6)\,(2x+1)}{2} = \frac{2\,(x-3)\,(2x+1)}{2} = 0$$

De acuerdo al anterior proceso algebraico, las soluciones son: $x = 3$, y , $x = -\frac{1}{2}$

Revíselo y afirme o niegue las respuestas halladas.

Segunda ecuación

$$\frac{x-3}{x} + \frac{3}{x-2} = \frac{6}{x^2+2x}$$

Si $\frac{x-3}{x} + \frac{3}{x+2} = \frac{6}{x^2+2x} = 0$, entonces:

$$\frac{(x+2)(x-3)}{x(x+2)} \qquad \frac{3x}{x(x+2)} + \frac{6}{x(x+2)} = 0$$

$$(x+2)\,(x-3) + 3x + 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 + 3x + 6 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x\,(x+2) = 0$$

De acuerdo al anterior proceso algebraico, las soluciones son: $x = 0$, y, $x = -2$. Reviselo y afirme o niegue las respuestas halladas.

Nota: Para completar los análisis anteriores en la mayoría de los casos es importante respaldarlos con una gráfica, en el que se pueda precisar en qué conjunto dominio está definida la función, que genera la ecuación.

Solución utilizando Tecnología $TI-NspireCas^{TM}$

La solución de la ecuación $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x^2-4x+3}$ se muestra a continuación.

$$\frac{2\cdot x}{x-1}+\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x^2-4\cdot x+3} \qquad \frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-3}+2=\frac{2}{x^2-4\cdot x+3}$$

$$\text{solve}\left(\frac{2\cdot x}{x-1}+\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x^2-4\cdot x+3},x\right) \qquad x=\frac{-1}{2}$$

La gráfica de la expresión $y = \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x^2-4x+3}$ se muestra en la figura 15.

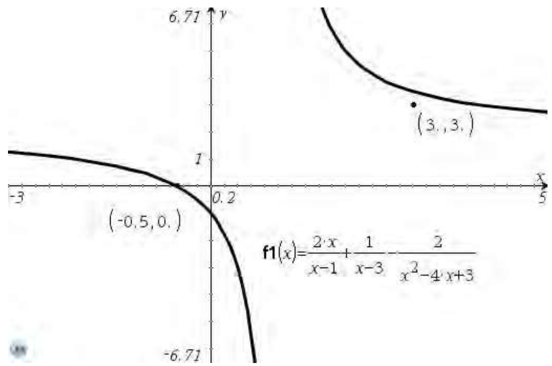

Figura 15

La solución de la ecuación $\frac{x-3}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{6}{x^2+2x}$ se muestra a continuación.

$$\frac{x-3}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{6}{x^2+2\cdot x}=0 \qquad \text{false}$$

$$\text{solve}\left(\frac{x-3}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{6}{x^2+2\cdot x}=0,x\right) \qquad \text{false}$$

$$\frac{x-3}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{6}{x^2+2\cdot x} \qquad 1$$

$$\text{expand}\left(\frac{x-3}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{6}{x^2+2\cdot x},x\right) \qquad 1$$

La gráfica de la expresión $\frac{x-3}{x}+\frac{3}{x+2}+\frac{6}{x^2+2x}$ se muestra en la figura 16.

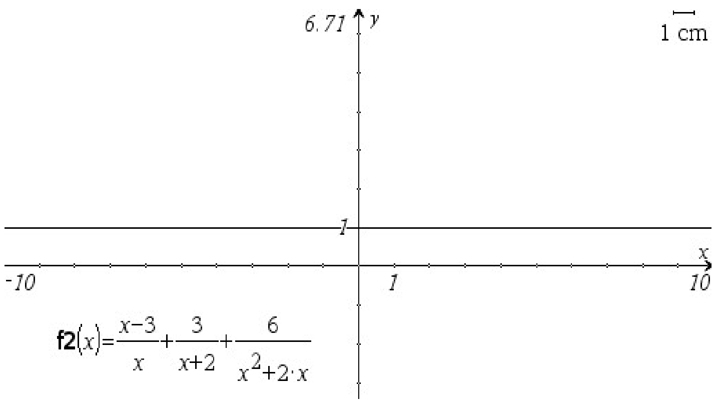

Figura 16

Actividad 7

Halle la solución de las siguientes ecuaciones.

1. $\frac{5}{x-3}+\frac{4}{2x-1}=\frac{25}{2x^2-7x+3}$
2. $\frac{4}{x-2}-\frac{5}{x+2}=\frac{20}{x^2-4}$
3. $\frac{2x}{x-3}-\frac{6}{x-3}=9$
4. $\frac{5x-1}{x-1}+\frac{1}{x}=0$
5. $\frac{3}{2x-4}-\frac{5}{x+3}=\frac{2}{x-2}$
6. $\sqrt{2x+15}-2=\sqrt{6x+1}$
7. $x-2=\sqrt{x}$
8. $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$
9. $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x(1-x)}$

4. *Tema a desarrollar: funciones en fase, cuadratura y oposición.*

Información Conceptual:

$y_1=A_1 Sen\ (wt+\theta_1)$, y, $y_2=A_2 Sen\ (wt+\theta_2)$, representan dos movimientos ondulatorios y en estas ecuaciones θ_1, y, θ_2, representan las respectivas fases iniciales de cada uno de ellos.

Cuando $\theta_1-\theta_2=\theta$, se dicen que los movimientos están en fase.

Cuando $\theta_1-\theta_2=90°$, se dicen que los movimientos están en cuadratura.

Cuando $\theta_1-\theta_2=180°$, se dicen que los movimientos están en oposición.

En la función $y_1=A_1 Sen(wt+\theta_1)$, el ángulo $wt+\theta_1$ que forma el vector rotatorio con el eje de las x, se denomina fase del movimiento. El ángulo θ_1 que se forma en el instante $t=0$ se denomina fase inicial. Figura 17.

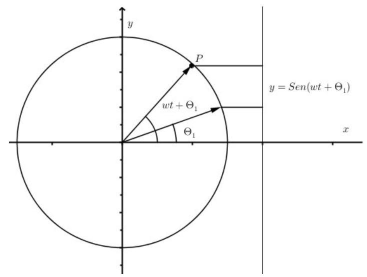

Figura 17

Actividad 8.

Determine cuáles de los iguientes movimientos y_1 , y_2 , expresados en cada numeral están en oposición, en cuadratura o en fase.

Movimientos	Expresión	Expresión
1	$y_1 = 2Sen(3x+180)$	$y_2 = 3Sen(3x+90)$
2	$y_1 = 3Sen(4x+10)$	$y_2 = 5Sen(4x+10)$
3	$y_1 = 7Sen(3x+360)$	$y_2 = 3Sen(3x+180)$
4	$y_1 = 13Sen\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)$	$y_2 = 11Sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$
5	$y_1 = 6Sen(x+45)$	$y_2 = 15Sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
6	$y_1 = 3Sen(2x+180)$	$y_2 = 4Sen(2x+90)$

Utilizando el programa $TI-NspireCas^{TM}$, construya la gráfica de cada uno de los anteriores movimientos. Los resultados esperados del ejercicio 1 se muestran en la figura 18.

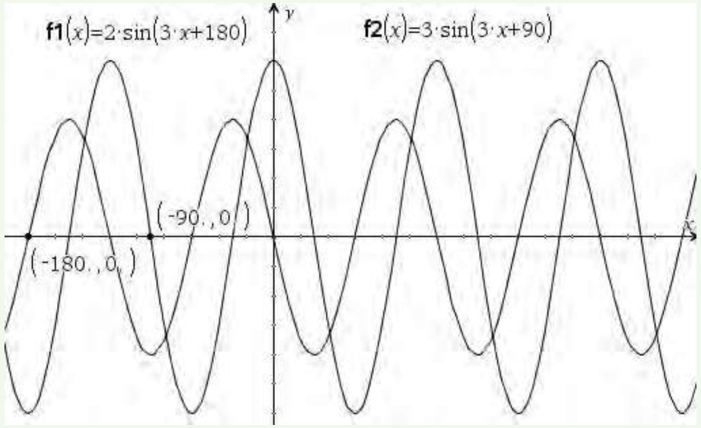

Figura 18

Referencias Bibliográficas

Grisales, A. & Orozco, J. (2013). Juega y Construye la Matemática. Aportes y Reflexiones Pedagógicas. Ediciones Maristas. Bogotá.
Hirsch, C.; Shoen, H. & Hostetler, L. (1986), Matemáticas 10, nivel 5, editorial MacGraw-Hill.
Deama, F.; Kennedy, D.; Foley, G.; Blitzer, R. (2009). Matemáticas Universitarias Introductorias. Editorial Pearson.
Ministerio de educación Nacional de Colombia. (1999). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, autores varios.