

## UNA PROPUESTA DE INSTRUCCIÓN PARA ABORDAR EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN SITUACIONES DE AZAR

Mónica Vergara, José Alcides Romero y Felipe Fernández  
*Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)*

mdma\_mavergarac163@pedagogica.edu.co, mdma\_jaromerom698@pedagogica.edu.co,  
mdma\_fjfernandez@pedagogica.edu.co

*Con el propósito de promover razonamiento probabilístico bajo los enfoques intuitivo, clásico y frecuencial en estudiantes de grado undécimo sin instrucción previa en probabilidad, se realizó un análisis didáctico para proponer la implementación de un conjunto de tareas que permitan el avance en dicho razonamiento. A partir de dicho análisis se establecen una serie de capacidades, errores y dificultades que perfilan una posible ruta de instrucción y que delinear como aporte de esta ponencia una propuesta de instrucción que incluye situaciones asociadas a juegos de tablero, laberintos, aparato de Galton y carreras de juegos electrónicos.*

### **PALABRAS CLAVE**

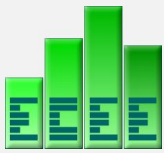
Razonamiento probabilístico, análisis cognitivo, propuesta de instrucción, enfoques probabilísticos.

### **INTRODUCCIÓN**

Al referirse a situaciones de la vida cotidiana, Batanero (2006) afirma que el común de las personas poco interpretan y toman decisiones a partir de la información suministrada, lo que sugiere falencias en su razonamiento probabilístico, que en últimas provienen de la calidad de su formación escolar en lo estocástico. En consonancia con esta problemática, los entes ministeriales de muchos países han considerado pertinente prestar atención a la introducción, en los ámbitos curriculares, de la componente estadística y probabilística. A nivel colombiano, el Ministerio de Educación Nacional, a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 1998, 2006) promueve la importancia de aplicar los conocimientos básicos de probabilidad en diferentes contextos.

Por otra parte, desde la perspectiva evaluativa colombiana, y asumiendo los cambios introducidos en la prueba SABER 11 para el año 2014, se requiere que los estudiantes apliquen su competencia matemática en contextos prácticos al considerar situaciones propias de la vida cotidiana en la prueba de razonamiento cuantitativo.

Ante el panorama anterior, el análisis de situaciones de incertidumbre ofrece la oportunidad de desarrollar ideas y concepciones probabilísticas de los estudiantes a partir de sus intuiciones, brindando elementos para el diseño de una propuesta de instrucción en el aula que promuevan el razonamiento probabilístico bajo los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico de la probabilidad de un grupo de estudiantes de undécimo grado.



### **MARCO DE REFERENCIA**

Para ubicar el trabajo que interesa reportar en esta ponencia, es pertinente señalar que éste hace parte de un proyecto de mayor alcance cuyo marco de referencia atiende a una aproximación al modelo de análisis didáctico propuesto por Gómez (2007). Este modelo se estructura en cuatro componentes de análisis: la de contenido, la cognitiva, la de instrucción y la de actuación. A continuación se presenta el referente conceptual sobre el cual está sustentado las cuatro componentes de esta propuesta.

De la componente de contenido se puede dar cuenta en investigaciones como las de Serrano (1996) y Batanero (2005, 2006) acerca de la conceptualización de la probabilidad en la escuela; y en documentos institucionales como los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas planteados por el MEN (1998 y 2006); de la componente cognitiva acerca de errores y dificultades de los estudiantes, así como de sesgos y heurísticas propias del razonamiento probabilístico, se puede sustentar en trabajos como los de Díaz (2003), Lavalle, Micheli y Boché (s.f.), Serrano (1996), Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (1998) y Cañizares y Batanero (1997); la componente de instrucción, asociada al diseño de tareas y secuencia de actividades, está basada en apuntes sobre análisis de instrucción tomados de Flores, Gómez y Marín (2013); y por último, la componente de actuación que aborda asuntos de la evaluación, se fundamenta en la Taxonomía SOLO sugerida por Biggs y Collis (1982).

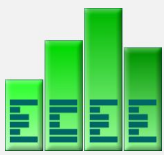
### **ASPECTOS METODOLÓGICOS**

La metodología de este trabajo es una aproximación al modelo de análisis didáctico planteado por Gómez (2007) que se plantea en tres fases. En la primera fase se realiza el análisis de contenido para determinar y analizar los elementos del razonamiento probabilístico, haciendo una revisión al contenido matemático a tratar, en este caso a los enfoques de probabilidad (intuitivo, frecuencial y clásico), a través de tres organizadores curriculares: estructura conceptual, sistemas de representación y exploración sobre la fenomenología asociadas a situaciones de azar.

En la segunda fase se ejecuta el análisis cognitivo planteando los objetivos de aprendizaje bajo los cuales se determinan las capacidades que se esperan propiciar en los estudiantes; éstas se organizan de manera secuencial que perfila un camino de aprendizaje, que tienen en cuenta dificultades y errores evidenciados por los estudiantes.

El análisis de instrucción, que se desarrolla en la tercera fase, aborda el problema de diseño e implementación de las tareas. Para ello se tienen en cuenta, aspectos como: los materiales y recursos disponibles; la organización y gestión del trabajo de los estudiantes y para definir la actuación del profesor ante los errores y dificultades evidenciados por ellos en el proceso de enseñanza.

Un resumen del tipo de actividades que se desarrollan en estas fases (por limitaciones de espacio se hace referencia a las actividades que se desarrollan en los análisis de actuación que conformaría una cuarta fase de trabajo), que no necesariamente se desarrollan de manera lineal, se relacionan en la Tabla 1.



No	Actividad	FASE		
		Análisis de Contenido	Análisis Cognitivo	Análisis de Instrucción
1	Elementos del campo conceptual	X		
2	Elementos del campo procedimental	X		
3	Determinación de sistemas de representación	X		
4	Análisis Fenomenológico	X		
5	Planteamiento de Objetivos de Aprendizaje		X	
6	Listado de capacidades		X	
7	Listado de dificultades y errores		X	
8	Determinación de materiales y recursos			X
9	Determinación de las actuaciones del profesor			X
10	Determinación del papel de los estudiantes			
11	Diseño de tareas			X
12	Caminos de aprendizaje para cada una de las tareas		X	
13	Implementación de propuesta de instrucción			X

**Tabla 1. Relación de actividades del proyecto con las componentes del modelo de análisis didáctico**

### DESARROLLO DE LA PROPUESTA

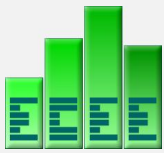
Como resultado del análisis de contenido se establecen los siguientes elementos de razonamiento probabilístico: comparación de probabilidades, aleatoriedad, tablas de distribución de frecuencias, espacio muestral, eventos, cálculo de probabilidades, gráficos estadísticos y convergencia estocástica; constituyéndose estos elementos en aspectos de contenido que se tratan en la propuesta de instrucción.

En el análisis cognitivo se plantean tres objetivos de aprendizaje a saber: 1. Calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos bajo los enfoques intuitivo, frecuencial y clásico, 2. Reconocer la aplicabilidad de los enfoques de probabilidad en diversas situaciones de incertidumbre, 3. Contrastar creencias e intuiciones antes situaciones de incertidumbre frente a los resultados obtenidos a partir de los tres enfoques descritos. Además, se establecen un conjunto de capacidades a desarrollar en los estudiantes, las cuales se relacionan con los objetivos descritos. Dichas capacidades se clasifican desde los campos procedimental y conceptual. Posteriormente se identifican errores y dificultades organizados en las siguientes categorías: heurísticas y sesgos, matemáticos, probabilísticos, estadísticos y de carácter general.

Con el desarrollo del análisis de instrucción se diseñan cuatro tareas que se denominaron: travesía del río, laberintos, aparato de galton y quinielas, las cuales esbozan un camino de aprendizaje que pretende acercar a los estudiantes en la construcción de los elementos de razonamiento probabilístico. A continuación se presenta la descripción de dichas tareas.

Con la tarea ‘Travesía del río’, los estudiantes aplican los conceptos básicos de probabilidad a través de la realización de un experimento aleatorio simple (juego de tablero) bajo los enfoques intuitivo, clásico y frecuencial.

En la realización de la tarea ‘Laberintos’, los estudiantes utilizan conceptos probabilísticos en un experimento compuesto (laberinto) bajo los enfoques intuitivo, clásico y frecuencial. En el enfoque clásico se trabajan el principio de la multiplicación



para el cálculo de probabilidades de eventos simples y el principio de la suma para el cálculo de probabilidades de eventos compuestos.

En el desarrollo de la tarea 'Aparato de Galton', los estudiantes emplean el enfoque clásico y frecuencial de la probabilidad en un experimento compuesto, utilizando un aplicativo que simula el funcionamiento de un aparato de Galton. Con esta tarea, los estudiantes verifican la convergencia de las frecuencias relativas hacia las frecuencias teóricas del experimento incrementando el número de ensayos.

En la última tarea titulada 'Quinielas', se busca que los estudiantes establezcan distribuciones de probabilidad de un juego de apuestas a partir de la opinión de varios clientes de un casino aplicando el enfoque intuitivo, posteriormente se contrastan con los resultados obtenidos bajo el enfoque frecuencial a partir de la realización de dos corridas de diferente tamaño. Los elementos de razonamiento probabilístico se relacionan con las tareas que conforman la propuesta de instrucción en la tabla 2.

ELEMENTO DE RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO		TAREA			
		Travesía del río	Laberintos	Aparato de Galton	Quinielas
	Comparación de probabilidades	X	X	X	X
	Aleatoriedad		X		
	Tablas de frecuencia	X	X	X	X
	Espacio muestral		X		X
	Eventos	X	X		
	Cálculo de probabilidades	X	X	X	X
	Gráficos estadísticos	X			
	Convergencia estocástica			X	X

Tabla 2. Relación de elementos de razonamiento y tareas

Las tareas que hacen parte de la propuesta de instrucción se podrán consultar en el trabajo de Romero y Vergara (en preparación).

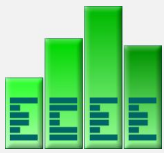
## CONCLUSIONES

En este apartado se comentan los principales resultados surgidas al realizar análisis de la implementación de la propuesta de enseñanza.

Los estudiantes mostraron mayor dificultad en el análisis y obtención de probabilidades bajo el enfoque clásico, en contraste con los enfoques intuitivos y frecuencial, especialmente en experimentos compuestos, al detectarse las mayores dificultades en la determinación del espacio muestral y el cálculo de las probabilidades de eventos.

La aplicación del enfoque frecuencial a través de la experimentación directa con los materiales y recursos empleados en las situaciones de azar (juegos de tablero, laberintos, aparato de Galton), es el punto de partida que permite al estudiante el desarrollo de intuiciones más elaboradas con el empleo de los principios probabilísticos a partir de sus intuiciones iniciales.

El tiempo empleado para el desarrollo de estas tareas no fue suficiente, siendo necesario abordar algunas de ellas en un tiempo mayor al previsto; quedando abierta



la posibilidad de replantear la gestión y la secuenciación de la propuesta de instrucción.

A la mayoría de los estudiantes analizados se les dificulta la resolución de las situaciones, al están habituados a la ejercitación algorítmica en lugar de proponer alternativas de solución a partir de la información dada. Lo anterior, destaca la importancia de enfrentar a los estudiantes con más frecuencia a este tipo de tareas con el fin de desarrollar en ellos razonamiento probabilístico.

La organización de la información en tablas de frecuencia permite que los estudiantes registren y comparen los valores de probabilidad bajo los tres enfoques; relacionando así los conceptos de frecuencia relativa y probabilidad.

### REFERENCIAS

- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío probabilístico. En *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Sociedad de Educación Matemática Thales.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación básica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática - RELIME*, 247-263.
- Biggs, J. y Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.
- Cañizares, J. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, 99-114.
- Díaz, C. (2003). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la estadística. Trabajo presentado en el 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, (pp. 1-11). Lleida.
- Flóres, P., Gómez, P. y Marín, A. (2013). Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 del MAD. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada: Universidad de Granada.
- Lavalle, A.L., Micheli, E.B. y Boché, S. (s.f.). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos de profesorado en matemáticas. Neuquén, Argentina: Universidad Nacional del Comahue.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Áreas obligatorias y fundamentales*. Colombia: Corporativa Editorial Magisterio.
- Romero, J. y Vergara, M. (en preparación). Razonamiento probabilístico en estudiantes de grado undécimo. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Granada: Universidad de Granada.
- Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J., y Cañizares, J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10(1), 7-25.