

DESARROLLO CONCEPTUAL SOBRE LOS ELEMENTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO EN LIBROS DE TEXTO DE NIVEL BÁSICO

Luz Esmeralda Reyes García, Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Universidad Autónoma de Guerrero. (México)

luzes_rega@hotmail.com, flor_rodriguez@uagro.mx

Palabras clave: Libros de texto, geometría, elementos notables, triángulos

Keywords: Textbook, geometric, notable elements, triangles

RESUMEN

En este artículo se presenta un estudio referente al tratamiento de los elementos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico en México. Se utilizó la metodología de análisis de contenido de tal forma que se analizaron definiciones, problemas o ejercicios, representaciones que usan para enseñar dicho contenido, actividades donde se apliquen los conceptos involucrados, entre otras cuestiones. Los resultados indican que el contenido de los elementos notables se inicia en nivel primaria con el concepto de altura, dando su definición y trazo en algunos triángulos, continuando en secundaria el trabajo con la bisectriz, mediatriz, altura y mediana.

ABSTRACT

In this paper, we show a study about the treatment of notable elements of a triangle in basic level textbooks in Mexico. We used content analysis methodology and we analyzed definitions, problems, exercises, representations used to teach this content and activities where they apply the concepts involved, among other issues. Results indicates that the content of notable elements of a triangle starts at basic level with height concept, giving its definition and its draw in some triangles, continuing in high school working with the bisectrix, perpendicular bisectors, altitude and median.

■ Introducción

Los libros de texto son un recurso de alto impacto en el proceso de enseñanza - aprendizaje, se consideran incluso como los materiales curriculares con mayor incidencia en el aprendizaje de los estudiantes dentro y fuera del aula. En ocasiones este material llega a condicionar de forma importante el tipo de enseñanza que se realiza, puesto que muchos enseñantes se apegan al contenido al pie de la letra. A este respecto, (Barrantes y Zapata, 2008) señalan que muchas veces los profesores utilizan al libro como material exclusivo y no otros materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno, lo que puede ocasionar que el estudiante se quede solamente con la información proporcionada en el libro de texto. Sin embargo, se ha reportado que el uso exclusivo de libros de texto, privilegia a que muchos estudiantes se formen concepciones erróneas, investigadores como (Gutiérrez y Jaime, 1996; Azcárate, 1997; Barrantes y Zapata, 2008) han encontrado que en los libros muchas veces suelen presentarse figuras estándar, o un número pequeño de ellas, lo cual conduce al estudiante a formarse ideas equivocadas. Algunos errores causados por esa presentación escasa se dan específicamente en el contenido de los elementos notables del triángulo, como es el hecho de que el triángulo tiene una sola altura o el caso de que se piense que todas las líneas notables son siempre interiores al triángulo.

Por lo anterior, en esta investigación se parte de la idea que algunos errores presentados en ciertos estudiantes pueden ser debido al tratamiento de los conceptos en libros de texto. El objetivo entonces consistió en **realizar un análisis en libros de texto de nivel básico (primaria y secundaria) sobre el contenido elementos notables del triángulo para estudiar su tratamiento**. Nos estamos refiriendo a elementos notables del triángulo al conjunto de conceptos bisectriz, mediatriz, altura, baricentro, incentro y ortocentro y por tratamiento a la forma en que se presentan los conocimientos a enseñar es decir, definiciones, ejercicios, actividades, representaciones, fenomenología. El tema, sin duda, es trascendente para la comprensión de otros contenidos de la geometría y en la solución de problemas de la misma matemática y en sus aplicaciones. Por ejemplo, el concepto de altura es fundamental para determinar el área de figuras geométricas como triángulos, rectángulos, o el volumen de algunos cuerpos geométricos como conos, el concepto de mediana se utiliza cuando se quiere encontrar el centro de gravedad de una figura triangular, por citar algunos.

■ Elementos teórico – metodológicos

Análisis de contenido

El interés por indagar sobre libros de texto es por la importancia que tiene este material en la educación y en particular en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Dentro de las ciencias sociales el análisis de contenido se considera como método de investigación para buscar información en un documento dado.

Para realizar este tipo de análisis se han seguido las fases propuestas en (Cabero y Loscertales, 2002):

- a) **Fase 1. Preanálisis.** En esta fase se identifican y seleccionan los textos, se hace una primera revisión de la literatura y de investigaciones similares sobre la temática de estudio seleccionada y se hace una primera revisión de los textos a utilizar.
- b) **Fase 2. Unidades de análisis.** Constituyen segmentos del contenido de los mensajes que son caracterizados para ubicarlos dentro de las categorías.

- c) **Fase 3. Categorización.** Es una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por analogía, a partir de criterios previamente definidos.
- d) **Fase 4. Inferencia.** Se explica y deduce lo que hay en un texto.

En la **Fase 1**, los libros de texto que se consideraron para nivel primaria corresponden a los ciclos escolares (2011-2012) y (2013-2014) ya que estos libros son los que se utilizaron por las escuelas primarias en el transcurso de la investigación. El criterio para la selección de libros para nivel secundaria radicó en la elaboración de una entrevista a profesores de este nivel que hayan impartido el contenido elementos notables del triángulo, dicha entrevista nos permitió obtener información de las editoriales más usadas por los profesores para la enseñanza del contenido, ya que México cuenta con diferentes editoriales sobre libros de matemáticas. Los libros analizados en el nivel básico corresponden a la reforma 2011, reforma actual en México y son los siguientes:

Libros analizados Nivel Primaria (6-12 años de edad)

- SEP. (2011). Matemáticas. Primer grado. México: DGME/SEP
- SEP. (2011). Matemáticas. Segundo grado. México: DGME/SEP
- SEP. (2011). Matemáticas. Tercer grado. México: DGME/SEP
- SEP. (2011). Matemáticas. Cuarto grado. México: DGME/SEP
- SEP. (2011). Matemáticas. Quinto grado. México: DGME/SEP
- SEP. (2011). Matemáticas. Sexto grado. México: DGME/SEP
- SEP. (2013). Matemáticas. Primer grado. México: DGMIE/SEP
- SEP. (2013). Matemáticas. Segundo grado. México: DGMIE/SEP
- SEP. (2013). Matemáticas. Tercer grado. México: DGMIE/SEP
- SEP. (2013). Matemáticas. Cuarto grado. México: DGMIE/SEP
- SEP. (2013). Matemáticas. Quinto grado. México: DGMIE/SEP
- SEP. (2013). Matemáticas. Sexto grado. México: DGMIE/SEP
- Amador, M. E., Olivares, M. G. y San Agustín, R. B. (2011). *Matemáticas 2*. México: Ediciones sm. (L2E1)
- Escareño, F. y López, O. L. (2013). *Matemáticas 1*. México: Trillas. (L1E2)
- Escareño, F. y López, O. L. (2013). *Matemáticas 2*. México: Trillas. (L2E2)
- Escareño, F. y López, O. L. (2013). *Matemáticas 3*. México: Trillas. (L3E2)
- Espinoza, H., Ponce, J.C. y Reyes, A. V. (2011). *Matemáticas 1*. México: Ediciones sm. (L1E1)
- Nebbia, C. F. (2011). *Matemáticas 3*. México: Ediciones sm. (L3E1)
- Sánchez, F. (2012). *Matemáticas 1*. México: Fernández Educación. (L1E3)
- Sánchez, F. (2012). *Matemáticas 2*. México: Fernández Educación. (L2E3)
- Sánchez, F. (2012). *Matemáticas 3*. México: Fernández Educación. (L3E3)

Libros analizados Nivel Secundaria (12-15 años de edad)

En el transcurso de la investigación se mencionará (L1E1) que significa Libro de primer grado de la editorial uno. De tal forma que si se tiene L3E2, significa que nos referimos al Libro de tercer grado de la editorial dos.

Por otra parte, la revisión de literatura y una primera exploración en los libros, permitieron conformar las categorías y unidades de análisis utilizadas en esta investigación (**Fase 2 y 3**), por lo que el análisis de libros se hizo a través de tres categorías que son: Análisis Conceptual, Tipos de Representación y Análisis Fenomenológico.

La Tabla 1, resume detalladamente las categorías y unidades de análisis utilizadas.

Tabla 1. Categorías y unidades de análisis utilizadas para el análisis de libros

Categorías	Unidades de análisis	Descripción general de los propósitos
Análisis conceptual	<ul style="list-style-type: none"> • Cómo se introduce el concepto. • Cómo se define. • Qué tipo de ejemplos, ejercicios o problemas son los que se usan para explicar los conceptos de altura, mediana, bisectriz y mediatriz. • Actividades de retroalimentación. 	Modo de introducción, definición y organización del concepto, tipo, función y niveles de complejidad de los problemas, actividades, ejercicios y si estos permiten comprender un concepto, relacionado a alguna recta o punto notable del triángulo.
Tipos de representación	<ul style="list-style-type: none"> • Geométrico. • Simbólico. 	Tipo de representación utilizada, para la enseñanza-aprendizaje del tema.
Análisis fenomenológico	<ul style="list-style-type: none"> • En torno a la matemática misma. • Fenómenos de la vida diaria. 	La finalidad es mostrar qué aplicabilidad tienen cada uno de los conceptos considerados.

Resultados (Fase 4)

Nivel Primaria

Análisis conceptual

Después de hacer el análisis en los libros de primaria en las dos ediciones se encuentra que únicamente se trabaja el concepto *altura de un triángulo*. Éste se introduce a partir de tercer grado mediante ángulos rectos, los cuales se representan por medio de giros, se menciona que un cuarto de giro representa un ángulo recto. Con ello se dan algunas ideas de lo que es perpendicularidad. En cuarto grado se continúa con el trabajo de rectas perpendiculares. En quinto grado aparece el concepto altura, y se define como *la menor distancia que hay entre un vértice y su lado opuesto o la prolongación de éste*. Sin embargo, en nuestra opinión consideramos pertinente que esta definición tenga relación con el concepto de recta perpendicular ya que este concepto se trabaja antes del concepto altura. Como ejercicios se enfatiza en el trazo de una sola altura en triángulos acutángulos y obtusángulos, dejando de lado el trazo de las tres alturas. En sexto grado se trabaja con rectas perpendiculares.

Tipo de representación

La representación encontrada para abordar el concepto de altura es la geométrica (ver Figura 1). Las aplicaciones se enfocan a la resolución de problemas de la misma matemática, tal es el caso de determinar áreas de figuras geométricas, por ejemplo triángulos.

Figura 1. Representación de la recta altura en nivel primaria



Análisis fenomenológico

Las aplicaciones se enfocan a la resolución de problemas de la misma matemática, tal es el caso de determinar áreas de figuras geométricas, por ejemplo triángulos.

Nivel Secundaria

Análisis conceptual

En este nivel los elementos notables del triángulo se trabajan en primer grado tal y como lo establece el plan y programa de estudios 2011. Con respecto al concepto altura, en este nivel se menciona que la altura de un triángulo se obtiene trazando una perpendicular que pase por un vértice y el lado opuesto a ese vértice, aunque aquí no se diga una definición explícita observamos que la definición de altura tiene relación con lo que es una recta perpendicular, sin embargo, en nivel primaria este concepto se define como la menor distancia que hay entre un vértice y su lado opuesto o prolongación de éste, por lo que se observa un cambio en la definición de este concepto en los dos niveles.

Las actividades que se proponen en algunos libros como el (L1E1) y (L1E2) es su trazo en triángulos equiláteros, escalenos, rectángulos, isósceles, acutángulos, obtusángulos, sin embargo, en el libro (L1E3) se pide únicamente el trazo de la altura en triángulos acutángulos.

El libro (L1E1) hace preguntas como ¿En qué triángulos las dos alturas coincidieron con los lados? ¿En cuáles triángulos las alturas se cortaron en un sólo punto? ¿En qué triángulos las alturas se intersecan siempre dentro, en uno de los vértices y fuera de la figura?, lo cual en nuestra opinión podría hacer que los estudiantes reflexionen sobre lo que sucede con la altura en los diferentes tipos de triángulos. Los libros analizados mencionan que las tres alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado ortocentro. Se observa que la presentación de triángulos es casi siempre con base horizontal, lo cual hace que muchas veces los estudiantes no sean capaces de trazar las alturas en triángulos con base no horizontal.

Con respecto al concepto mediatriz, todos los libros coinciden en iniciar su trabajo haciendo la construcción de la mediatriz de un segmento, con ello y haciendo algunas preguntas orientadoras se espera que los estudiantes descubran la propiedad que la caracteriza. Posteriormente la definen como *la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio*. Los ejercicios que se plantean son el

trazo de mediatrices en triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Se menciona que las mediatrices de los tres lados del triángulo se intersectan en un punto llamado circuncentro.

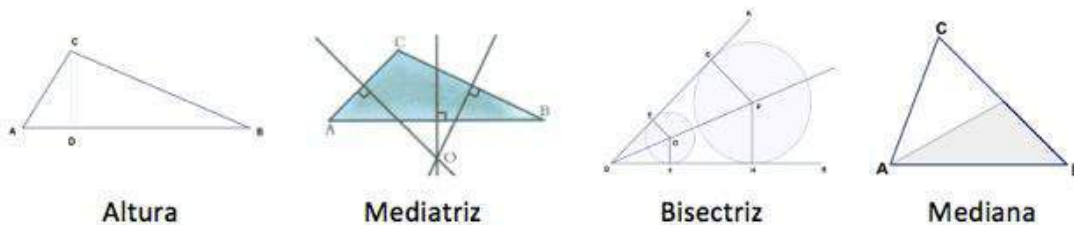
En relación al concepto bisectriz, al igual que la recta mediatriz, se introduce a partir de la construcción de ella en algunos ángulos, posteriormente se enuncia que *es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales*, además que *si un punto está sobre la bisectriz, entonces ese punto está a la misma distancia de cada uno de los lados del ángulo*. Diferentes autores no coinciden en que la bisectriz es una recta sino que la definen como semirrecta tal es el caso de Godino J. (2002) que la define como la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales, por lo que en los libros analizados se encuentran en varias ocasiones errores conceptuales de los conceptos analizados.

En todos los libros se proponen como ejercicios trazar la bisectriz de algunos ángulos y en triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Mencionan que en cualquier triángulo las bisectrices se cortan en un punto llamado incentro.

Sobre el concepto de mediana, la mayoría de libros proponen su estudio utilizando material tangible como madera y cartulina para encontrar el baricentro. Los distintos libros definen a la mediana de un triángulo como *el segmento que va del punto medio de un lado al vértice opuesto*.

Tipos de representación

Para todos los conceptos la representación encontrada es la geométrica, solamente para los conceptos de bisectriz y mediatriz se encuentra también la representación simbólica. A continuación se muestran algunas representaciones de los elementos notables del triángulo encontradas en los libros analizados.



Análisis fenomenológico

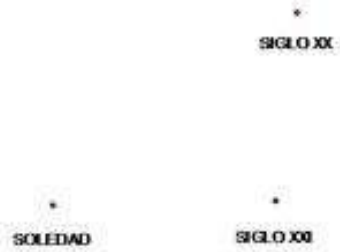
- Altura

Se encuentra aplicabilidad en la matemática misma para determinar áreas de figuras geométricas y algunas relacionadas a la vida cotidiana para encontrar alturas de edificios o personas.

- Mediatriz

Las aplicaciones en torno a la misma matemática, tienen que ver con el caso de trazar una circunferencia teniendo tres puntos no colineales y con respecto a la vida cotidiana como el siguiente ejemplo: *Un comerciante quiere poner una gasolinera que se encuentre a la misma distancia de tres pueblos*. ¿Dónde debe poner la gasolinera? En el siguiente diagrama se representan los pueblos, Figura 2.

Figura 2. Representación de tres puntos considerados como pueblos para el problema empleado



Situaciones similares con respecto a la vida cotidiana se encuentran en los libros (L1E2 y L1E3).

- Bisectriz

Se encuentra aplicabilidad en la misma y en la vida cotidiana, tal es el caso de repartir un pedazo de pastel en dos partes iguales.

- Mediana

Es el único concepto del que no se encuentra aplicabilidad en la misma matemática o en la vida cotidiana.

■ Conclusiones

En nivel primaria, únicamente se trabaja el concepto altura, el cual se define como la menor distancia que hay entre un vértice y el lado opuesto a éste o su prolongación, sin embargo, en el análisis realizado se observa, que antes de esta definición se trata el concepto de recta perpendicular, por lo que se considera pertinente que la definición de altura de un triángulo dada en este nivel, tenga relación con el concepto perpendicular y así los estudiantes tendrían elementos de vinculación entre los conceptos menor distancia y perpendicularidad, y la vinculación de conceptos sin duda es, un elemento para favorecer la comprensión de éstos. Por otra parte, los ejercicios propuestos quedan a un nivel de reproducción, los cuales tienen una solución inmediata apoyándose de los ejemplos dados en el mismo libro, se considera necesario la propuesta de actividades donde se tracen las tres alturas en los diferentes tipos de triángulos y con base no horizontal, ya que las actividades encontradas en los libros de texto tienden a construir únicamente una altura en triángulos acutángulos y obtusángulos con base horizontal, y aunque en nuestra opinión, el trazado de una sola altura pueda deberse a la utilidad que tiene esta recta para determinar áreas o volúmenes de figuras o cuerpos geométricos y donde se utiliza únicamente una altura, creemos que si se presenta una sola altura puede generar ideas equivocadas en los estudiantes al creer que el triángulo tiene una sola altura, es por ello, que se considera necesario el trazo de las tres alturas. La representación encontrada para la altura es la geométrica, consideramos que para nivel primaria esta representación es adecuada, no obstante, se debieran considerar más representaciones como la simbólica por ejemplo.

En nivel secundaria al igual que en nivel primaria, se prioriza el trabajo de estos conceptos en triángulos acutángulos y obtusángulos con base horizontal, consideramos que esta forma de presentación puede generar representaciones prototípicas de dichos triángulos olvidando así otras representaciones de triángulos en distinta posición. Por ello, se necesitan implementar actividades donde se planteen determinar las alturas en triángulos con distinta posición. Por otro lado, se necesitan reforzar actividades donde el estudiante explore las propiedades de los elementos notables, ya que hay libros de los analizados que solamente las enuncian sin dejar al estudiante experimentar estas situaciones.

Del análisis realizado, podemos decir que la falta de representaciones está presente tanto en nivel primaria como en nivel secundaria, por tanto, observamos que en libros mexicanos se encuentra presente una escasa representación de figuras.

Observamos que parte del trabajo de este contenido en los libros de texto, puede favorecer a los errores que cometen algunos estudiantes como por ejemplo que estén acostumbrados a trabajar con triángulos con base horizontal y no sean capaces de realizar los trazos en triángulos con distinta posición o en creer que el triángulo tiene una sola altura.

Por otra parte, aunque no todas las escuelas de México cuentan con el equipamiento de computadoras, se sugiere que dentro del libro de texto se debe proponer utilizar otros materiales como software o material tangible, que permiten trabajar este contenido de una manera dinámica y constructiva descubriendo sus propiedades con el fin de que la tecnología complementa dentro o fuera de clases los conocimientos de estos conceptos. Sin embargo, se debe tener cuidado de que la persona que utilice los programas informáticos para la enseñanza de cualquier concepto matemático, comprenda bien el uso de esta tecnología, ya que si esa persona no le da un buen uso, puede afectar el aprendizaje de los estudiantes.

■ Referencias bibliográficas

- Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Revista sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 25, 23-30.
- Barrantes, M. y Zapata, M. A. (2008). Obstáculos y Errores en la Enseñanza-Aprendizaje de las Figuras Geométricas. *Campo Abierto*, 27 (1), 55-71.
- Godino, J. y Ruiz, F. (2002). *Geometría y su Didáctica para Maestros. Manual para el estudiante*. Departamento de Didáctica de la Matemática. En <http://www.ugr.es/~jgodino/>
- Cabero, J. y Loscertales, F. (2002). *Elaboración de un sistema categorial de análisis de contenido para analizar la imagen del profesor y la enseñanza en la prensa*. Universidad de Sevilla. Grupo de tecnología Educativa. p. 1-25. En <http://tecnologiaedu.us.es/revistaslibros/ANALISIS.htm>
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S. y Sánchez, M.V. (Eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. 145-169: Granada: Ed. Comares.
- SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica secundaria. Guía para el maestro*. México.