

UN ACERCAMIENTO DINÁMICO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE FENÓMENOS DE VARIACIÓN

Juan Carlos Torres F., Hugo Rogelio Mejía V.

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
jctorres@cinvestav.mx, hmejia@cinvestav.mx

Palabras clave: función, variación, covariación, múltiples representaciones

Key words: function, variation, covariation, multiple representations

RESUMEN

Muchas investigaciones se han realizado acerca del concepto de función; sin embargo, las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de dicho concepto siguen latentes. Recientemente, ha crecido la idea de que un *acercamiento covariacional* proporciona un primer paso importante hacia una comprensión más profunda del concepto de función. En este sentido, se reporta un estudio realizado con estudiantes universitarios de nuevo ingreso, a los cuales se les propuso una secuencia de actividades que involucraba situaciones variacionales dentro de un contexto de movimiento. Dichas actividades estaban centradas en *interpretar* o *representar* las situaciones planteadas partiendo de un análisis cualitativo o cuantitativo de las mismas; también se promovió en las actividades el uso simultáneo de diferentes representaciones de una función (verbal, gráfica, tabular y algebraica) para establecer relaciones entre ellas. De esta manera, se buscó propiciar que los estudiantes se aproximaran al concepto de función de una forma dinámica mediante el *análisis del cambio*.

ABSTRACT

Much research has been done about the concept of function; however, the difficulties in its teaching and learning remain latent. Recently, it has grown the idea that a *covariational approach* provides an important first-step towards a deeper understanding of the concept of function. In this sense, we realized a study with first-year university students in which a sequence of activities that involving variational situations in a context of motion was proposed. Such activities were focused on *interpreting* or *representing* the proposed situations starting from a qualitative or quantitative analysis of them; in the activities also was promoted a simultaneous use of different representations of a function (verbal, graphical, tabular and algebraic) to establish relationships between them. Thereby, we fostered the approach to the concept of function in a dynamic way via the *analysis of change*.

■ Introducción

Desde finales del siglo XIX se ha incrementado el énfasis sobre funciones en la currícula escolar; por ejemplo, dentro de los contenidos propuestos en la enseñanza de las matemáticas de bachillerato por el *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM, 2000), el estudio del concepto de función es considerado como una parte central del currículo. La importancia de este concepto está relacionada con la relevancia del estudio de situaciones que involucran variación y cambio en áreas avanzadas de las matemáticas, y en el rol que juega dentro de la modelización matemática que es requerida en campos científicos y tecnológicos. Al respecto, Carlson y Oehrtman (2005) comentan que contenidos avanzados como los estudiados en el cálculo diferencial e integral, no pueden ser entendidos sin una comprensión de conceptos básicos como el de función.

No obstante, aunque en el currículo matemático el concepto de función está presente desde el álgebra hasta el cálculo, diversos trabajos de investigación han documentado que estudiantes de alto rendimiento de precálculo, e incluso estudiantes de cálculo, tienen dificultades al resolver problemas en los que se les pide razonar sobre las relaciones entre cantidades que están cambiando conjuntamente (Carlson, 1998; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Carlson y Oehrtman, 2005). Asimismo, estos estudios sugieren que el currículum de matemáticas de bachillerato y su correspondiente instrucción, necesitan un mayor enfoque en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes para construir y formalizar relaciones entre cantidades que varían de manera conjunta.

Estas dificultades residen, principalmente, en el acercamiento de correspondencia con el que se abordan los problemas de variación. Se entiende por *acercamiento de correspondencia*, a la asignación de un conjunto de valores con otro mediante la regla $y=f(x)$ que determina valores de salida a partir de valores de entrada (Confrey y Smith, 1994). Este acercamiento lleva a un uso frecuente de representaciones algebraicas y a una imagen “estática” del concepto de función (Kaput, 1994). Es decir, los estudiantes ven a la función como una simple fórmula y no lo que ella en realidad representa.

Confrey y Smith (1994) destacan también un acercamiento llamado “covariacional” para el desarrollo del concepto de función, que resulta ser una aproximación más intuitiva en comparación con el acercamiento de correspondencia. Esto es, cuando se toma una *perspectiva covariacional*, no se pone especial atención a la regla que relaciona x con $f(x)$, en lugar de ello, se examina la coordinación de dos columnas de datos; es decir, cómo los cambios en una variable se relacionan con los cambios en la otra variable. A este respecto, Cooney, Beckmann y Lloyd (2010) recomiendan estudiar el concepto de función como la *covariación* de los valores de entrada con los valores de salida; además comentan que el acercamiento covariacional es esencial para entender el concepto de tasa de cambio, la cual puede ser interpretada como una forma de cuantificar la idea de covariación.

En este sentido, investigaciones recientes defienden la introducción temprana del estudio de la variación en el currículum como un punto de entrada al pensamiento sobre funciones (Carlson, Oehrtman y Engelke, 2010; Hitt y Morasse, 2009), con especial énfasis en el análisis del cambio, en las relaciones entre cantidades y en las maneras de representar matemáticamente esas relaciones. Esta idea de centrarse en la variación para aproximarnos al concepto de función, adquiere importancia por su implicación en el estudio de otros conceptos matemáticos más complejos que se relacionan

directamente con el cálculo, por ejemplo, la tasa de cambio. Esto motivó a que en el trabajo de investigación que aquí se reporta, se buscara promover un *acercamiento dinámico* al concepto de función al interpretar o representar fenómenos de variación mediante un análisis cualitativo o cuantitativo de gráficas, descripciones verbales, tablas y expresiones algebraicas, tomando como base una perspectiva covariacional.

■ Elementos teóricos: marco covariacional

Carlson et al. (2002) establecen la noción de *razonamiento covariacional* y proponen un marco teórico para describir las *acciones mentales* involucradas al aplicar este tipo de razonamiento cuando se interpretan y representan eventos funcionales dinámicos; los autores definen razonamiento covariacional, como aquellas actividades cognitivas involucradas en coordinar dos cantidades que varían conjuntamente, mientras se observa la manera en la cual cambia una cantidad con relación a la otra.

Las acciones mentales del marco covariacional proporcionan un medio para clasificar las conductas que son exhibidas por los estudiantes mientras éstos se involucran en actividades de covariación; y la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo sobre una actividad en particular, sólo puede determinarse mediante la examinación del conjunto de conductas y acciones mentales que fueron exhibidas mientras se respondía a dicha actividad (Carlson et al., 2002).

Una descripción de las primeras tres acciones mentales, y los comportamientos asociados a cada una de ellas, se resumen a continuación (Figura 1). Únicamente se enlistan las que fueron consideradas en nuestro estudio.

Figura 1. Acciones mentales 1, 2 y 3 del razonamiento covariacional.

Acción mental	Descripción	Comportamientos
Acción Mental 1 (MA1)	Coordinar la <i>dependencia</i> de una variable sobre la otra variable.	<ul style="list-style-type: none"> Etiquetar los ejes con indicaciones verbales de coordinación de dos variables (<i>y</i> cambia con cambios en <i>x</i>).
Acción Mental 2 (MA2)	Coordinar la <i>dirección de cambio</i> de una variable con los cambios en la otra variable.	<ul style="list-style-type: none"> Construir una línea recta creciente o decreciente. Verbalizar el conocimiento de la dirección de cambio de la variable de salida mientras considera los cambios en la variable de entrada.
Acción Mental 3 (MA3)	Coordinar la <i>cantidad de cambio</i> de una variable con los cambios en la otra variable.	<ul style="list-style-type: none"> Trazar puntos/construir líneas secantes. Verbalizar el conocimiento de la cantidad de cambio de la variable de salida mientras considera los cambios en la variable de entrada.

Por otra parte, un estudiante recibe un *nivel* de clasificación de acuerdo a la imagen que, en general, parece respaldar las diversas acciones mentales que el estudiante exhibió en el contexto de un problema o actividad. Carlson et al. (2002) señalan que la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, ha alcanzado un nivel de desarrollo específico, cuando este nivel respalda las acciones mentales asociadas a él, así como las acciones mentales asociadas a cada uno de los niveles inferiores. A este respecto, en seguida se muestran los tres primeros niveles que contempla el marco covariacional (Figura 2), los cuales están asociados a las tres acciones mentales descritas anteriormente.

Figura 2. Niveles de razonamiento covariacional 1, 2 y 3.

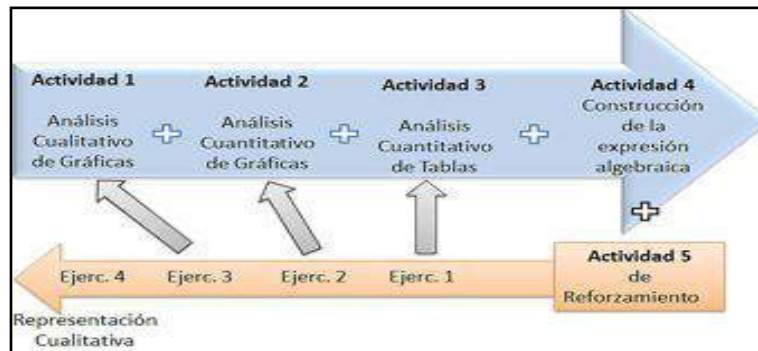
Niveles de Razonamiento Covariacional	
Nivel 1 (L1). <i>Coordinación</i>	La imagen de covariación respalda la acción mental de coordinar el cambio de una variable con los cambios de la otra variable (MA1).
Nivel 2 (L2). <i>Dirección</i>	La imagen de covariación respalda la acción mental de coordinar la dirección de cambio de una variable con los cambios en la otra variable (MA2 y MA1).
Nivel 3 (L3). <i>Coordinación cuantitativa</i>	La imagen de covariación respalda la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable (MA3, MA2 y MA1).

Este marco covariacional fue empleado en nuestro estudio como una herramienta analítica que nos permitió evaluar el pensamiento covariacional de los estudiantes; asimismo, nos proporcionó una estructura y un lenguaje para clasificar el pensamiento covariacional en el contexto de la respuesta a un problema específico, y para describir la habilidad de razonamiento covariacional en general de un estudiante.

■ Componentes y procedimientos metodológicos

Diseño de la secuencia de actividades. La secuencia de actividades que se les presentó a los estudiantes estuvo conformada por un conjunto de cinco actividades (Figura 3). Las actividades 1, 2, 3 y 4 fueron una adecuación de la propuesta de Van Dyke (2003), quien señala que los estudiantes comprenden mejor las funciones cuando éstas son introducidas siguiendo la secuencia: Gráficas cualitativas → Gráficas cuantitativas → Tablas → Ecuaciones.

Tabla 2. Resumen de las observaciones y análisis del problema 4 del Examen de Cierre.



El contexto sobre el cual se desarrollaron las actividades es el de observar la “variación de la distancia entre dos objetos respecto al tiempo”, esto bajo el supuesto de que un grupo de estudiantes y su profesor acuden a un parque de diversiones donde experimentan diversas situaciones (Figura 4); por lo tanto, se requirió que los participantes del estudio imaginaran físicamente tales situaciones a partir de su experiencia diaria.

Figura 4. Fragmento de la actividad inicial.



Con la finalidad de conocer la habilidad de los estudiantes para razonar sobre cantidades que cavarían en situaciones dinámicas, las actividades propuestas requerían que los participantes del estudio realizaran un análisis cualitativo o cuantitativo de las situaciones planteadas a través de acciones como el de representar e interpretar (Figuras 5 y 6), y en las mismas se hacía uso de diversas representaciones de una función como descripciones verbales, gráficas, tablas y expresiones algebraicas.

Figura 5. Ejemplo de un análisis cualitativo y la acción de interpretar.

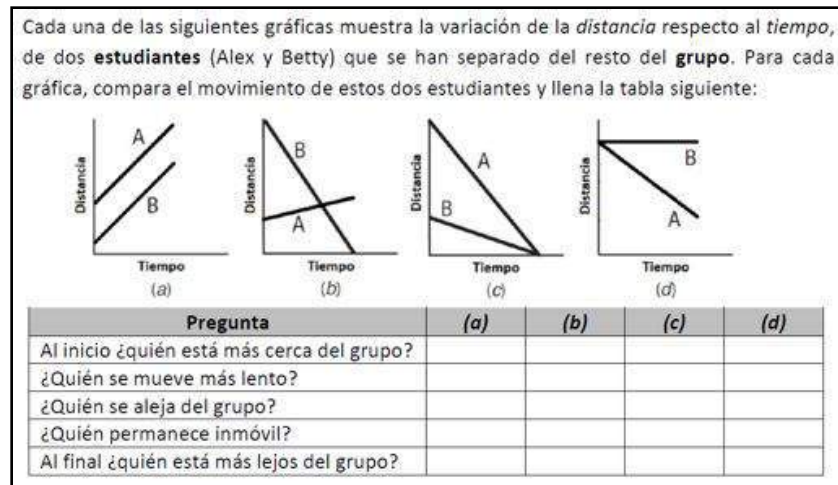


Figura 6. Ejemplo de un análisis cuantitativo y la acción de representar.

Construye una gráfica para cada uno de los incisos siguientes, los cuales describen el movimiento de dos **estudiantes** (Ana y Mario) respecto al resto del **grupo**:

- Ana** se encuentra alejada 15 metros del **grupo**, avanza hacia ellos a una velocidad constante de 3 metros por segundo, permanece con ellos durante 6 segundos y después se aleja a una velocidad constante de 2 metros por segundo, llegando a su destino en 6 segundos.
- Mario** se encuentra a 9 metros del **grupo** y decide alejarse más a una velocidad constante de 1.5 metros por segundo, deteniéndose 4 segundos después; finalmente, va hacia ellos a una velocidad constante de 5 metros por segundo.

Los participantes y la implementación de las actividades. El estudio se llevó a cabo con la participación de diez estudiantes que habían iniciado su primer semestre de licenciatura y la secuencia de actividades descrita se desarrolló en cinco sesiones, cada una con una duración de dos horas, a lo largo de cinco días consecutivos (una actividad diaria). Todas las actividades fueron contestadas de manera individual y el papel que jugó el profesor-investigador fue el de guiar la secuencia y durante el desarrollo de las actividades, éste se desempeñó como consultor de dudas y observador. En el estudio se empleó el método de observación y como instrumento de recolección de datos, se usaron las hojas de trabajo de los estudiantes (respuestas a la secuencia de actividades) y las notas del investigador (observaciones).

■ Análisis de los resultados

Los estudiantes mostraron dificultades a lo largo de toda la secuencia de actividades para identificar: cómo es la distancia entre los objetos al comienzo (si están juntos o separados), cómo se mueve un objeto respecto al otro (si se acerca, se aleja, o permanece inmóvil), y qué tan rápido se mueve el objeto; aspectos considerados “clave” y que están asociados al contexto de la actividad, los cuales son fundamentales para establecer conexiones entre las representaciones utilizadas.

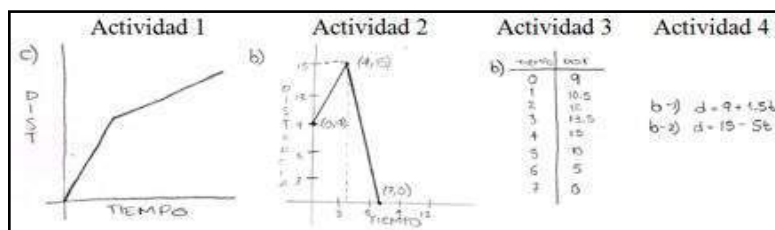
Al analizar e interpretar los resultados obtenidos de acuerdo con el marco covariacional propuesto por Carlson et al. (2002), se pudieron identificar las primeras tres acciones mentales que contempla el marco. En la figura 7 se muestra el número de estudiantes (de los 10 que conformaban el grupo) que exhibieron alguna de las conductas asociadas a cada acción mental en sus respuestas a determinados ejercicios.

Figura 7. Cantidad de estudiantes que exhibieron las acciones mentales.

	Actividad 1 Ejercicio: 4 y 6	Actividad 2 Ejercicio: 3 y 6	Actividad 3 Ejercicio: 3, 4 y 5	Actividad 4 Ejercicio: 6 y 7
Acción Mental 1 (MA1)	7/10	7/10	10/10	10/10
Acción Mental 2 (MA2)	1/10	5/10	7/10	8/10
Acción Mental 3 (MA3)	-----	4/10	7/10	7/10

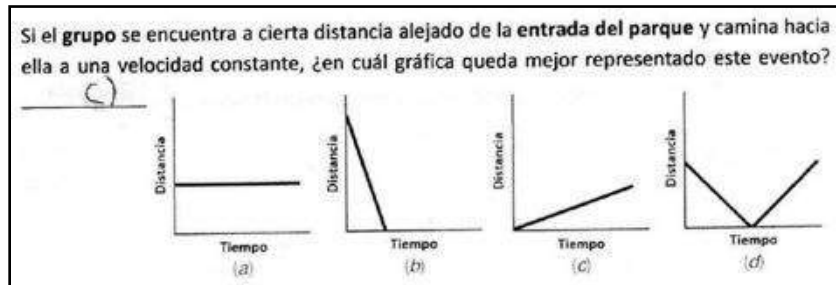
Respecto a la *acción mental 1* (MA1), se identificó que la mayoría de los estudiantes la desarrollaron sin complicaciones pues de entrada se les dio a conocer que se trataba de la variación de la distancia entre dos objetos respecto al tiempo, lo cual derivó en que los estudiantes no tuvieran dificultades para reconocer cuáles eran las variables involucradas en el problema y entender que el valor de una de ellas (distancia) cambiaba con relación a los cambios en la otra (tiempo); por lo que la MA1 se pudo observar en las gráficas, tablas y expresiones algebraicas propuestas por los estudiantes universitarios (Figura 8).

Figura 8. Respuestas dadas por Julia en diferentes momentos de la secuencia de actividades.



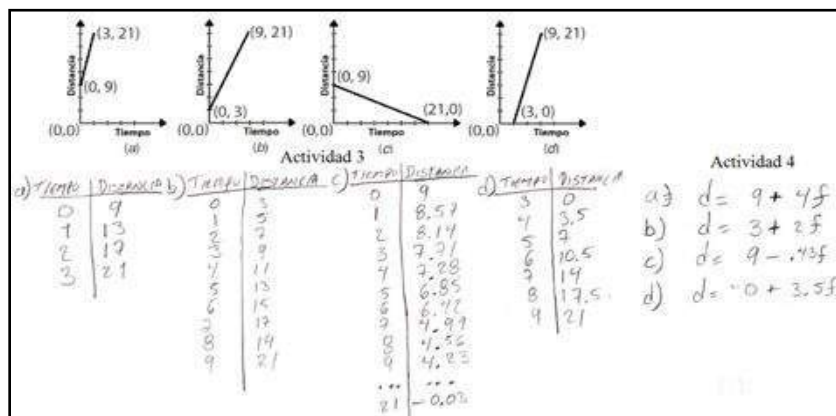
Sobre la *acción mental 2* (MA2), al inicio de la secuencia de actividades únicamente un estudiante logró exhibirla; no obstante, en el transcurso de las demás actividades se fueron sumando, de manera gradual, más estudiantes que mostraron un desarrollo de la MA2. Pues la mayoría de los estudiantes al comienzo tuvieron dificultades para identificar la dirección de cambio de la variable distancia respecto a los cambios en la variable tiempo (Figura 9); lo cual estaba estrechamente relacionado con el hecho de que el objeto en movimiento se acercara o se alejara del otro.

Figura 9. Ejercicio en el cual todos los estudiantes dieron como respuesta la opción (c).



Por su parte, la *acción mental 3* (MA3), relacionada con coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable, sólo podía observarse en las actividades 2, 3 y 4 ya que aquí aparecía y tomaba un papel importante la velocidad de movimiento del objeto. Al respecto, se pudo identificar que fueron pocos los estudiantes que a lo largo de las tres actividades mostraron un desarrollo de la MA3, es decir, aquéllos que fueron capaces de determinar cuánto cambiaba la distancia mientras cambiaba el tiempo (Figura 10); pues la mayor parte del grupo tuvo dificultades para representar la velocidad de movimiento del objeto en cada una de las representaciones solicitadas.

Figura 10. Respuestas dadas por Roberto en diferentes momentos de la secuencia de actividades.



Finalmente, de acuerdo a lo establecido por Carlson et al. (2002) en el marco covariacional y con base en las acciones mentales identificadas en las actividades, podemos concluir de manera general que los 10 estudiantes alcanzaron el nivel de *coordinación* (L1), 8 de ellos alcanzaron el nivel de *dirección* (L2), y de éstos, sólo 7 estudiantes lograron llegar al nivel de *coordinación cuantitativa* (L3).

■ Conclusiones

Los estudiantes universitarios exhibieron una serie de dificultades que se acentuaron más en las actividades de tipo cualitativo y que se vieron disminuidas en las actividades de tipo cuantitativo –tanto en las tareas de representación como en las de interpretación–, esto derivó en una fuerte problemática para establecer las relaciones funcionales que dieran sentido a la relación entre las variables involucradas (distancia y tiempo).

La secuencia de actividades presentaba una propuesta de trabajo que consistía en ir adjuntando y articulando las distintas representaciones de una función; esto tenía cierta intencionalidad, la cual permitió observar en los resultados del estudio, que la idea que los estudiantes tienen sobre función es muy limitada, pues éstos mostraron dificultades para relacionar y determinar conexiones entre las representaciones utilizadas. Sin embargo, los resultados muestran que la secuencia de actividades modificó el entendimiento de los estudiantes sobre función; esto es, al proponerle ver a la función como una relación entre dos cantidades que varían conjuntamente y ver a la fórmula (expresión algebraica) como una de las diversas formas de representar dicha relación entre cantidades.

■ Referencias bibliográficas

- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III. CBMS Issues in Mathematics Education* (pp. 114-162). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). Research sampler 9: Key aspects of knowing and learning the concept of function. *Mathematical Association of America*. Recuperado de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html
- Carlson, M., Oehrtman, M. y Engelke, N. (2010). The Precalculus Concept Assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, 28 (2), 113-145.
- Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(3), 135-164.
- Cooney, T., Beckmann, S. y Lloyd, G. (2010). *Developing Essential Understanding of Functions for Teaching Mathematics in Grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hitt, F. y Morasse, C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking: Constructing the concept of covariation as a prelude to the concept of function. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 243-260.
- Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematics and Cognitive Science* (pp. 77-156). Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

- National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Van Dyke, F. (2003). Activities for students: Using graphs to introduce functions. *Mathematics Teacher*, 96(2), 126-137.