

"CUANDO UNA CRECE, LA OTRA DECRECE"... LA PROPORCIONALIDAD VA UN POCO MÁS ALLÁ

Daniela Reyes-Gasperini, Ricardo Cantoral, Gisela Montiel

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)

Instituto Politécnico Nacional (México)

dreyes@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx, gmontiel@ipn.mx

Palabras claves: socioepistemología, problematización del saber matemático, lo proporcional

Key words: socioepistemology, problematization of mathematical knowledge, a proportional

RESUMEN

En el presente escrito queremos mostrar los avances respecto al tránsito de "la proporcionalidad" a "lo proporcional". Pondremos nuestra atención en una disciplina social: el Derecho Penal. Damos a conocer nuestras primeras hipótesis respecto de la importancia de encontrar cómo la proporcionalidad, un tema curricular transversal (mucho tiempo inmerso en el campo aritmético), norma las tomas de decisiones a nivel jurídico, en donde las magnitudes no pueden ser cuantificables numéricamente, pues estas son *pena* y *daño*. Este será, a nuestro entender, un ejemplo del relativismo epistemológico y la racionalidad contextualizada que rige a los saberes matemáticos desde una perspectiva socioepistemológica. Nos permitirá, entre otras cosas, diseñar propuestas en donde se problematice el saber matemático escolar considerando las relaciones entre las magnitudes, no sólo como un valor numérico.

ABSTRACT

In this paper we want to show the progress on the transit of "proportionality" to "proportional". We will put our attention on a social discipline: Criminal Law. We released our first hypothesis regarding the importance of finding how the proportionality, a cross-curricular theme (much immersed in the simple field time), standard decision-making at the legal level, where quantities cannot be quantified numerically, for these are *penalty* and *damage*. This will, in our view, an example of epistemological relativism and contextualized rationality governing mathematical knowledge from a socioepistemological perspective. This, among other things, will allow us to design proposals to problematize of school mathematical knowledge by considering the relations between magnitudes, not only as a numerical value.

■ Introducción

Año tras año hemos ido construyendo la idea de “lo proporcional” para concretar el paso de “la proporcionalidad” a “lo proporcional” desde una mirada Socioepistemológica. Es decir, realizar una transición de la centración en objetos matemáticos como fórmulas o reglas, hacia las prácticas que nos llevan a desarrollar un pensamiento de *lo proporcional* y de esta manera, construir dicho conocimiento matemático. Con una frase que para los colegas que realicen estudios sobre la proporcionalidad podría sonar conocida “cuando una crece, la otra decrece”, siendo esta una argumentación viva en la mayoría de los individuos, es que se pretendió llamar la atención sobre una noción matemática que subyace a nuestra educación de manera transversal.

■ Marco teórico metodológico

Desde la Teoría Socioepistemológica una parte fundamental es la problematización del saber matemático.

Para el análisis del saber, éste debe *problematizarse (historiarse y dialectizarse)*. Específicamente, trata de la polifonía entre los *procesos avanzados del pensamiento*, la *epistemología de las matemáticas* y las *prácticas humanas* altamente especializadas. En este sentido, el *saber matemático* [el *saber sobre algo*], no puede reducirse a una mera definición formal, declarativa o relacional, a un *conocimiento matemático* [el *conocimiento de algo*], sino que habrá de ocuparse de su *historización* y *dialectización* como sus dos mecanismos fundamentales de constitución. Es por esto que el *saber* habrá de ser concebido como una *construcción social*. (Cantoral, 2013, p.53)

En la acción de *problematizar el saber matemático* se tiene como objetivo entender los usos y razón de ser del saber matemático estudiado, por tanto, estaremos trabajando de manera sistémica con las cuatro dimensiones del saber matemático: social, epistemológica, didáctica y cognitiva. En particular, esta acción se ha realizado, robusteciendo la problematización de la proporcionalidad en diversos trabajos (Reyes, 2011; Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014; Reyes-Gasperini, Cantoral y Montiel, 2013). Esta problematización nos permite construir una *unidad de análisis sociospistémica -uase-* cuyo carácter sistémico provoca una singular simbiosis entre y desde las cuatro dimensiones del saber, sintetizando aquellos elementos que deberán ser considerados para lograr la transición entre “la proporcionalidad” y “lo proporcional”. Con base en ella y considerando el escenario de referencia del individuo o grupo de individuos estudiado, se construyen las herramientas didácticas para trabajar con la *problematización del saber matemático escolar (psme - en escenarios escolares)*, la *problematización del saber matemático técnico (psmt - en marcos de referencia técnicos)*, la *problematización del saber matemático cotidiano (psmc - en escenarios cotidianos)*, entre otros.

Figura 1: proceso tripartito de la problematización



Con este diagrama queremos dar evidencia de la relevancia que tiene para un estudio socioepistemológico la *problematización del saber matemático* pues es la base para construir una estructura teórico-metodológica, la *unidad de análisis socioepistémica*, que permitirá por un lado, pasar de los objetos a las prácticas y, por el otro, con base en esta transición, diseñar a la vez que interpretar -dependiendo el escenario- las herramientas didácticas de intervención y análisis.

■ De la proporcionalidad a lo proporcional

Para realizar dicho tránsito será necesario diferenciar el conjunto de elementos que caracterizan al objeto matemático (proporcionalidad directa), del conjunto de elementos que caracterizan a la práctica (lo proporcional).

Las nociones básicas referentes al concepto matemático de la proporcionalidad (directa) podemos sintetizarlo de la siguiente manera:

Figura 2: Síntesis de las nociones básicas entorno al concepto de la proporcionalidad directa.

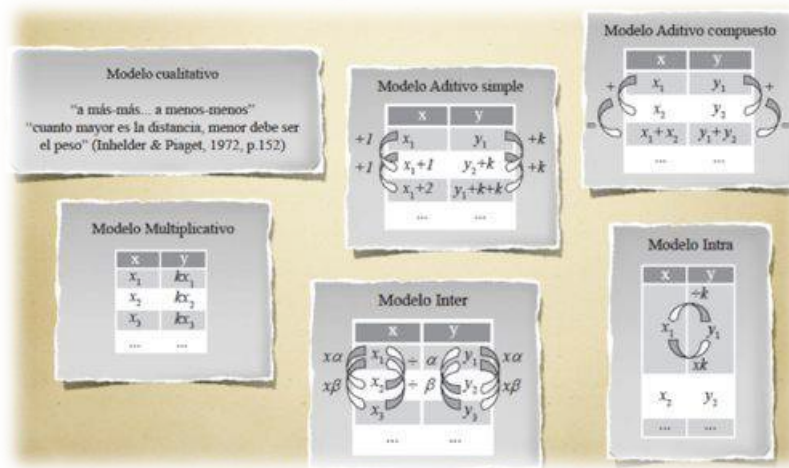
<p>Coloquial - cualitativo "a más-más, a menos-menos"</p>	<p>Regla de tres simple</p> $x_1 \text{ --- } y_1$ $x_2 \text{ --- } y_2 = \frac{x_2 \cdot y_1}{x_1}$	<p>Relación funcional $R(x, y)$ $y = kx$</p>																								
<p>Tabla de valores</p> <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <thead> <tr><th colspan="2">Modelo Aditivo simple</th></tr> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>x_1</td><td>y_1</td></tr> <tr><td>$x_1 + 1$</td><td>$y_1 + k$</td></tr> <tr><td>$x_1 + 2$</td><td>$y_1 + k + k$</td></tr> <tr><td>...</td><td>...</td></tr> </tbody> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <thead> <tr><th colspan="2">Modelo Multiplicativo</th></tr> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>x_1</td><td>kx_1</td></tr> <tr><td>x_2</td><td>kx_2</td></tr> <tr><td>x_3</td><td>kx_3</td></tr> <tr><td>...</td><td>...</td></tr> </tbody> </table>		Modelo Aditivo simple		x	y	x_1	y_1	$x_1 + 1$	$y_1 + k$	$x_1 + 2$	$y_1 + k + k$	Modelo Multiplicativo		x	y	x_1	kx_1	x_2	kx_2	x_3	kx_3	<p>Gráfica</p> <p>Una recta que pasa por el origen</p>
Modelo Aditivo simple																										
x	y																									
x_1	y_1																									
$x_1 + 1$	$y_1 + k$																									
$x_1 + 2$	$y_1 + k + k$																									
...	...																									
Modelo Multiplicativo																										
x	y																									
x_1	kx_1																									
x_2	kx_2																									
x_3	kx_3																									
...	...																									
		<p>Relación proporcional</p> $\frac{y}{x} = k$																								

Asimismo, la noción de proporcionalidad ha sido estudiada desde diferentes enfoques teórico – didácticos, que pueden clasificarse de la siguiente manera como ha sido reportado en (Reyes-Gasperini, Cantoral y Montiel, 2014):

- *Investigaciones fundacionales relativas a las estructuras generativas:* investigaciones pioneras que han servido de sustento para todas las investigaciones futuras (Hart, 1988; Piaget e Inhelder, 1984; Lamon, 1993, 1999; Lesh, Post & Behr, 1988; Noelting, 1980a, 1980b; Vergnaud, 1988, 1990).
- *Investigaciones de clasificación de estrategias y argumentaciones:* a través de situaciones puntuales los investigadores caracterizan y clasifican los tipos de respuestas en estudiantes (Howe, Nunes & Bryant, 2011; Oliveira, 2009; Sánchez Ordoñez, 2013), profesores (Berk, Taber, Carrino y Poetzl, 2009; Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent, 2012; Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008; Ilany, Keret & Ben-Chaim, 2004) e individuos fuera del aula (Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, 1991; Soto y Rouche, 1995).
- *Propuestas didácticas:* investigaciones que realizan propuestas de intervención en el aula con estudiantes (Ben-Chaim, Ilany y Keret 2007, 2008; Oller, 2012; Orrill y Brown, 2012).

Nuestra primera contribución, luego de realizar un estudio referente a los aspectos cognitivos que se desarrollan cuando se trabaja la noción de proporcionalidad, ha sido la construcción de una conglomeración de razonamientos proporcionales que conforman el modelo del pensamiento matemático referente a la proporcionalidad (Reyes, 2011).

Figura 3: Modelo del pensamiento matemático referentes a la proporcionalidad (Reyes, 2011)



Ahora bien, dado que nuestro objetivo es encontrar las prácticas que subyacen a la noción de lo proporcional, nuestra problematización del saber matemático se ha robustecido, estudiando cómo la noción de proporcionalidad vive en escenarios en los donde lo aritmético no norma, como es el caso del Derecho Penal.

Si bien es muy discutible enfocar los problemas normativos de la conducta humana desde una perspectiva formal y casi matemática –más geométrico, diría Ortega y Gasset– como intentó sin éxito el positivismo jurídico decimonónico, y menos todavía incurrir en la absurda –siquiera en apariencia inmediata– pretensión de juzgar la conducta humana con la medida de la sección áurea; la idea de “*relación adecuada*” entre cosas diversas no puede desterrarse del ámbito normativo humano y con ello se relaciona el principio de proporcionalidad.

De hecho, uno de los principales valores del derecho –la justicia– se funda precisamente en ello: en una determinada “proporción” entre las cosas, cuya transgresión torna injusta su relación, es decir, la vuelve “desproporcionada”. (Sánchez Gil, 2007, pp. 13-14)

Si bien en este momento nos encontramos profundizando sobre esta idea, nuestra primera hipótesis, luego de haber estudiado a Euclides y su sustento en las nociones de inconmensurabilidad para trabajar con la proporcionalidad, es que ante la *incapacidad de medir* lo inconmensurable debemos comparar, de ahí que la búsqueda de la “relación adecuada” entre cosas diversas habrá de mantenerse en el ámbito normativo humano, y por tanto, *lo proporcional* toma un estatus superior al del simple algoritmo.

Desde sus inicios, la noción de la proporcionalidad ha estado superando la incapacidad de medir, como por ejemplo se reporta en el teorema que dice: la diagonal y el lado de un cuadrado, son magnitudes inconmensurables. En este caso, se parte de la idea de que no hay una unidad de medida común y por eso, se llega a la necesidad de comparar. Aunado a ello, como dijimos al comienzo, en el caso del Derecho Penal, tampoco tienen una unidad métrica de medida, sin embargo, junto con el principio de razonabilidad, mantener la relación adecuada en la justicia se sustenta en el principio de proporcionalidad.

En palabras simples, la idea del principio mencionado es que debe existir proporcionalidad entre una pena que se aplique y el daño ocasionado, es decir, no se puede aplicar la misma pena para diferentes delitos, no es lo mismo un homicidio que un robo. La atención está puesta en la relación entre daño y pena, y no sólo en uno de sus componentes, sólo podrá medirse la arbitrariedad de la decisión si se toma en cuenta la relación.

■ Propuesta para problematizar el saber matemático escolar

En nuestra *unidad de análisis socioepistémica* hemos recuperado la circunstancia de que la constante de proporcionalidad no fuera una cuestión numérica sino que tenga que ver con la relación que existe entre las magnitudes, por tal motivo, dado esta situación hemos planteado la siguiente actividad: “Cinco amigos compran un billete de lotería. Para comprar el billete Fausto puso 12 pesos, Agustina 8, Victoria 15, Martín y Alba, 5 cada uno. Los chicos ganaron 25 mil pesos. Propón mínimo 2 maneras distintas de realizar un reparto justo. En cada caso, explica tu toma de decisión y enuncia las herramientas utilizadas.” En esta situación, una respuesta escolarizada sería encontrando las proporciones ante la relación *inversión-ganancia* en donde, por ejemplo Fausto ganaría 6,666 pesos. Sin embargo, otra opción es considerar *indispensabilidad-ganancia*, en donde cada uno ganaría la quinta parte del premio, pues todos tienen igual grado de indispensabilidad dado que si alguno no hubiera puesto su dinero, no

podrían haber comprado el boleto. O bien, la relación *amistad-ganancia* y a cada uno le correspondería la quinta parte.

La siguiente actividad: “Tres amigos salieron a vender playeras para juntar dinero para su viaje de fin de curso. Un día de sol en Mérida, casi 40° de sensación térmica, Juan salió a vender casa por casa, Tomás se fue a la empresa de la madre a vender y Esteban se quedó en su casa mandando mails de venta. De las ventas, en total ganaron 5mil pesos, ¿cómo realizarías un reparto justo?”, que no posee números, es la que diseñamos para generar la necesidad de construir una unidad de medida, es decir, una relación para “medir” un reparto justo, pudiendo ser estas: *indispensabilidad-ganancia*, *amistad-ganancia*, *esfuerzo-ganancia*, entre muchas otras.

■ Conclusiones

A partir de la problematización del saber matemático hemos detectado una práctica en donde lo proporcional juega un rol importante: establecer un reparto justo. En los problemas típicamente escolares se pide realizar un “reparto proporcional”, como si la idea de proporcional fuera única. En el ejemplo planteado, donde se solicita un “reparto justo”, la toma de decisión empieza desde determinar qué es justo para quien dé respuesta. Así, las prácticas respecto a lo proporcional no se rigen por la determinación de un valor, sino por la especificidad de la relación establecida: la “relación adecuada”. De esta manera, consideramos que el relativismo epistemológico y la racionalidad contextualizada se ponen en evidencia en la acción para dar respuesta a preguntas sobre la relación proporcional. Y de esta manera, pasamos de fijar nuestra atención en una relación aritmética de la proporcionalidad, para comenzar a trabajar con una idea variacional de lo proporcional.

■ Referencias bibliográficas

- Ben-Chaim, D., Ilany, B. S., & Keret, Y. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal Mathematics Teacher Education*, 10, 333-340.
- Ben-Chaim, D., Ilany, B. S., & Keret, Y. (2008). “Atividades Investigativas Autênticas” para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio. *Boletim de Educação Matemática*, 21(31), 125-159.
- Berk, D., Taber, S., Carrino, C., & Poetzl, C. (2009). Developing Prospective Elementary Teachers' Flexibility in the Domain of Proportional Reasoning. *Mathematical thinking and learning*, 11(3), 113-135. doi: 10.1080/10986060903022714
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.
- Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI Editores.
- Contreras, L., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M.C. y Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42B), 433-457.
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2008). Elementos para el análisis didáctico de situaciones problema en la formación matemática de maestros. En J. L. Blanco y J. Murillo (Eds.), *Boletín SEIEM* 25. Recuperado el 19 de junio de 2013 de

<http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXII/DidMatDisCientifica/GodinoRivasCastroYKonic.pdf>

- Hart, K. (1988). Ratio and Proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.198-219). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Howe, C., Nunes, T, & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 391-417.
- Ilany, B., Keret, Y., & Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary teacher education. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88). Bergen, Norway: PME.
- Lamon, S. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.
- Lamon, S. (1999). Reasoning Proportionally. In S. Lamon (Ed.), *Teaching fractions and ratios for understanding* (pp. 223-238). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I – Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.
- Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II – Problem-structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 331-363.
- Oliveira, I. (2009). Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. *Boletim de Educação Matemática, 22*(34), 57-80.
- Oller, A. (2012). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.
- Orrill, C. H. & Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 381-403. DOI: 10.1007/s10857-012-9218-z
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1984). El preadolescente y las operaciones proposicionales. En J. Piaget y B. Inhelder (Ed.), *Psicología del niño* (12a ed.) (pp. 131-150). España, Madrid: Ediciones Morata.
- Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav, D.F., México.
- Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 360-382. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a14
- Reyes-Gasperini, D., Cantoral, R. y Montiel, G. (2013). Profesionalización docente en Matemáticas. El empoderamiento docente: una mirada emergente. En Dolores, C., J. Hernández, J., Sosa, L., García González, M. (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 153-172). DF, México: Díaz de Santos. ISBN: 978-84-9969-664-5

- Reyes-Gasperini, D., Cantoral, R. y Montiel, G. (2014). Cuando una crece, la otra decrece... ¿proporcionalidad inversa o directa? *Premisa*, 16(62), 3-15.
- Sánchez Ordoñez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65-97.
- Sánchez Gil, R. (Coord.) (2007). *El principio de la proporcionalidad*. D.F., México: Universidad Nacional Autónoma de México. ISBN 970-32-3939-0. Recuperado de <http://biblio.juridicas.unam.mx/libros/libro.htm?l=2422>
- Soto, I. y Rouche, N. (1995). Problemas de Proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos. *Educación Matemática*, 7(1), 77-95.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherchers en Didactiques des Mathématiques*, 10(2), 133-170.