

ANÁLISIS DIDÁCTICO A UN PROCESO DE ENSEÑANZA DEL MÉTODO “INTEGRACIÓN POR PARTES”

Enrique Mateus Nieves

Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)

enrique.mateus@uexternado.edu.co

Palabras clave: Análisis didáctico, trayectoria epistémica, integral, integración por partes.

Key words: Didactic analysis, epistemic trajectory, integral, integration by parts.

RESUMEN: Este artículo presenta algunos resultados de la investigación adelantada. Se observa una tendencia en la enseñanza de los conceptos implicados en la integración por partes a seguir un desarrollo casi exclusivamente de rutinización algebraica. Se conocen las técnicas algorítmicas, sin una contextualización adecuada del proceso de integración. El enseñar separadamente los algoritmos de problemas contextualizados, responde al interés de la presente investigación en aras de buscar respuestas que proporcionen razones para entender ¿por qué los estudiantes se sienten abrumados por tantos requerimientos formalistas de las matemáticas en la formación superior? También trata de determinar si el quehacer del profesor durante la clase influye o no en este sentimiento.

ABSTRACT: This article presents some results of investigation conducted. A trend seen in teaching the concepts involved in the integration by parts a further development almost exclusively on algebraic routinization. Algorithmic techniques are known, without proper contextualization of the integration process. Teaching separately algorithms contextualized problems, in the interest of this research in order to find answers to provide reasons to understand why students are overwhelmed by so many formalistic requirements of mathematics in higher education? It also seeks to determine whether the task of the teacher during class influences or not this feeling.

■ CONTEXTUALIZACIÓN

El Cálculo, como componente esencial de lo que se conoce como matemáticas del cambio, es una potente y compleja herramienta articulada, sobre todo, alrededor de las nociones de variación y acumulación relacionadas con la derivada y la integral respectivamente, que son dos objetos matemáticos complejos, esenciales en la organización del Cálculo infinitesimal y que, a su vez, se apoyan en otros objetos matemáticos, igualmente complejos: función, límite, derivada e integral. Es aquí donde el cálculo integral, se hace portador de inagotables posibilidades para incidir en el proceso formativo del individuo, por el carácter de su epistemología donde la mate-matización de las ciencias exactas juega un papel importante en la formación del universitario; es fundamental que el estudiante reconozca el doble valor que tienen las matemáticas: como ciencia y como herramienta. De ahí que las reflexiones (e investigaciones) sobre la calidad matemática de los procesos de instrucción de las matemáticas son numerosas en el área de Educación Matemática. Todas ellas ponen de manifiesto que hay muchos aspectos que inciden en esta calidad y que, por tanto, se trata de una noción multidimensional. (Font y Adán, 2013)

■ DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Investigaciones recientes dentro del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), como las de Artigue (2002), Salinas y Alanís (2009), comentan que la situación actual en cuanto a la enseñanza del Cálculo, se caracteriza por un sentimiento general de crisis que, aunque no se ha percibido de la misma manera, sí parece trascender las diferencias culturales y que las dificultades en el aprendizaje no han cambiado de manera sustancial; esta problemática general también se percibe en Colombia como lo relaciona el documento ¿cómo es la evaluación en matemáticas? del Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES, 2003). Dicha situación motiva a realizar esta investigación mediante un estudio de caso que aunque no se puede generalizar, involucra a un profesor representativo de esta problemática que arroja información que si va más allá del caso particular.

■ OBJETIVOS

Caracterizar el proceso de enseñanza que ha seguido un profesor cuando explica el método de integración por partes [MIP] en un curso de cálculo integral; identificar dificultades específicas que se observen en el desarrollo de las clases, indagar sus causas y comprobar si persisten o no, para determinar con base en esa información el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción ejecutado por el profesor al enseñar el MIP desde los criterios de idoneidad propuestos por el EOS.

■ MARCO TEÓRICO

Para el estado del arte de esta investigación, se contemplaron 4 aspectos fundamentales: La línea de investigación sobre el conocimiento del profesor; Investigaciones sobre el PMA; Los aportes de la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, esquemas); Algunas limitaciones de la teoría APOE y la consiguiente necesidad de usar la Teoría de la Funciones Semióticas, conocida regularmente como el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS) como soporte teórico y metodológico para dicho trabajo.

En diferentes investigaciones Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002; Contreras, Font, Luque, Ordoñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font 2006; Ramos y Font, 2006) han desarrollado el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) que para el caso del cálculo diferencial e integral, considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas. Muestran que los estudiantes tienen dificultades para lograr la emergencia del objeto integral debido a la excesiva rutinización algebraica que incide negativamente en la enseñanza y en el aprendizaje de este concepto. Aquí se hace necesario adoptar una posición situada en dos aspectos: el cognitivo y el epistemológico. Para el primero considerar los procesos cognitivos del sujeto desde un punto de vista semiótico (construcción de significados personales). Para el aspecto epistemológico implica asumir que es fundamental problematizar el propio conocimiento matemático (construcción histórico-epistemológica de significados institucionales), no considerándolo como transparente y acabado. Con esto, en el EOS se entiende la comprensión esencialmente, como una competencia que posee el estudiante y no solo como un proceso mental. Desde este punto de vista es posible inferir que un estudiante comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Lo que implica que la capacidad se traduce en la realización de prácticas que son evaluables públicamente.

El EOS permite realizar análisis de tipo microscópico de episodios instruccionales a partir de cinco niveles propuestos y que para esta investigación doctoral han sido adaptados así: Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas. Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos. Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos. Nivel 4. Identificación de normas. Nivel 5. Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción. De ahí que el análisis didáctico que se haga a la descripción del proceso seguido por el profesor en la enseñanza del método de integración por partes (y en particular a la trayectoria epistémica que se definirá en seguida) que permita caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad ontosemiótica. Para analizarla, su desarrollo (la "crónica") será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones-problema (las "tareas") que se van proponiendo. Se denominará "configuración epistémica" al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema. Por tanto, se trata de un segmento de la trayectoria de enseñanza como un aspecto de la trayectoria didáctica global, que, una vez organizada por configuraciones epistémicas, puede considerarse como trayectoria epistémica. El análisis epistémico consiste pues en segmentación y la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Cada configuración epistémica, globalmente considerada, desempeña una función específica en el proceso de instrucción. La atención se fija en la cronogénesis del saber matemático escolar, y en la caracterización de su complejidad Ontosemiótica. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales según los estados de la trayectoria, que serán llamadas unidades epistémicas. Éstas estarán conformadas por unidades naturales de análisis. Dichas unidades son las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de estudio, las cuales serán numeradas correlativamente para su referencia. Este análisis realizado de esta manera, permitirá determinar la existencia o no de conflictos semióticos que generen dificultades en los estudiantes, la aplicación o no de los enfoques tradicionales de enseñanza del cálculo, planteados en las hipótesis de investigación.

El centro de atención del análisis didáctico se enfocó en la Trayectoria Epistémica de enseñanza, vista desde la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado -(significado pragmático: Sistema de prácticas operativas y discursivas)- institucional implementado. Estos componentes (problemas, lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción que el docente imparte. En este análisis, también se ha contemplado la trayectoria epistémica de la secuencia de configuraciones didácticas, esto es, el progresivo “crecimiento matemático” de los aprendizajes. (Comprensión, competencia y conocimiento), ya que se considera que un sujeto comprende un determinado objeto cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

■ METODOLOGÍA

Se trata de una investigación cualitativa, basada en el estudio de caso de un profesor elegido que enseña un contenido matemático, (método de integración por partes [MIP]). Su ubicación teórica está dentro del PMA, específicamente en la didáctica del cálculo integral en un contexto educativo particular, pero en la presentación y discusión de los resultados se utilizan los criterios y las categorías de análisis del EOS que permite combinar diversos métodos y técnicas de acuerdo a las fases de la investigación, y de manera más específica la noción de idoneidad didáctica de procesos de instrucción y aprendizaje de las matemáticas. El modelo epistémico y cognitivo que caracteriza el EOS proporciona herramientas de análisis que permiten diseñar trayectorias didácticas e instrumentos de evaluación con validez ecológica, esto es, adaptadas al contexto, a las competencias matemáticas iniciales de los estudiantes y a los objetivos de aprendizaje pretendidos e implementados

Las clases consideradas mientras se explicaba el MIP fueron 12, que tenían una duración aproximada de una hora, Algunas de ellas se implementaron según el horario asignado en sesiones de hora y media de clase. Se impartieron en la asignatura de Cálculo Integral, durante el tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de una universidad colombiana, con 20 estudiantes de 21 a 23 años de edad. La universidad es de tipo pública estatal. El profesor tenía una antigüedad en la docencia de cinco años, una formación en matemática pura y una especialización en docencia de la matemática universitaria. Para el análisis, hemos subdividido las 12 sesiones de clase en 820 unidades de análisis, que hemos agrupado en episodios de aula que denominamos configuraciones didácticas cada una de ellas con una configuración epistémica asociada. (Godino, Contreras y Font, 2006).

El análisis didáctico se realizó en 4 fases procesales así: Fase heurística: se procede a la búsqueda y recopilación de las fuentes de información. Fase hermenéutica: selección de los puntos fundamentales e indicación de los instrumentos diseñados para sistematizar la información bibliográfica acopiada. Fase de recolección y triangulación de la información: creación de categorías de análisis. Análisis y triangulación de la información en las categorías de análisis. Fase de Resultados: conclusiones, limitaciones del estudio, perspectivas y recomendaciones hacia el futuro.

■ RESULTADOS ENCONTRADOS

Con respecto a la identificación de prácticas matemáticas, a través de la observación de la trayectoria didáctica que siguió el profesor durante una unidad específica, se pudo percibir cómo la mayoría de los estudiantes demuestran una actitud de rechazo hacia el estudio de esta disciplina. A pesar de este rechazo, en el proceso de enseñanza no se enfatizan los conceptos, pero sí los procedimientos; se hace énfasis en la memorización, siguiendo patrones de imitación, sin que muchas veces los jóvenes entiendan lo que están haciendo y, en general, sin que se desarrolle la capacidad creadora e integradora. La costumbre de enseñar separadamente los algoritmos y los problemas propiamente dichos resalta el interés de la presente investigación para tratar de crear conciencia entre los docentes sobre la necesidad de lograr un significado global de la integral a partir de la adopción de varias presentaciones del mismo. Sin olvidar lo que argumenta Dreyfus (1991), “el proceso de aprendizaje de un determinado concepto pasa inicialmente por la utilización de una sola representación” (p.28), donde la visualización juega un papel importantísimo, ya que proporciona una visión holística del gráfico y de la región que se trabaja.

Se observa una aproximación socio-constructivista por parte del profesor, privilegia el trabajo cooperativo y en equipo, mientras que en general los sistemas y tiempos de la docencia tradicionales fomentan el trabajo individual y la evaluación cognitiva. El tema de los problemas que presenta el profesor pertenecen estrictamente a un contexto intramatemático y por tanto no se fomentan procesos de modelización.

El profesor enseña matemáticas con exposición, seguida de ejercicios sobre los contenidos vistos. Este modelo se repite en toda la secuencia de clases observada. Este modelo de enseñanza deja a los alumnos la responsabilidad de dar sentido al significado global de los objetos matemáticos que se introducen a través de los ejemplos y ejercicios que se van mostrando. Como expresan Godino et al. (2006, p. 31), se estaría tratando de una decisión topogenética: primero yo, el profesor, te doy las reglas generales, después tú las aplicas.

La institucionalización -regulación-, formulación y validación quedan exclusivamente a cargo del profesor, sin intervención alguna de los alumnos, más allá de salir al tablero. Por dicho motivo, las configuraciones didácticas de toda la secuencia de clases se han considerado del tipo magistral-interactivo o bien de configuración didáctica personal.

Con respecto a la identificación de objetos y procesos matemáticos durante las sesiones analizadas la intervención del profesor se centró en presentar (institucionalizar) el MIP a partir de la resolución de una integral particular. El patrón de interacción sirve para tipificar el proceso de enseñanza como magistral interactiva. Se presentan varios conflictos semióticos potenciales causados por las explicaciones ambiguas del profesor y por el uso de simbología imprecisa. Los elementos matemáticos asociados con la solución de problemas corresponden a un curso del nivel de Licenciatura en Matemáticas y se encuentran descritos en el currículo de las materias que cursan los estudiantes de la Facultad de Ciencia y Tecnología.

Destaca el hecho de que casi no aparezca el lenguaje numérico y que el recurso a la historia es utilizado poco y de una forma descontextualizado. Tal como se observa en los libros de texto, la enseñanza del cálculo integral no incluye explícitamente una fase previa de carácter experimental a lo largo de la cual los objetos matemáticos tengan una referencia explícita. Es decir, tanto las

concepciones como los obstáculos no son tratados de modo explícito como sería conveniente de cara a establecer una enseñanza en la que los propios estudiantes construyan su conocimiento.

El diseño curricular no favorece la enseñanza con base en problemas. Los cursos están concebidos en forma expositiva ilustrativa, con tareas y actividades específicas propias de esa modalidad. El aprendizaje mediante la resolución de problemas requiere de otras estrategias y otros tiempos, dado que la normatividad está acorde con la modalidad tradicional, pueden surgir contratiempos con la problemática, que deberán ser negociados con los estudiantes mediante un contrato didáctico adecuado. Lo que se observa es que el significado institucional pretendido para la integral no corresponde al significado global alcanzado, ni tampoco al significado global de la integral como proceso acumulativo.

En lo que se refiere a la integral como objeto matemático de enseñanza-aprendizaje; se concluye que el tipo de enseñanza propuesto es trasmisivo, lo que supone que el alumno no realiza ningún tipo de trabajo de investigación, siendo un sujeto meramente pasivo. Paralelamente, se comunica el saber sin atender a los posibles errores, por lo que consideramos que al estudiante no se le facilita la construcción del saber matemático. No hay interacciones en torno a conflictos que busquen solucionarlos.

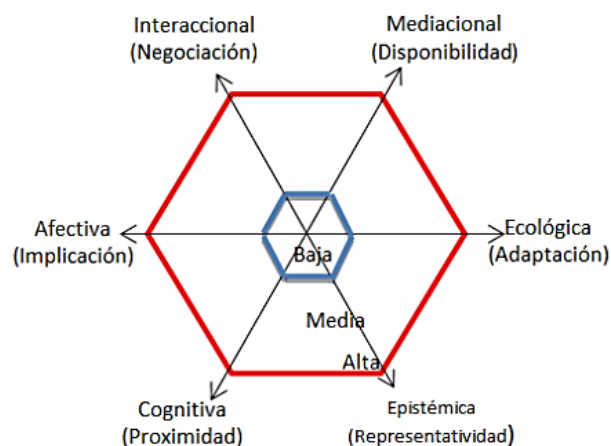
Al finalizar el proceso de observación de las clases, el significado personal de la mayoría de los estudiantes sobre la integral, incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de integrales elementales a partir de sus gráficas (para integrales definidas), no así para las integrales indefinidas e impropias. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales “funciones elementales” antes del proceso de enseñanza, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado institucional pretendido por el profesor observado.

La enseñanza de las integrales es un tópico ampliamente estudiado en la Matemática Educativa. Un grupo relevante de estos trabajos, que normalmente ocupan marcos teóricos de tipo psicológico, han investigado las dificultades que presentan los alumnos con la aplicación de cuestionarios y entrevistas, pero no analizan los procesos de instrucción que siguen los estudiantes. En cambio, el análisis que hemos llevado a cabo aquí, además de permitir hacer una descripción con detalle lo que ha sucedido, ofrece explicaciones sobre por qué se presentan determinadas dificultades en los alumnos. Por una parte, podemos afirmar, como muestra la investigación sobre la didáctica de las integrales, que los alumnos tienen problemas para entender la resolución de integrales por el MIP, y que se observan, entre otras evidencias, a través de los conflictos semióticos de tipo cognitivo que para el caso, por cuestión de espacio, aquí solo ilustraremos un ejemplo tomado de la secuencia didáctica observada, los demás conflictos detectados se pueden consultar en el extenso de la tesis doctoral del autor de este escrito: Conflicto semiótico (cognitivo 1): en la sesión 1, se asocia la configuración didáctica 2, en la unidad de análisis 35, el profesor institucionaliza que “al existir una multiplicación entre funciones no similares, el método a aplicar es por partes”. Estamos en presencia de un conflicto cognitivo que el profesor genera en el alumno. Este conflicto se hace evidente en la sesión 2 configuración didáctica 5, unidad de análisis 231. Ante la imposibilidad de resolver la integral $\int \frac{\text{sen}2x}{e^x} dx$ un alumno dice que no se puede aplicar el MIP porque no hay un producto de funciones, el profesor resuelve este conflicto ayudándole a avanzar en su aprendizaje indicándole que si se hace el siguiente tratamiento $\int e^{-x} \text{sen} 2x dx$, sí que se tiene un producto de funciones.

De las diferentes configuraciones epistémicas para modelizar la complejidad de la integral, descritas en Ordoñez (2011) y en Crisóstomo (2012), solo se usan parcialmente las configuraciones que llaman: geométrica, inversa de la derivada y la algebraica. Por otra parte con relación a estas tres configuraciones los elementos esenciales no están bien explicados ni coherentemente organizados (el procedimiento del MIP es ambiguo, olvida un paso fundamental que es la jerarquía para la selección de u , el teorema fundamental del cálculo también se expresa de forma ambigua, etc.). No hay una muestra representativa de los tipos de problemas en donde es indicado aplicar el MIP; incluso el tipo de problemas donde se debe aplicar dos veces el mismo método, no les hace observar que hay una familia de problemas que se resuelven por integración repetida del algoritmo.

Por las descripciones antes mencionadas, en el siguiente diagrama, tomado de Robles, Castillo y Font (2012), suponemos el hexágono regular rojo como la idealización de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de buena calidad (se consiguen de manera conjunta todas las idoneidades), mientras que el azul refleja la idoneidad de la clase observada.

Diagrama 1. Idoneidad didáctica del proceso de instrucción ejecutado



Dificultades observadas a partir del análisis didáctico realizado en los apartados anteriores

Se observan tres grandes dificultades a lo largo de las 12 sesiones de clase utilizadas para implementar el proceso de instrucción del MIP que no se superan, en su orden son:

Dificultad para determinar el orden jerárquico para elegir cual función se nombrará como u .

Dificultad para hacer conversiones, transferencias y aplicar la regla de integración por partes.

Dificultad para solucionar problemas pertenecientes a otros contextos científicos como la física y la economía, por nombrar algunos.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Antigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordoñez, L. (2005); Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherche en Didactique de Mathematiques*, 25(2), 151-186
- Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de proceos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemática. Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.
- Dreyfus, T. (1991). "Advanced Mathematical Thinking Processes" En D. TALL (Ed) *Advance Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Londres, 24-41
- Font, V., y M. Adán (2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, Bilbao, SEIEM, pp. 283-291.
- Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de ciencias Económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-345.
- Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- ICFES. (2003) ¿Cómo es la evaluación en matemáticas? Subdirección Académica Grupo de Evaluación. Bogotá D. C.
- Ordóñez, L. (2011). *Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Jaén. España.
- Ramos, A., y Font, V. (2006). Cambio institucional, una perspectiva desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Paradigma*, 27 (1), 237-264.
- Robles, G., Del Castillo, A. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática*, 24(1), 35-71.
- Salinas, P., y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12(3), 355-382