

CARACTERÍSTICAS DE LA COMPRENSIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN ESTUDIANTES DE 6 A 12 AÑOS

Characteristics of geometric shapes' understanding on students from 6 to 12 years old

Bernabeu, M., Llinares, S. y Moreno, M.

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar la comprensión de alumnos de educación primaria de las figuras geométricas como elementos de una clase. La coordinación de las aprehensiones perceptual, discursiva y operativa (Duval, 1995) con la idea de concepto figural (Fischbein, 1993) han sido usadas para analizar entrevistas clínicas realizadas a 45 alumnos de educación primaria en las que se pedía que, a partir del reconocimiento de atributos en las figuras proporcionadas, realizaran clasificaciones. Los resultados indican que el control de la componente conceptual sobre la perceptual en la comprensión de las figuras como elementos de una clase es progresivo y depende de los atributos considerados. Estos datos apoyan la existencia de un “nivel sincrético” (Clements et al, 1999) en el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas.

Palabras clave: *pensamiento geométrico, reconocer figuras geométricas, perspectiva perceptual, perspectiva conceptual y clasificar figuras geométricas.*

Abstract

The aim of this research is to characterise the geometric shapes' understanding of primary education's scholars of geometric shapes as elements of a class. The coordination of the perceptual, discursive and operational apprehensions (Duval, 1995) with the idea of figural concept (Fischbein, 1993) have been used to analyse clinical interviews with 45 primary education's scholars which requested, first of all the recognition of attributes in provided figures and after them, the classification of the figures. Results show the control of the conceptual component on the perception, in the geometric shapes' understanding as element of a class, is progressive and depends on attributes. These information supports the existence of a “syncretic level” (Clements et al., 1999) in the development of the understanding of geometric shapes.

Keywords: *geometrical thinking, recognize of geometric shapes, perceptual perspective, conceptual perspective and classify of geometric shapes.*

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo del pensamiento geométrico, el reconocimiento de atributos de las figuras y la relación de estos desempeña un papel relevante para realizar clasificaciones de las figuras (Arnas y Aslam, 2010; Clements, Swaminathan, Hannibal y Sarama, 1999; Elia y Gagatsis, 2003; Levenson, Tirosh y Psamir, 2011; Yesil-Dagli y Halat, 2016). Asimismo, en el proceso de reconocer las figuras pertenecientes a las clases establecidas, el uso de figuras prototípicas impone ciertas limitaciones (Scaglia y Moriena, 2005). Ejemplos de figuras prototípicas pueden ser los cuadrados, triángulos equiláteros dibujados con la base paralela al borde de la hoja o cualquier otro polígono regular.

El estudio relacionado con el aprendizaje de las figuras abordando diferentes cuestiones relacionadas

con ellas, tales como aspectos de visualización, demostración, etc., ha sido estudiado y tratado tanto a nivel internacional como nacional (Fernández, 2013; Guillen y Figueras, 2004; Gutiérrez, 1998). En particular, algunas de las investigaciones realizadas tienen como referencia los niveles de Van Hiele, como el trabajo de Sarasua (2013) sobre la posible conexión entre las destrezas de representación externa de las figuras planas y los niveles de razonamiento.

Investigaciones previas indican que los niños suelen distinguir unas figuras geométricas mejor que otras cuando las emparejan con figuras prototípicas, pero tienen dificultades con ejemplos no familiares de algunas figuras geométricas y con la consideración de contraejemplos (Clements et al., 1999; Tsamir, Tirosh y Levenson, 2008). Sin embargo, el hecho de que los niños puedan reconocer algunos atributos de las figuras geométricas, como por ejemplo la concavidad y convexidad, aunque no usen los términos geométricos específicos, ha llevado a los investigadores a plantear la hipótesis de la interacción entre lo perceptual y el reconocimiento de algunos atributos mediante una perspectiva analítica en un primer nivel de desarrollo (Clements et al., 1999). En este sentido, la manera en la que los niños pueden explicar la pertenencia o no a una determinada clase, muestra los conflictos existentes entre el uso de la figura prototípica como referente y el análisis de sus propiedades y componentes en función del tipo de figura empleada en la actividad. De esta manera, el desarrollo del reconocimiento de las figuras geométricas se vincula al proceso por el cual los niños empiezan a generar relaciones entre los atributos y los dotan de significado. Por ejemplo, cuando empiezan a comprender la idea de polígono vinculado a figuras cerradas y con lados rectos.

En este desarrollo, la presencia de ejemplos prototípicos de las figuras favorece la generalización y la posibilidad de añadir a los conceptos características vinculadas solo a lo perceptual, sin embargo, impide el desarrollo de la categorización matemática, esto es, la consideración de una figura como parte de una clase. Por ejemplo, los niños tienen dificultad en considerar los cuadrados como subclase de los paralelogramos.

Esta característica de la interrelación entre la perspectiva perceptual y analítica, que Clements y sus colegas (1999) denominan “nivel sincrético” para diferenciarlo, simplemente, de la consideración de aspectos perceptuales (nivel visual en términos de los niveles de van Hiele), se manifiesta cuando los niños, ante actividades de clasificar triángulos, consideran a los triángulos isósceles “figuras alargadas”, como “casi triángulos”. La relación entre lo perceptual y lo conceptual fue estudiado por Fischbein (1998) con estudiantes de secundaria (14-17 años), concluyendo que solamente los que tenían una fuerte formación matemática eran capaces de superar las aparentes contradicciones entre el procesamiento de la información perceptual y las propiedades derivadas de la definición de las figuras geométricas, que caracterizan la perspectiva conceptual. Sin embargo, son menos conocidas las características de la interacción entre lo perceptual y lo conceptual en los alumnos de educación primaria.

La información sobre las interacciones entre lo perceptual y la consideración de atributos relevantes en el proceso de categorización de las figuras geométricas (proceso por el cual una figura se considera parte de una clase) puede ser relevante para empezar a generar trayectorias hipotéticas de aprendizaje de las figuras geométricas alrededor de las cuales organizar la enseñanza. La investigación presentada tiene como objetivo identificar características del desarrollo de la comprensión de los alumnos de educación primaria (6-12 años) de las figuras geométricas como elementos de una clase, en concreto, investigar las relaciones entre las propiedades perceptuales (figurales) y las conceptuales en el proceso por el cual los niños consideran las figuras como elementos de una clase. Por consiguiente, la pregunta de investigación que nos planteamos es: ¿qué factores determinan la interacción entre las perspectivas perceptual y conceptual en la comprensión de las figuras geométricas como elementos de una clase de figuras en la educación primaria?

MARCO TEÓRICO

Los trabajos de Duval (1995, 1999) subrayaron el papel de la coordinación entre las aprehensiones perceptual, discursiva y operativa en el aprendizaje de la geometría. La *aprehensión perceptual* es la

capacidad para reconocer o percibir, en un plano o en profundidad, las figuras y ser capaz de nombrarlas y reconocerlas dentro de un subconjunto formado por varias figuras; la *aprehensión discursiva* es la capacidad que tiene un individuo de vincular hechos geométricos a las figuras, así como realizar declaraciones sobre la denominación, definición y reconocimiento de las propiedades geométricas; y finalmente, la *aprehensión operativa* es la capacidad de poder modificar una figura para resolver problemas geométricos, como por ejemplo, cambiar la posición u orientación de la figura. La coordinación de estas aprehensiones está en la base del desarrollo del pensamiento geométrico que permite asumir el vínculo entre las imágenes perceptuales y las propiedades teóricas que definen la inclusión de la figura en una categoría (Fischbein, 1993, 1998).

Fischbein (1998) señaló que las figuras geométricas se caracterizan por propiedades perceptuales y conceptuales que reflejan las diferencias entre los conceptos y las imágenes. Para Fischbein una figura geométrica es una entidad abstracta cuyo significado está determinado por una definición, pero que, al mismo tiempo, es una imagen con características perceptuales (tamaño y orientación). De esta manera, en el desarrollo del razonamiento geométrico se entrelazan lo perceptual y lo conceptual. El papel que desempeña lo conceptual para gobernar las imágenes perceptuales es una competencia que se desarrolla a lo largo del tiempo. Para Fischbein esta interacción genera una tercera categoría de representaciones mentales, denominada concepto figural, que posee, simultáneamente, rasgos de lo perceptual y de lo conceptual.

Consideraremos manifestaciones de la coordinación de las aprehensiones perceptual, operativa y discursiva a la manera en la que podemos manipular las representaciones físicas de las figuras y vincularlas a propiedades geométricas que evidencian la existencia del concepto figural en la mente de los estudiantes. La capacidad de los estudiantes para realizar estas coordinaciones pone de manifiesto que las figuras geométricas son entidades que poseen tanto propiedades conceptuales como perceptuales (Fischbein, 1998). Desde este punto de vista, la simbiosis que proporciona la comprensión configural de las figuras geométricas permite que los estudiantes puedan realizar manipulaciones de las figuras (aprehensión perceptual y operativa) mientras que la componente conceptual proporciona el control lógico de estas operaciones (aprehensión discursiva). La caracterización de este proceso en educación primaria no es bien conocida hasta el momento.

MÉTODO

Participantes y contexto curricular

El estudio se plantea como un estudio piloto que nos permita comprobar la potencialidad o no de las actividades diseñadas ad hoc para evidenciar posibles relaciones que puedan existir entre las percepciones perceptuales y las conceptuales que utilizan los niños de primaria a lo largo del proceso de clasificación de figuras geométricas. La metodología es de tipo cualitativo, en la investigación han participado 45 alumnos de primero a sexto de educación primaria (6-12 años) pertenecientes al mismo centro (Tabla 1), elegidos por sus maestros teniendo en cuenta su rendimiento académico y su capacidad comunicativa.

Tabla 1. Participantes de la investigación. Número de alumnos por curso/edad

| Curso | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | TOTAL |
|---------------|-----|-----|-----|------|-------|-------|---------------|
| Edad (años) | 6-7 | 7-8 | 8-9 | 9-10 | 10-11 | 11-12 | 6-12 años |
| Participantes | 10 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 45 alumnos/as |

Si bien la metodología de enseñanza puede variar entre los diferentes cursos, en el centro básicamente se sigue el libro de texto, el cual los profesores pueden llegar a completar con actividades preparadas por ellos y uso de materiales manipulables. Los maestros se ciñen al currículum de educación primaria el cual, en relación a las figuras geométricas, se centra en la identificación, construcción y clasificación de las mismas siguiendo algún criterio; y en la introducción progresiva del vocabulario específico de geometría.

Instrumento y procedimiento

El instrumento de recogida de datos consistió en una entrevista clínica con actividades entre las que había algunas de ellas diseñadas *ad hoc* y otras adaptadas de investigaciones previas (Clements et al., 1999; Sarama y Clements, 2009). El guion de la entrevista clínica fue el mismo para todos los cursos, a excepción del correspondiente al primer curso en el que no se presentaron las tareas relacionadas con la identificación de atributos de los triángulos (longitud de los lados y la amplitud de sus ángulos), al no tratarse de un contenido curricular del curso. Las entrevistas fueron grabadas en video. La entrevista constaba de 17 actividades agrupadas en dos tipos: 9 actividades de reconocimiento (Figura 1) y 8 de clasificación. En las actividades de reconocimiento se incluían el reconocimiento de atributos y las diferencias entre figuras, el reconocimiento de una figura a partir de un listado de atributos y, la distinción entre polígonos/no polígonos. En las actividades de clasificación se incluían 6 actividades de clasificación de un grupo de figuras de forma libre y atendiendo a un criterio del entrevistador y, 2 actividades de clasificación de un grupo de polígonos considerando dos criterios simultáneamente proporcionado por el entrevistador. Los atributos considerados en las figuras fueron: polígonos/no polígonos, y sus propiedades: lados rectos/curvos, figuras cerradas/abiertas, lados cruzados/no cruzados, número de lados y la concavidad/convexidad.

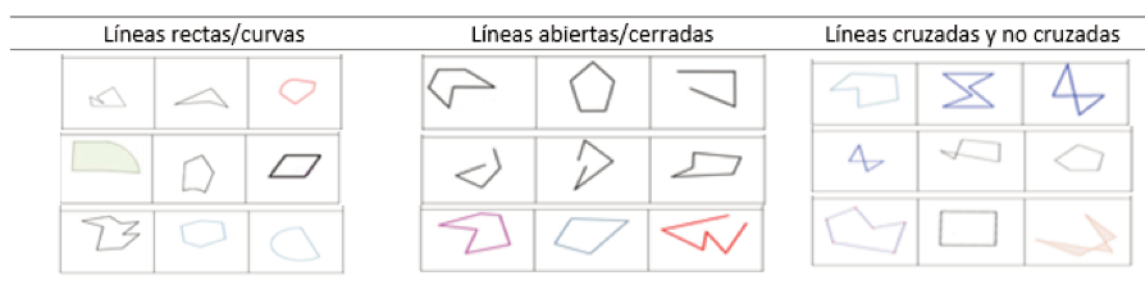


Figura 1. Ejemplos de figuras para reconocer atributos

Análisis

Para el análisis de los datos, inicialmente se visualizaron los vídeos de las entrevistas y analizaron las transcripciones para identificar los aspectos relevantes del proceso de resolución de las tareas. A partir de las transcripciones de las entrevistas clínicas realizadas a los niños de primaria para su análisis se siguió un método inductivo que nos permitió generar descriptores y categorías de observación para obtener evidencias del pensamiento de los alumnos (Clement, 2000). En el análisis, se tuvieron en cuenta las aprehensiones ejecutadas por los niños (perceptual, discursiva y operativa) junto con los atributos reconocidos y usados en cada tarea. Así, para cada alumno describimos la manera en la que resolvía cada tarea considerando las aprehensiones que ponía en práctica (perceptual, discursiva y operativa), y los atributos considerados (número de lados, concavidad/convexidad, figuras cerradas/abiertas, lados rectos/curvos, y/o cualquier otra diferencia mencionada por los niños). A continuación, generamos una inferencia de lo que parecía significar la conducta del niño desde la perspectiva del reconocimiento de diferentes atributos de las figuras y cómo los clasificaba.

Los códigos generados fueron asociados a los mecanismos cognitivos referidos a las aprehensiones perceptual, discursiva y operativa considerando los atributos de las figuras mencionados por los niños como una manera de poner de manifiesto el carácter progresivo de la interacción entre lo perceptual y lo conceptual. A partir de estos códigos, generamos categorías explicativas del proceder de los niños. Estas características son las que describiremos en la sección de resultados.

Con respecto a las actividades de clasificar figuras geométricas libremente, hubo cierto progreso a lo largo de los cursos en la capacidad de clasificar polígonos/no polígonos, y en triángulos/cuadriláteros. Sin embargo, considerar el número de lados como un criterio de clasificación fue difícil para los niños de todos los cursos, siendo menor el progreso de esta capacidad. En este caso, los niños solían incluir figuras que no correspondían con el número de lados que tenían. El otro criterio de clasificación que también mostró un menor progreso fue la clasificación de polígonos cóncavos/convexos. La clasificación de los triángulos por la longitud de sus lados y por la amplitud de sus ángulos tuvo menor progresión y se evidenció como el de mayor dificultad el atributo relacionado con la amplitud de sus ángulos. Todas estas dificultades estuvieron presentes a lo largo de todos los cursos de primaria. Respecto a las tareas de clasificar siguiendo un criterio proporcionado, la evolución fue similar a las de clasificar de manera libre.

Con respecto a las tareas de clasificar siguiendo dos criterios, se puso nuevamente de manifiesto la dificultad de los niños de los primeros cursos de primaria en reconocer las figuras cóncavas o convexas y en contar el número de lados. No fue hasta cuarto donde se empezó a ver cierta evolución en la capacidad para reconocer estos atributos, combinarlos y poder clasificar adecuadamente las figuras. Con los triángulos, a partir de quinto hay una cierta evolución en la capacidad de combinar la longitud de los lados y la amplitud de sus ángulos para clasificar, si bien se trató de una tarea de especial dificultad para los niños de quinto curso.

Teniendo en cuenta el tamaño de la muestra, y sin pretender establecer generalizaciones, podemos avanzar que estos resultados definen dos ámbitos que nos aportan información para ayudarnos a comprender cómo progresan los niños/as de 6 a 12 años desde el reconocimiento perceptual de las figuras (la figura como un todo) a su comprensión conceptual (reconociendo sus atributos y combinándolos): (a) la influencia de lo perceptual sobre el concepto figural demostrado en las actividades de reconocer figuras, y (b) la forma en la que los niños/as de 6 a 12 años admiten las figuras como elementos de una clase.

La influencia de lo perceptual sobre el concepto figural en el reconocimiento de figuras

En los primeros años, el reconocimiento de las figuras por parte de los niños era básicamente perceptual y reconocían la figura como un todo (aprehensión perceptual) sin reconocer sus partes o atributos. Por ello, no llegaron a reconocer, ni a clasificar, muchas de las figuras que se alejaban de la figura prototípica. Un ejemplo de la respuesta de los niños que evidencia la perspectiva meramente perceptual (Figura 1) se dio en el caso de las figuras convexas de muchos lados, que eran identificadas como círculos o figuras con lados curvos (Figura 1).

- I: Vale, ¿en que se parecen estas dos que se diferencian de esta?
 E2-2: Esta son líneas curvas (tercera figura) y estas no (primera y segunda figura).



Figura 1. Tarea de reconocimiento de atributos

Además, en los primeros cursos solían comparar algunas figuras no prototípicas con objetos de la vida cotidiana mostrando la perspectiva perceptual y no analítica. A continuación, mostramos un ejemplo que evidencia lo anterior (Figura 2).

- I: ¿En qué se parecen estas dos figuras que se diferencian de esta?



Figura 2. Tarea de reconocimiento de atributos

E1-3: Porque estas dos no tienen ninguna línea cruzada (izquierda) y esta hace como un reloj de arena (derecha).

En las tareas de clasificar (Figura 3), los niños de los cursos iniciales no reconocieron las propiedades de las figuras, y acabaron agrupándolas por su semejanza perceptual.

I: Vale, explícame, ¿por qué has agrupado así?

E1-2: Porque estas se parecen (las de la izquierda) y estas no (las de la derecha).

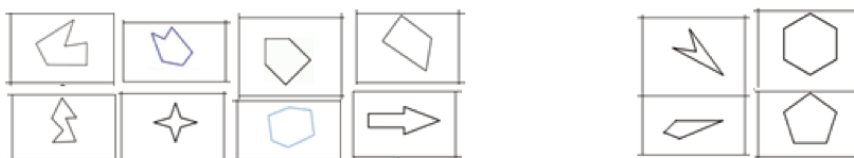


Figura 3. Tarea de clasificar polígonos en cóncavos y convexos sin proporcionar criterio

Así, en muchas clasificaciones, reconocían figuras con pocos o muchos picos, cuando agrupaban según el número de lados, o en figuras que se parecen a círculos o que tienen picos, para agrupar las figuras cóncavas y convexas, tal y como se evidencia en el protocolo siguiente (Figura 4).

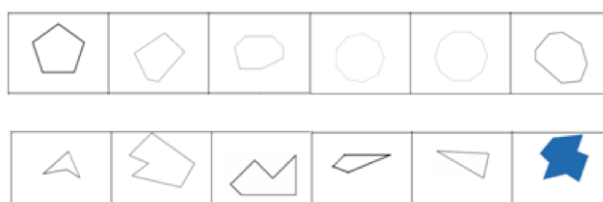


Figura 4. Tarea de clasificación de polígonos por número de lados sin proporcionar criterio

I: ¿Por qué has agrupado así?

E1-4: He agrupado las que se parecen más a un círculo en un sitio (arriba) y las que más se parecen a triángulos o a cuadrados o figuras raras como esta (señalando el eneágono cóncavo) en otro sitio (abajo).

Conforme avanzan los cursos, la perspectiva analítica empieza a complementar a la perspectiva perceptual lo que hace que los alumnos se fijaran más en las partes de las figuras (aprehensión perceptual y discursiva). Por ejemplo, a partir de tercero de primaria, ya no usaban el criterio de agrupación de “porque se parecen”, sino que indicaban cuál había sido el atributo usado para realizar dicha agrupación. Lo mismo sucedió al agrupar atendiendo al número de lados (Figura 5), los niños ya no se referían a “muchos o pocos picos”, sino que consideraron el número de lados de las figuras.

I: Explícame, ¿por qué has agrupado así?

E3-10: Porque tienen los segmentos iguales. Estos que tienen nueve segmentos los he puesto juntos (1), estos tienen cinco segmentos los he puesto juntos (2), este que tiene diez segmentos como no hay ninguna más que tiene diez segmentos la he puesto sola (3), esta que tiene tres segmentos la he puesto sola porque no hay ninguna más de tres segmentos (4), esta de ocho segmentos no la he puesto con ninguna porque tampoco tenía pareja (5), y esta de siete segmentos tampoco había otro de siete segmentos y se ha quedado sola (6).

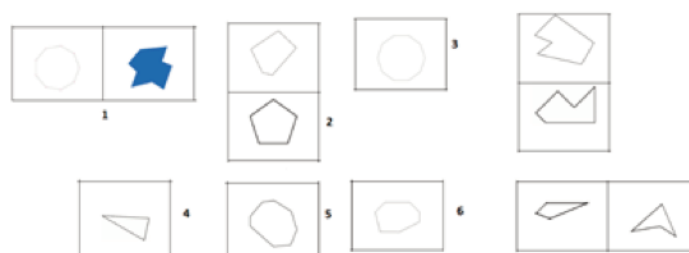


Figura 5. Tarea de clasificación de polígonos por número de lados sin proporcionar criterio

Sin embargo, los niños/as podían cometer errores al contar el número de lados, pues en las actividades de clasificar podían incluir un octógono con un eneágono o un eneágono con un decágono. Lo mismo sucedía en las agrupaciones de figuras cóncavas y convexas, ya que incluían las figuras de la estrella y la flecha en el grupo de los convexos, cuando ambas son cóncavas.

I: Vale, ¿cuál ha sido tu criterio para agrupar?

E3-3: Porque estas tienen los picos para fuera (izquierda) y estas tienen picos para dentro (derecha).

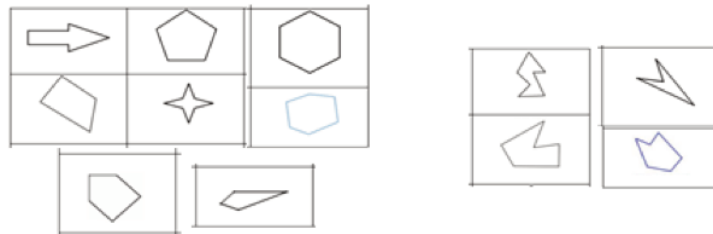


Figura 6. Tarea de clasificar polígonos en cóncavos y convexos sin proporcionar criterio

La influencia de la perspectiva analítica sobre la perceptual fue progresando a lo largo de los cursos siempre vinculada a los atributos considerados. En los últimos cursos, las respuestas de los estudiantes mostraban una presencia cada vez mayor del uso de los atributos, lo que desde nuestro punto de vista evidenciaba el control de la componente conceptual sobre la perceptual en las actividades de clasificar. Así por ejemplo, los niños a partir de 10 años, mostraron mayor habilidad para contar los lados de los polígonos lo que les permitió clasificarlos según el número de lados sin cometer errores y, en relación a las figuras cóncavas y convexas, desapareció la confusión que tenían con las figuras cóncavas en cursos anteriores (flecha y la estrella), lo que favoreció que los niños entre 11-12 años pudieran analizar las figuras, reconocer sus características y clasificarlas, atendiendo a sus propiedades.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados indican que el control de la componente conceptual sobre la perceptual, en la comprensión de las figuras como elementos de una clase, es progresivo y depende de los atributos considerados. Estos datos apoyan la existencia de un “nivel sincrético” (Clements et al., 1999) en el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas que muestra cómo el reconocimiento progresivo de los atributos que refleja la perspectiva analítica va superando a la perspectiva perceptual, y nos obliga a profundizar en esta línea de trabajo aumentando la muestra. Este avance de la perspectiva analítica en las actividades de reconocer y clasificar figuras lo podemos entender como un mayor control de la componente conceptual y, por tanto, como una mejor constitución del concepto figural (Fischbein, 1993).

El dominio de la perspectiva perceptual en los primeros cursos impide a los niños poder reconocer los atributos de las figuras geométricas. Este hecho se apoya en el papel que desempeñan las figuras prototípicas como anclaje de la perspectiva perceptual, lo que impide el desarrollo de la perspectiva analítica (Scaglia y Moriena, 2005). Por ejemplo, los niños están acostumbrados a reconocer triángulos equiláteros con la base paralela al borde de la hoja por mera percepción de la figura como un todo (aprehensión perceptual).

Los resultados de esta investigación indican la existencia de la complementariedad de lo perceptual y lo conceptual, en los primeros cursos de educación primaria, para reconocer atributos y clasificar las figuras. A lo largo de los años, los niños progresan evidenciando un mayor control de lo conceptual frente a lo perceptual, superando la influencia de las figuras prototípicas. Esta complementariedad vinculada a los diferentes atributos que podemos considerar en las figuras, apoyan la existencia de un nivel “sincrético” entre lo perceptual y lo analítico en una clasificación por niveles más generales (Clements, et al., 1999; Fujita, 2012; Hershkowitz et al., 1990; Yesil-Dagli y Halat, 2016). Nuestros resultados in-

dican que conforme avanzan los cursos, mayor es la capacidad para analizar las figuras geométricas y menor la influencia de la perspectiva perceptual (aprehensión perceptual); sin embargo, esta progresión no es uniforme para los diferentes atributos de una figura (Walcott, Mohr y Kastberg, 2009).

Por otra parte, nuestros resultados ponen de relieve que el control del concepto de polígono (cuyo significado es fijado por la definición de figura cerrada de lados rectos y no cruzada) sobre la variedad de posibles ejemplos usados, es relevante y evidencia la constitución del concepto configural por parte de los estudiantes. El uso de diferentes atributos en los polígonos (número de lados, cóncavos/convexos) puso de manifiesto esta progresión a través de la habilidad de controlar los diferentes ejemplos particulares de polígonos usados mediante el conjunto de atributos dados por la definición del concepto de polígono. Además, esta evolución en la manera en la que lo conceptual empieza a gobernar a la perspectiva perceptual tuvo un reflejo en un empleo cada vez más consciente de los términos específicos para los atributos. Los niños progresivamente justificaban sus acciones, usando los términos más acordes al contexto y empleando expresiones más adecuadas. Esta cuestión genera cuestiones de investigación adicionales en relación al papel que desempeña el lenguaje en las acciones cognitivas de control de la componente conceptual sobre la componente perceptual en el desarrollo de comprensión de las figuras como elementos de una clase (como una evidencia del desarrollo del pensamiento categorial).

Finalmente, y desde un punto de vista didáctico, estos resultados sugieren que los alumnos de primaria deberían aprender a analizar los atributos que caracterizan las figuras geométricas y decidir su pertenencia a una determinada clase de figuras según la definición (lo conceptual) independientemente de la información perceptual, como una manera de desarrollar un tipo de pensamiento a través de las categorías que va más allá de la educación matemática (Gagatsis et al., 2010; Guillem y Figueras, 2004; Hershkowitz et al., 1990; Levenson et al., 2011).

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España.

Referencias

- Arnas, Y. A. y Aslam, A. G. D. (2010). Children's classification of geometric shapes. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 19(1).
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 547-589.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 192-212.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Berlin, Springer, pp. 142- 157.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*. Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE, pp. 3-26.
- Elia, I. y Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, 11(2), 43-61.
- Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.

- Fischbein, E. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.
- Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panoura A. y Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematica*, 10, 33-50.
- Guillen, G. y Figueras, O. (2004). Un estudio exploratorio sobre la enseñanza de la Geometría en Primaria. Elaboración de una encuesta. En E. Castro y E. de la Torre (eds.) *Investigación en Educación Matemática VIII*, La Coruña: SEIEM.
- Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. Text of an invited conference in "Encuentro de Investigación en Educación Matemática", TIEM-98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, manuscript.
- Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M. y Vinner, S. (1990). Psychological En P. Neshet & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (ICMI Studies, pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press aspects of learning geometry.
- Levenson, S. Tirosh, D. y Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry. Theory, Research and Practical Perspectives*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 43-65). Bilbao: SEIEM.
- Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17(3), 105-120.
- Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81-95.
- Walcott, C., Mohr, D. y Kastberg, S. E. (2009). Making sense of shape: An analysis of children's written responses. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 30-40.
- Yesil-Dagli, U. y Halat, E. (2016). Young Children's conceptual Understanding of Triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(2), 189-202.