

## CÓMO LOS ALUMNOS PASAN DEL MODELO SITUACIONAL AL MODELO MATEMÁTICO EN UN PROBLEMA DE NIVEL MEDIO BÁSICO

Luis David Benítez Lara, Lidia Aurora Hernández Rebollar y Josip Slisko

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

dblster@gmail.com, lhernan@fcm.buap.mx, jslisko@fcm.buap.mx

**Palabras clave:** problemas contextualizados, modelo situacional, modelo matemático

**Key words:** word problems, situational model, mathematical model

**RESUMEN:** En este trabajo analizamos cómo estudiantes de nivel medio superior pasan del modelo situacional al modelo matemático cuando trabajan con un problema de nivel medio básico. El análisis se hace a través de los dibujos, que se les solicitan a los estudiantes, en un cuestionario diseñado explícitamente para esta investigación. El cuestionario contiene un problema que se encuentra en un libro de texto de educación media básica (Arriaga, 2008), y que ha sido objeto de investigación debido a que se ha detectado que el porcentaje de respuestas correctas es bajo en alumnos de los niveles medio básico, medio superior y superior (Hernández, Slisko y Benítez, 2012).

**ABSTRACT:** This paper analyzes how senior high students pass from the situational model to the mathematical model when they're working with a problem of basic level. The analysis is done through drawings, which were required from students in a test specifically designed for this research. The test has a problem that you could find in a textbook of high school education (Arriaga, 2008), this problem has been a research object because we have found that the percentage of correct answers of the students is low in the basic, middle and higher level (Hernández, Slisko y Benítez, 2012).

## ■ INTRODUCCIÓN

El problema al que se refiere esta investigación es el siguiente:

*Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Si del punto límite camina 15 pasos en sentido contrario a la fosa y un paso de ella equivale a 0.70 m y su salto es de 3.80m, ¿con qué número con signo representas el recorrido previo al salto?*

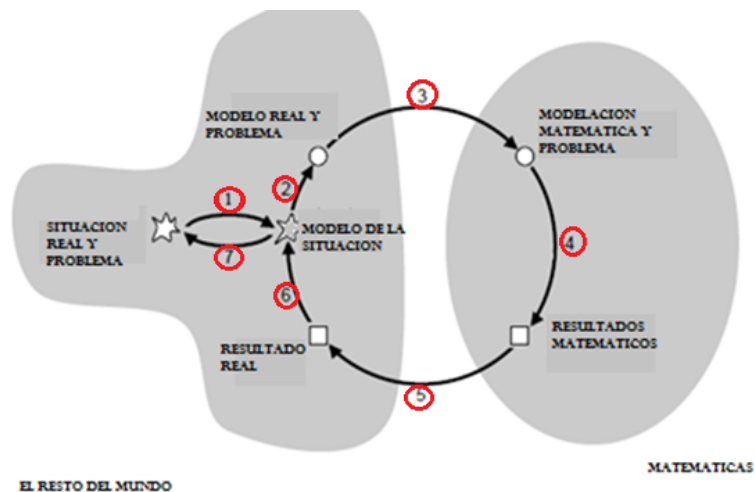
En Hernández, Rodríguez y Slisko (2010) se muestra que este problema describe una situación ambigua que no favorece la obtención de la respuesta considerada correcta en estudiantes de nivel medio básico. En Benítez (2014) se estudia la construcción del modelo situacional de este problema por parte de estudiantes del nivel superior y se concluye que la redacción y el vocabulario utilizado provocan la construcción de diferentes modelos de la situación. Aun en este nivel, sólo el 50% de la muestra obtiene la respuesta correcta. En cuanto al modelo matemático de este problema, se considera como tal a la recta numérica, la cual apareció escasamente en el nivel superior y no se presentó en el nivel medio básico.

Otros resultados que se han observado en estas investigaciones previas es que cuando aparece el modelo matemático, éste aparece mezclado con el modelo situacional. En Hernández, Slisko y Benítez (2012) se prueban diferentes redacciones del problema de tal forma que éstas contribuyan a obtener la respuesta correcta. Sin embargo, la mejora fue baja, apenas de 4 puntos porcentuales.

En el estudio que presentamos ahora, utilizamos las versiones del problema propuestas en Hernández, Slisko y Benítez (2012), las presentamos a estudiantes de nivel medio superior y les solicitamos dos dibujos, uno de la situación y otro simplificado con la finalidad de explorar el tránsito del modelo situacional al modelo matemático en estos estudiantes. El objetivo es investigar de qué manera los estudiantes de nivel medio superior elaboran el modelo situacional de un problema y qué dificultades se les presentan cuando pasan al modelo matemático. Otro de los objetivos de esta investigación es averiguar si alguna de las versiones favorece la construcción de los modelos mencionados. Al modificar la redacción del problema exploramos si alguna de las dos versiones favorece la construcción del modelo situacional y del modelo matemático.

## ■ MARCO TEÓRICO

La elaboración del modelo matemático es un problema didáctico de gran interés, y se ha mostrado que es difícil, tanto para profesores como alumnos, dado que es el proceso de traducción del mundo real a las matemáticas y tiene una demanda cognitiva muy significativa (Blum y Borromeo, 2009). El ciclo de modelación de Blum y Leib (2006) describe el proceso cognitivo que se sigue cuando se resuelve un problema que requiere de la modelación matemática.

**Figura 1.** Ciclo de modelado de Blum y Leib (2006)

El primer paso en ese ciclo implica la construcción de un modelo de la situación. Después, esta situación debe ser simplificada, estructurada y precisada, lo que lleva a un modelo real. La matematización transforma al modelo real en un modelo matemático que generalmente consta de ciertas ecuaciones. Cuando los estudiantes se enfrentan a un problema verbal de matemáticas las tres etapas mencionadas antes se reducen a dos, construcción del modelo situacional y obtención del modelo matemático. El primer paso de este ciclo se explica con la teoría de Teun A. van Dijk y W. Kintsch (1983) la cual postula que al leer, se trabaja con 3 niveles de representación mental: el código de superficie, la base de texto y el modelo de la situación. Este último nivel puede entenderse como la imagen mental que el sujeto construye cuando comprende el problema. Tijero Neyra, T. (2009) considera que la construcción de un modelo situacional coherente es esencial para una adecuada comprensión del texto. Además Van Essen y Hamaker (1990) afirman que generar un diagrama facilita la conceptualización de la estructura del problema y es el primer paso para obtener una exitosa solución. Por lo anterior, en este trabajo consideramos que los dibujos de los estudiantes nos permiten ver cómo entienden el problema y si tienen una idea coherente con la situación. Diezmann (2000) concluye que los diagramas son una herramienta importante para la resolución de problemas, sin embargo, los beneficios de cualquier instrumento utilizado están estrechamente asociados con el conocimiento de los usuarios de éste y el desarrollo de sus habilidades cuando hacen uso de él.

En este trabajo usamos a los dibujos que los alumnos hacen de la situación, como una representación del modelo situacional, y para ayudarles a obtener el modelo matemático les solicitamos trazar un segundo dibujo, más simple que el primero, pero en el cual se conserven los elementos más importantes del problema planteado.

## ■ METODOLOGÍA

La metodología utilizada en esta investigación es de tipo cualitativo. Consistió en: (1) el diseño de 2 instrumentos con dos variantes del problema mencionado en la introducción, (2) el análisis de los dibujos solicitados a los alumnos, con la finalidad de observar la transición del modelo situacional al matemático, y (3) la comparación de los modelos construidos de acuerdo a cada una de las versiones.

Los participantes fueron 64 alumnos de 2do, 4to y 6to semestre de una preparatoria particular del estado de Tlaxcala, México en 2012. Denotamos a cada estudiante como E- $n$ , donde  $n$  es alguno de los 64 estudiantes.

El problema al que se refiere esta investigación se encuentra en un libro de texto del segundo grado de educación secundaria distribuido por la SEP (Arriaga, 2008). A este problema le llamaremos la versión original.

En el instrumento 1 se toma en cuenta la versión original del problema, además de las siguientes instrucciones:

- En el espacio de abajo dibuja lo más fiel posible la situación descrita en el problema, tal como la entiendes tú. A cada parte importante del dibujo agrega un nombre.

Para ayudar a construir el modelo matemático se les dio la siguiente instrucción:

- Simplifica el dibujo anterior lo más que puedas, dejando solamente lo que es necesario para la solución. Es importante que en este dibujo incluyas todos los números que aparecen en el texto del problema.

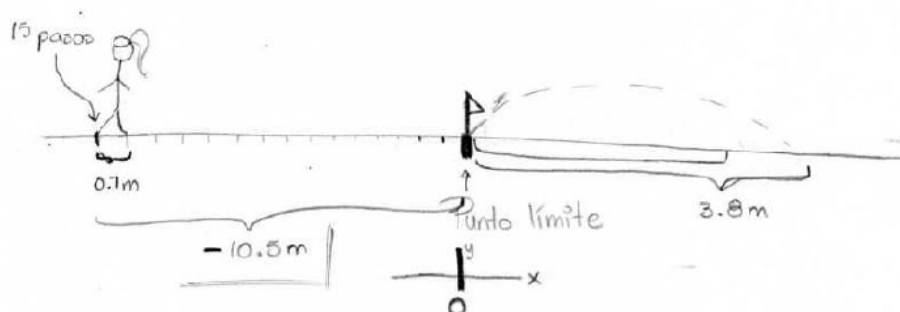
En el instrumento 2 elaboramos otra versión del problema, a la que llamaremos versión modificada, para probar si al modificar el lenguaje y la redacción se facilitaba la construcción de los modelos situacional y matemático. El instrumento 2 también cuenta con las mismas instrucciones que el instrumento 1. La versión modificada es:

Cecilia participa en una competencia de salto de longitud. Se prepara verificando la pista donde correrá y el punto desde donde saltará. Desde el punto del salto, ella da 15 pasos para regresar a la línea de salida porque ya es su turno de competir. La longitud de su salto fue de 3.8 m.

Los resultados que presentaremos muestran que, aun cuando se les solicitó a los alumnos dos dibujos, uno de la situación que planteaba el problema, el cual se esperaba realista, y otro más sencillo, en el que se esperaba que apareciera la recta numérica, ocurrió que ellos hicieron el mismo dibujo para los dos casos. Además, otros estudiantes elaboraron el primer dibujo más sencillo que el segundo. Por tanto, esta investigación permite reflexionar sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes para transitar del modelo situacional al modelo matemático al momento de resolver un problema y sobre las posibles intervenciones que deben hacer los docentes para favorecer este tránsito.

## ■ ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el problema de investigación, un dibujo que describe adecuadamente la situación que plantea el problema es el siguiente:

**Figura 2.** Dibujo que representa la situación del problema

El dibujo mostrado en la figura 2 tiene combinados los dos modelos. Es el adecuado dado que el modelo matemático para resolver este problema es la recta numérica. Los estudiantes tienen que indicar la posición de Cecilia, antes de que haga su salto en la recta después de contar los pasos.

Dependiendo de los elementos en cada dibujo y de la forma en que lo presentaron, los dibujos hechos por los estudiantes los clasificamos en 5 casos que son:

- Caso 1: Algunos alumnos, al leer la indicación de hacer los dos dibujos, repitieron el mismo.
- Caso 2: A pesar de que su dibujo ya era sencillo, lo simplifican aún más.
- Caso 3: Su primer dibujo es abstracto y cuando le piden la simplificación le agrega más detalles.
- Caso 4: El primer dibujo es sencillo, pero el segundo tiene elementos matemáticos como la recta numérica.
- Caso 5: Los dibujos no están unificados o no representan la situación.

En la tabla 1 aparece la cantidad de dibujos que hicieron los estudiantes en cada uno de los casos y separados por versión del problema. Denotamos con O a la versión original y con M a la versión modificada.

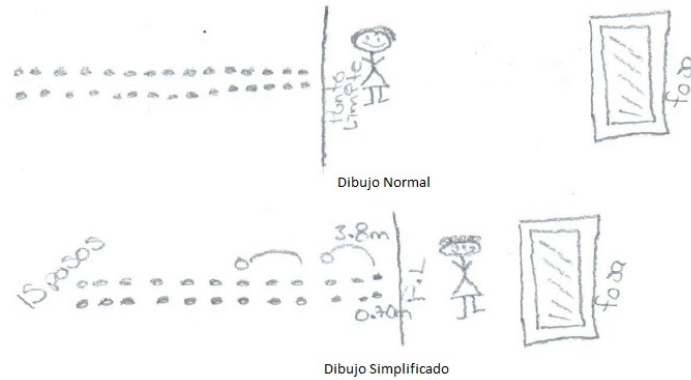
**Tabla 1.** El número total de dibujos separados por casos.

Versión	Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4		Caso 5		No Dibujó		Total
	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M	
Total	9	6	6	3	1	5	6	4	9	4	2	9	64
Total	15		9		6		10		13		11		64

Podemos percatarnos que el Caso 1 (Hacer el mismo dibujo) es el que tiene más frecuencia, esto quiere decir que la mayoría de los estudiantes no supieron cómo hacer el dibujo más simplificado.

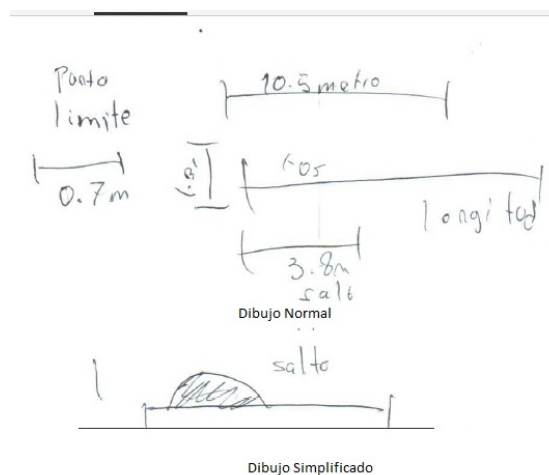
La figura 3 muestra un ejemplo de los dibujos que están considerados en el Caso 1:

**Figura 3.** Ejemplo del Estudiante E-34 del Caso 1.

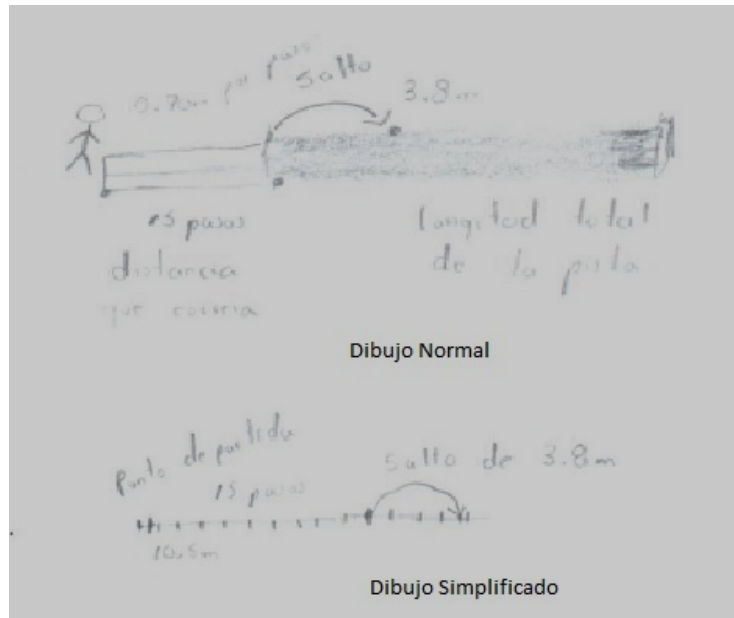
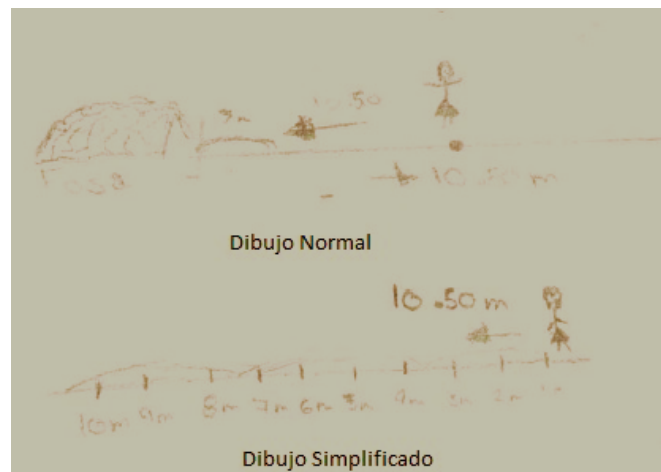


El segundo caso con mayor frecuencia fue el Caso 5, donde los estudiantes no entendieron la situación del problema y por esta razón sus modelos no son los adecuados. En la figura 4 se muestra un ejemplo en el que el estudiante no pudo unificar todos los elementos descritos del problema ya que dibuja de manera separada cada paso, la fosa, etc. De esta forma podemos comprobar que un modelo situacional no adecuado, impide la construcción de un modelo matemático útil.

**Figura 4.** Ejemplo del Estudiante E-21 del Caso 5



El caso que más nos interesa es el número 4, ya que en éste aparecieron elementos matemáticos en el segundo dibujo. Algunos ejemplos de este caso son los siguientes:

**Figura 5.** Ejemplo del Estudiante E-12 del Caso 4**Figura 6.** Segundo Ejemplo del Estudiante E-24 del Caso 4

En los ejemplos de las figuras 5 y 6 podemos ver que, en el segundo dibujo, ya se involucra a la recta real, que es el modelo matemático esperado. Observamos cómo estos estudiantes pasan de un modelo a otro de manera adecuada ya que el segundo más abstracto.

## ■ CONCLUSIONES

Esta investigación nos muestra que los estudiantes no están familiarizados con la elaboración de dibujos abstractos, porque al pedirles que hicieran los dos dibujos, éstos fueron hechos en su mayoría, exactamente iguales.



A pesar de que un significativo número de estudiantes dibujó la recta real como modelo matemático, su modelo situacional no fue el adecuado, dado que en unos casos confundieron el salto de longitud con salto de altura.

Los estudiantes que no tenían un modelo situacional adecuado no pudieron construir el modelo matemático.

El caso que más nos interesaba es el Caso 4, comparando las dos versiones, observamos que en la versión original (O) tuvimos más modelos adecuados a la situación planteada por el problema que en la versión modificada. Por esta razón nuestra modificación no tuvo los resultados esperados ya que pensamos que con esta modificación el número de alumnos que lograban los modelos situacional y matemático correctos aumentaría. Como no fue así, debemos idear otros cambios.

En los libros de texto de matemáticas es común encontrar, en el mismo dibujo, una mezcla del modelo situacional y del modelo matemático. Por esta razón, no es extraño que los estudiantes no lo puedan elaborar por separado de manera adecuada.

## ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arriaga Coronilla, A. (2008). *Matemáticas 2, Introducción a las competencias. Educación Secundaria*. 2da. Edición, página 20. México: Pearson Educación.
- Benítez Lara, L. (2014). *La contextualización de un problema cuya solución es supuestamente un número negativo: ¿cómo los estudiantes construyen el modelo situacional y el modelo matemático?* Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.
- Blum y Borromeo, (2009). *Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt?* Journal of Mathematical Modelling and Application. Vol 1, No. 1, 45-58.
- Blum, W. y Leib, D (2006). "Filling up" – *The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks*. In: Bosch, M- (Ed.), CERME-4 – Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Guixol.
- Diezmann, Carmel M (2000). *The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems*. In Nakahara, T and Koyama, M, Eds. Proceedings 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pages 241-248, Hiroshima, Japan.
- Hernández, Slisko y Benítez (2012). *El desempeño de los estudiantes en un problema cuya solución debería ser un número negativo: la influencia del contexto, del lenguaje y del dato sobrante*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa No. 25, pág. 95-104.
- Hernández Rebollar, L. A., Rodríguez Martínez, F. J. y Slisko Ignjatov, J. (2010). *Las Dificultades de los Estudiantes de Secundaria al Resolver un Problema que Involucra los Números con Signo: una interpretación ontosemiótica*. Memorias del VIII Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas: CVEM 2010.



Tijero Neyra, T. (2009). *Representaciones Mentales: discusión crítica del modelo de la situación de Kintsch*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile Van Dijk, T., y Kintsch, W. (1983). *Strategies of Discourse Comprehension*. New York: Academic Press.