

## Elementos de Visualización en la Resolución de Tareas de Semejanza

*Élgar Gualdrón, [egualdron@unipamplona.edu.co](mailto:egualdron@unipamplona.edu.co)*

*Grupo de Investigación EDUMATEST. Universidad de Pamplona*

**Resumen.** *En este trabajo se presentan resultados parciales de una investigación en la cual se están estudiando, entre otras cosas, las formas y la evolución del razonamiento que tienen los estudiantes al abordar tareas relacionadas con la semejanza, a través de una unidad de enseñanza planteada por Gualdrón (2008). La muestra del estudio es un grupo de estudiantes de noveno grado (14-15 años) de un colegio de Pamplona-Norte de Santander (Colombia). El análisis del conjunto de datos nos confirma la relación compleja que existe entre la habilidad para construir y usar imágenes mentales, preferencia para tal uso, y el papel de estas imágenes en la construcción de significados en el aprendizaje de este tópico.*

### 1. Fundamentación teórica

La unidad de enseñanza utilizada en este estudio (Gualdrón, 2008) fue diseñada teniendo en cuenta estudios de Lemonidis (1991), una caracterización de niveles de Van Hiele para la semejanza en estudios de Gualdrón (2007) y elementos de visualización siguiendo a Gutiérrez (1996).

El estudio, desde el punto de vista de la enseñanza de la semejanza, tuvo en cuenta los de Lemonidis (1991), quien caracterizó una aproximación al concepto cuando éste se considera como objeto de enseñanza:

- a) Relación intrafigural: Donde se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra. Dentro de esta aproximación distingue:
  - Cuando las figuras forman parte de una configuración de Thales, en la que se consideran los aspectos de proyección y homotecia, con sus correspondientes razones.
  - Cuando las figuras aparecen como figuras separadas.

b) Transformación geométrica vista como útil: La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como útil en la resolución de problemas.

c) Transformación geométrica vista como objeto matemático: Se caracteriza porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Vasco (1998) plantea que “El currículo colombiano [en geometría] no se apoya en la geometría transformacional...”. También, en relación a lo planteado por Vasco, Swoboda y Tocki (2002) plantean que el enfoque de enseñanza de la semejanza por transformaciones se dirige más a la matemática vista como ciencia y no está guiada por los aspectos psicológicos del aprendizaje de las matemáticas. En consecuencia, y dadas las edades de los estudiantes en las que pensamos desarrollar el estudio (14-15 años), decidimos contemplar únicamente la relación intrafigural y la transformación geométrica vista como útil.

El modelo de razonamiento de Van Hiele (Van Hiele, 1957; Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez y Jaime, 1996) está demostrando que es un excelente referente teórico para la organización y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Un buen ejemplo de ello es NCTM (2003). Este modelo, desde su aparición, ha sido ampliamente estudiado, no solamente en su aplicación (Jaime, 1993; Guillén 1997; Ding y Jones, 2006) sino también en su ampliación y/o mejoramiento (Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Gutiérrez y Jaime, 1998). No obstante, la semejanza es un tema de geometría en el que la investigación sobre la aplicación del modelo de Van Hiele es muy limitada (Gualdrón, 2006). En nuestro estudio hemos utilizado los descriptores de nivel planteados en Gualdrón (2007) y una ampliación de estos.

Cuando se aborda el significado del término visualización, indiscutiblemente entramos en un extenso campo que es a la vez interesante y complejo. El estudio de la visualización ha sido abordado, casi desde sus inicios, por psicólogos quienes dieron las bases para que los matemáticos y educadores matemáticos, siendo conscientes de su importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje, la tomaran como un objeto de estudio.

La visualización ha sido objeto de estudio para psicólogos y educadores matemáticos, pero también para especialistas de muchas otras áreas científicas. Una consecuencia de tan amplio interés por este tema es que han sido muchos los términos usados para hablar de lo mismo. Por ejemplo, se ha hablado de “visualización”, “sentido espacial”, “percepción espacial”, “cognición espacial”, “inteligencia espacial”, “imagería visual”, “razonamiento o pensamiento espacial”,

“habilidad espacial”, “razonamiento visual” e “imaginación” para hacer referencia a una clase de razonamiento (actividad mental) que se utiliza en la resolución de problemas matemáticos. Obviamente, cada investigador, en sus respectivos estudios, ha usado los matices que ha considerado necesarios. En cuanto a la diversidad de términos usados, hace ya más de una década Gutiérrez (1996) había planteado la ausencia de acuerdo en la terminología usada en el campo de la visualización; hoy día, la situación no es diferente.

Asumimos la visualización en matemáticas en el sentido de Gutiérrez (1996) para quien ésta está constituida por: “imágenes mentales”, “representaciones externas”, “procesos de visualización” y “habilidades de visualización”. Una imagen mental es “cualquier clase de representación cognitiva de un concepto matemático o propiedad por medio de elementos visuales o espaciales”. Una representación externa es “cualquier clase de representación gráfica de conceptos o propiedades incluyendo dibujos, bosquejos, diagramas, etc. que ayuda a crear o transformar imágenes mentales y a hacer razonamiento visual”. Un proceso de visualización es “una acción mental o física en donde las imágenes mentales están involucradas”. Las habilidades de visualización son aquellas destrezas operatorias que “los individuos deben adquirir y perfeccionar para realizar los procesos necesarios con imágenes mentales en la resolución de un problema dado”.

En este reporte daremos cuenta del uso que hacen los estudiantes de imágenes mentales (usando principalmente la tipología de Presmeg, 1986) y habilidades de visualización en la resolución de tareas matemáticas relacionadas con la semejanza (usando principalmente la tipología de Del Grande, 1990).

## **2. Metodología**

La muestra del estudio estuvo formada por 27 estudiantes (14-15 años) de un colegio de Pamplona (Colombia). Era la primera vez que estos estudiantes recibían instrucción sobre el tema de semejanza. En el mismo curso ya habían desarrollado lo relacionado al teorema de Thales y, en un curso anterior, lo relacionado a las homotecias<sup>4</sup>.

Cada actividad de la unidad de enseñanza fue diseñada para ser presentada en hojas individuales, y sobre las cuales el estudiante debía justificar cada uno de los procesos que lo conducían hacia la

---

<sup>4</sup> Parte importante del contenido matemático de la unidad de enseñanza (Gualdrón, 2008) tienen que ver con la conexión entre la semejanza, la homotecia y el teorema de Thales.

respuesta (numérica y/o gráfica y/o verbal). Para el desarrollo de cada una de las actividades el estudiante podía utilizar reglas, escuadras o cintas métricas, compás, transportador de ángulos, tijeras y calculadora, entre otros elementos auxiliares.

*Metodología de trabajo en clase:* En la experimentación estuvieron presentes el profesor titular y el investigador. Éste último asistió a todas las clases en calidad de observador participativo, observando la actividad de los estudiantes y, al mismo tiempo, colaborando con el profesor en las tareas de asesoramiento y orientación a los estudiantes durante las sesiones de clase.

Las actividades de la unidad de enseñanza se plantearon de forma secuenciada y fueron entregadas una a una a cada estudiante en fotocopias. El medio escolar en el que se llevó a cabo la experimentación de la unidad de enseñanza fue el aula de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo en pequeños grupos de tres estudiantes. Todas las actividades fueron realizadas dentro de la jornada escolar.

En total la experimentación se compuso de once sesiones de 100 minutos y tuvo una duración de 11 semanas.

Los estudiantes se organizaron en grupos<sup>5</sup> de tres, los cuales discutían la posible solución y luego cada uno redactaba sus propias conclusiones.

En lo que respecta a la organización del aprendizaje, se tuvieron en cuenta las fases de aprendizaje que plantea el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

*Recogida de información:* El conjunto de datos consta de cintas de video, hojas de trabajo de los estudiantes, algunas entrevistas clínicas a los estudiantes y notas de campo.

Las grabaciones en video se realizaron del trabajo realizado por los grupos de estudiantes. Se realizaron algunas entrevistas a estudiantes con el fin de pedir más aclaraciones o justificaciones, pedir que explicaran lo que habían hecho y/o para plantear otra tarea análoga.

### **3. Análisis y discusión**

A continuación presentamos algunos de los aspectos que nos han parecido más relevantes del análisis de los datos que hemos recogido. Presentaremos algunos ejemplos representativos de

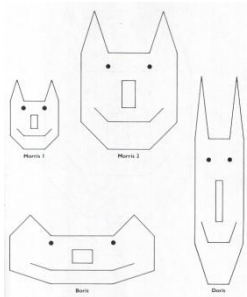
---

<sup>5</sup> El profesor titular los organizó de acuerdo al conocimiento que tenía de sus estudiantes.

formas de razonamiento mediante el uso de imágenes mentales y habilidades de visualización y haremos algunos comentarios sobre ellos.

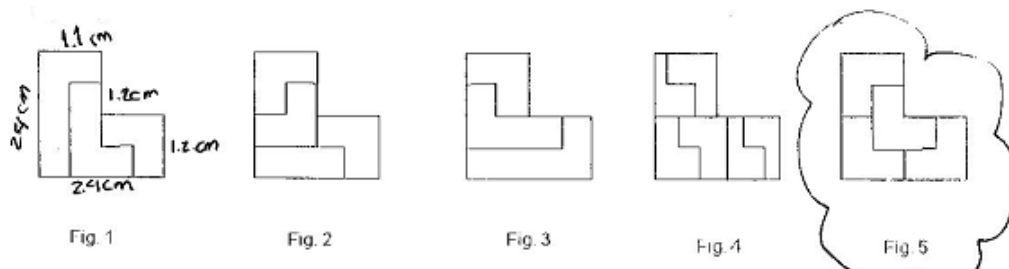
En la actividad N° 1, como se muestra a continuación, que pedía la justificación de la elección hecha, Miguel usó una imagen dinámica y las habilidades de visualización:

- Rotación mental (*RM*). Al mover mentalmente a Morris 1 e imaginarlo superpuesto en Morris 2: *Lo he hecho en la cabeza*. [Para explicar que ha imaginado la superposición].
- Conservación de la percepción (*CP*). Al reconocer que Morris 1 y 2 mantienen su forma aunque cambien de posición: *“...Morris 1 es la misma Morris 2, pero más pequeña”*.

<p>Actividad 1: En el dibujo aparecen las máscaras de Morris I, Morris II, Boris y Doris. ¿Cuáles de ellas tienen la “misma forma” y cuáles, simplemente, “se parecen”? Justifique su respuesta.</p>	
--	---

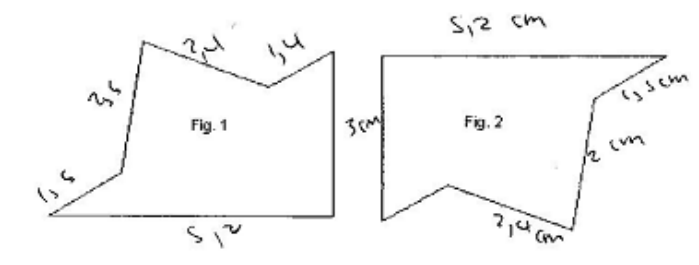
En la actividad 7, la cual indaga sobre cuál de las figuras está dividida en figuras más pequeñas que tengan la misma forma que la figura grande, Katherine plantea que la figura 5 es la respuesta, dado que ... *la Fig. 5 la asimilé con un zapato y así fue más fácil ver que las figuras pequeñas también lo eran* (“vio” la figura como un zapato al igual que las partes en que está dividida). Esto nos permitió identificar el uso de una imagen concreta. Dicha imagen acompañada del uso de las habilidades:

- Identificación visual (*IV*). Al reconocer una figura concreta aislándola de su contexto: *La figura 5 la asimilé con un zapato*.
- Reconocimiento de posiciones en el espacio (*RP*). Cuando identifica que dentro de la figura 5 también hay zapatos: *La figura 5 la asimilé con un zapato y así fue más fácil ver que las figuras pequeñas también lo eran*.



Respuesta de Katherine a la actividad 7.

En la actividad 13, que plantea: la figura 2 respecto de la figura 1 ¿fue ampliada o reducida? ¿Cuál es el valor que se usó para esa ampliación o reducción?, Adriana usó una imagen cinética: *Mire, yo me imaginé esto: si uno la gira un poquito la figura 1 y luego la mueve a la derecha obtiene la figura 2, o sea es la misma* [Hace la muestra de los movimientos –giro y traslación- con sus manos].



Parte de la respuesta de Adriana en la actividad 13.

En la construcción de dicha imagen, Adriana usó las habilidades:

- Rotación mental (RM). Ha dotado de movimiento la figura 1 para imaginarla superpuesta en la figura 2.

- Conservación de la percepción (*CP*). Reconoce que la figura, a la que dotó de movimiento, mantiene su forma y propiedades matemáticas aunque la haya cambiado de posición.
- Reconocimiento de relaciones espaciales (*RR*). Identifica correctamente las características de relaciones entre las dos figuras: ... *si uno la gira un poquito la figura 1 y luego la mueve a la derecha obtiene la figura 2, o sea es la misma.*

El análisis de las respuestas de los estudiantes nos ha permitido identificar diferentes imágenes y diversas habilidades de visualización. El resultado del análisis parece indicar que el tratamiento dado a la semejanza (vinculándolo al concepto de homotecia y al teorema de Thales) fue un factor altamente positivo en el desarrollo de más y mejores formas de razonamiento, entendido este a partir de elementos de visualización.

#### **4. Conclusiones**

El análisis del conjunto de datos nos confirma la relación compleja que existe entre la habilidad para construir y usar imágenes mentales, preferencia para tal uso, y el papel de estas imágenes en la construcción de significados en el aprendizaje de este tópico. En definitiva, creemos que el poco uso, por parte de los estudiantes, de imágenes mentales está relacionado con el frecuente planteamiento, por parte de los profesores, de problemas rutinarios y poco creativos. El planteamiento de problemas novedosos y creativos hace que los estudiantes tengan que articular información y operaciones desde distintas fuentes, a través de caminos que no han sido explícitamente enseñados antes por el profesor y para los que no poseen experiencia previa.

Nuestros hallazgos sugieren que en la enseñanza del tema se deberían diseñar propuestas instruccionales que incluyan el desarrollo de los diferentes elementos de visualización, lo cual se convierte en una potente herramienta para el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes.

Los resultados de este estudio aportan a la literatura sobre formas efectivas de mejoramiento del razonamiento, específicamente, en tareas relacionadas con la semejanza.

*Agradecimiento:* El autor desea agradecer a Ángel Gutiérrez Rodríguez de la Universidad de Valencia (España) y a Joaquín Giménez Rodríguez de la Universidad de Barcelona (España) por la dirección de este trabajo.

## Bibliografía

- Burger, W.F. y Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1): 31-48.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6): 14-20.
- Ding, L. y Jones, K. (2006). Students' geometrical thinking development at grade 8 in Shanghai. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th PME Conference*, v 1: 382.
- Gualdrón, É. (2006). *Los procesos de aprendizaje de la semejanza por estudiantes de 9º grado*. Memoria de investigación. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Valencia: Universidad de Valencia.
- Gualdrón, É. (2007). Una Aproximación a los indicadores de nivel de razonamiento de Van Hiele para la semejanza. *Memorias del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Vol. 1, pág. 369-380).
- Gualdrón, É. (2008). Improving the ways of reasoning in similarity in 14 and 15 years old students. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of de PME 20th and PME-NA 32nd Conference*, v 1: 266.
- Guillén, G. (1997). *EL Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference*, v 1: 3-19.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pág. 143-170). Granada: Comares.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2 y 3): 27-46.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3): 237-251.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.
- Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(23): 295-324.
- N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Presmeg, N.C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3): 42-46.
- Swoboda, E. y Tocki, J. (2002). How to prepare prospective teachers to teach mathematics: Some remarks. *Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*, v1: 1-10.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Columbus, USA: ERIC.
- Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Utrecht, Holanda (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991), Universidad de Utrecht. Holanda.
- Vasco, C.E. (1998). Dynamic geometry in the Colombian school curriculum. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI study* (pág. 243-248). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.