

RETOS EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD

Carmen Batanero

Universidad de Granada, España

batanero@uqr.es

Palabras clave: probabilidad, investigación didáctica, cuestiones prioritarias

Key words: probability, didactic research, priority questions

RESUMEN: Aunque la investigación en didáctica de la probabilidad tiene una tradición consolidada, la introducción de la probabilidad en la enseñanza primaria, el énfasis actual en el enfoque frecuencial y las aproximaciones informales a la inferencia estadística hacen necesario reforzar esta investigación. En este trabajo enfatizamos algunos de los retos actuales para la investigación sobre enseñanza de la probabilidad con el fin de orientar la investigación futura.

ABSTRACT: Although research in probability education possesses a long tradition, the introduction of probability in primary school, the current emphasis on the frequentist approach, as well as the informal approaches to statistical inference suggest the need of reinforcing this research. In this work we emphasize some current challenges for research on the teaching of probability with the aim of orienting new research,

■ INTRODUCCIÓN

La investigación en didáctica de la probabilidad tiene una larga historia, pues podemos remontar sus orígenes a los trabajos de Piaget e Inhelder (1951) sobre el desarrollo cognitivo de los niños. Sin embargo la publicación reciente de dos libros monográficos sobre el tema (Jones, 2005; Chernoff y Sriraman, 2014), junto con la existencia de un grupo específico de investigación en los Congresos Internacionales de Enseñanza de las Matemáticas (ICME) indican la fuerza de este campo. Es por ello que en este trabajo tratamos de clasificar y resumir la investigación llevada a cabo hasta la fecha, señalando algunos puntos para completarla. En los siguientes apartados indicamos los principales aspectos epistemológicos, psicológicos y didácticos en los que se ha centrado la investigación.

■ SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE LA PROBABILIDAD

Un primer punto a considerar son los aspectos epistemológicos. Dentro de la matemática el significado de la probabilidad es único; la definición axiomática considera la probabilidad como una función medible definida en un espacio probabilístico y acotada en el intervalo $[0,1]$ (Fine, 1971). Sin embargo, al tratar de aplicar la probabilidad en diversos campos y problemas, encontramos diferentes interpretaciones del concepto a lo largo de la historia, que aún coexisten y están sujetas a controversias filosóficas (Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Borovnick y Kapadia, 2014).

Estas interpretaciones surgen a partir de dos puntos de vista complementarios (Hacking, 1975): la probabilidad, como grado de creencia personal en la verosimilitud de los sucesos inciertos (perspectiva epistémica) y como medida objetiva de esta verosimilitud, a partir de datos (perspectiva estadística). Entre otros, cada uno de los significados clásico, frecuencial y subjetivo, utilizados con frecuencia en el currículo escolar, está asociado a diferentes configuraciones de objetos matemáticos, por lo que suponen significados diferenciados del concepto y pueden tener diferente valor en el aula (Batanero y Díaz, 2007).

Significado clásico

Se origina por el trabajo de matemáticos como Cardano, Laplace y Fermat, al tratar de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar. Según se desarrolla con detalle en Batanero y Díaz (2007), el interés por la ganancia en estos juegos hizo surgir en primer lugar la idea de esperanza matemática, y posteriormente la primera definición de probabilidad debida a De Moivre (1667/1718).

En esta definición, refinada más tarde por Laplace (1699/1814), la probabilidad se concibe como la proporción entre el número de veces que un suceso podría ocurrir (casos favorables) y el número total de sucesos que podrían darse (casos posibles). Para poder aplicar esta definición, se consideran que todos los sucesos elementales en la situación analizada serían igualmente probables, lo que originó serias críticas. La primera de ellas es que haciendo este supuesto no podría calcularse la probabilidad en caso de sucesos no equiprobables o en experimentos con infinitas posibilidades. Por tanto, se encuentran pocos casos donde pueda aplicarse, fuera de los juegos de azar (Batanero, Henry, y Parzysz, 2005). Otra crítica es el uso de la palabra “probable” en la definición de probabilidad, que de este modo se convierte en recursiva.

A pesar de estas críticas el significado clásico durante décadas ha sido popular en la enseñanza secundaria, pues los niños se interesan en los juegos de azar. El aspecto negativo es que la

probabilidad se asoció con la matemática recreativa y algunos profesores la consideraron una parte menos importante que otras en el currículo de matemáticas.

Significado frecuencial

La publicación por parte de Bernoulli (1687/1713) de la primera demostración de la ley de los grandes números fue aceptada por los matemáticos de su tiempo como prueba del carácter objetivo de la probabilidad.

Apoyándose en la convergencia observada empíricamente de las frecuencias relativas de un suceso en largas series de observaciones independientes, von Mises (1928/1928) dio una definición de la probabilidad desde el punto de vista frecuencial. La probabilidad sería en este significado el valor hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al estabilizarse, asumiendo la repetibilidad del ensayo.

Al igual que sobre la definición clásica, fueron muchas las críticas a la definición frecuencial de la probabilidad. Algunos de los argumentos utilizados en estas críticas fueron los siguientes (Godino, Batanero, y Cañizares, 1988): A partir de la frecuencia relativa no se obtiene un valor exacto para la probabilidad, sino únicamente aproximaciones de dicho valor; no se sabe con certeza el número de experimentos idóneo para aceptar la estimación de la probabilidad como suficientemente precisa; a veces es imposible contar con idénticas condiciones en la experimentación.

Didácticamente, esta visión de la probabilidad tiene hoy día una fuerte aceptación, porque tiene la ventaja de conectar estadística y probabilidad. Los alumnos realizan en la clase experimentos o bien observan sucesos aleatorios en su vida cotidiana y registran los datos de los mismos. Para el análisis de estos datos y el cálculo de la frecuencia relativa utilizan la estadística. Además, la simulación, hecha posible por la tecnología, permite replicar en forma sencilla largas series de experimentos para aplicar el significado frecuencial. Todo ello hace que este enfoque sea recomendado en el currículo.

Significado subjetivo

La demostración por Bayes de su teorema indicó que la probabilidad (a priori) de un suceso puede revisarse a partir de nuevos datos para transformarse en una probabilidad a posteriori. La probabilidad, por tanto, no es ya un valor inmutable y pierde su carácter objetivo. Dependiendo del conocimiento previo, distintas personas pueden asignar diferente probabilidad al mismo suceso.

Esta idea fue retomada más tarde por autores como de Finetti (1937/1937), quienes definen las probabilidades como grados de creencia subjetivos basados en el conocimiento y experiencia personal. No es necesaria la repetición de la situación que se estudia en idénticas condiciones, por lo que se amplía el campo de aplicación de las probabilidades; por ejemplo a la economía o historia, donde podemos encontrar sucesos irrepetibles.

La principal crítica que recibe esta visión es la dificultad de hallar una regla para asignar valores numéricos que expresen los grados de creencia personal, aunque el mismo de Finetti sugirió un sistema basado en apuestas y una axiomática consistente con dicho sistema (Batanero et al., 2005). La crítica también se suaviza por el hecho de que la probabilidad a posteriori va convergiendo al valor teórico, cuando los datos utilizados para aplicar el teorema de Bayes se han obtenido a partir de un gran número de experimentos. En estos casos, la probabilidad a posteriori no se ve muy influenciada por la asignación de probabilidades a priori.

Didácticamente el interés de la visión subjetiva en el aula es que formaliza la idea intuitiva de aprender de la experiencia. Se puede proponer a los alumnos asignar probabilidades a ciertos sucesos usando sus creencias personales; proponer luego la realización u observación del fenómeno una serie larga de veces y revisar las probabilidades a la luz de nueva información proporcionada por los datos. Esta revisión podría ser informal en alumnos de primaria y una vez que en secundaria se ha estudiado el teorema de Bayes se podría utilizar el teorema en el cálculo de probabilidades a posteriori.

■ SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA PROBABILIDAD

Otro tema importante en la investigación es el conocimiento de los estudiantes. La investigación realizada hasta la fecha muestra que estos diferentes puntos de vista y controversias se reproducen en los razonamientos, tanto de niños como de sujetos adultos. Ambos tipos de sujetos atribuyen con frecuencia significados personales a la probabilidad que no coinciden con los aceptados en las instituciones de enseñanza (Jones, 2005; Jones, Langrall y Mooney, 2007; Chernoff y Sriraman, 2014).

Esta investigación comienza con los estudios de Piaget e Inhelder (1951), que tratan de describir la adquisición gradual en los niños de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, del razonamiento combinatorio, y su capacidad de cuantificación de probabilidades. A partir de sus entrevistas y experimentos describen con detalle las diferentes etapas que los niños siguen en el desarrollo de estos conceptos. La importancia que estos trabajos tienen para los profesores es que permiten seleccionar de una forma racional el tipo de tareas probabilísticas que podemos proponer a nuestros alumnos en función de su edad.

Fischbein (1975) por su parte se interesó no solo por la formación de los conceptos formales, sino por la aparición de intuiciones parciales sobre los mismos y por la mejora de las intuiciones como consecuencia de la enseñanza. El autor indica que las intuiciones sobre la probabilidad se desarrollan también fuera del aula, porque nos encontramos rodeados de incertidumbre en muchas situaciones cotidianas. El problema es que, si la intuición formada espontáneamente es incorrecta, será muy difícil cambiarla llegada la edad adulta. En consecuencia, sus investigaciones apoyan decididamente la conveniencia de adelantar la enseñanza de la probabilidad a la educación primaria. También muestran que, sin instrucción, es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado, incluso una vez que se alcanza la etapa de las operaciones formales.

La investigación con sujetos adultos ha sido llevada a cabo generalmente en el contexto de toma de decisión en situaciones de incertidumbre; por ejemplo, en medicina, situaciones legales o política. Los resultados indican una percepción incorrecta de las situaciones aleatorias, supersticiones infundadas sobre las mismas (“la suerte personal”) así como creencias en la posibilidad de controlarlas para producir un resultado deseado (Batanero, 2015).

Trabajos como los de Kahneman, Slovic y Tversky (1983) han popularizado el concepto de *heurística* o estrategia inconsciente, que reduce la complejidad de un problema probabilístico, suprimiendo parte de la información. Aunque las heurísticas ayudan en muchos casos a obtener una solución razonable, en otros casos producen sesgos en las conclusiones; a veces con graves consecuencias.

Un ejemplo de estos sesgos es la falacia de la conjunción, donde algunos sujetos suponen que la probabilidad de la intersección de dos sucesos (por ejemplo, “ser mujer” y “gustarle los niños”) es mayor que la de cada suceso por separado. Puesto que la experiencia nos muestra que a la mayoría de las mujeres les gusta los niños, confundimos suceso probable con suceso seguro y olvidamos que la probabilidad del suceso compuesto es el producto de las probabilidades simples (o bien de la probabilidad del primer suceso, por la probabilidad condicionada del segundo, si los sucesos son dependientes). En cualquier caso, puesto que la probabilidad es un número menor que 1; su producto nunca puede ser mayor que la de uno de los sucesos, pues multiplicamos por una cantidad menor que la unidad.

Otro ejemplo es descrito por Konold (1989), quien lo denomina “enfoque en el resultado”: Cuando se pregunta a algunas personas por la probabilidad de un suceso, tratan de responder la pregunta adivinando el resultado que ocurrirá; por ello si un resultado es muy probable, esperan que ocurra con seguridad en la próxima repetición de la situación.

Actualmente son muchas las investigaciones que se centran específicamente en la comprensión de la probabilidad en contextos escolares (en la escuela o universidad). Estas investigaciones se centran en diferentes conceptos, como la probabilidad, razonamiento combinatorio, probabilidad condicional o compuesta y también en diferentes edades. Una buena síntesis de las mismas se presenta en Jones (2005) y Jones, Langrall y Mooney (2005).

■ ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD Y EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA

La enseñanza de la probabilidad en la Educación Secundaria tiene una tradición consolidada; sin embargo, en la última década el tema se ha incorporado en forma creciente al currículo de Educación Primaria. Además, se desplaza el interés por los significados axiomático y clásico de la probabilidad hacia el enfoque frecuencial, basado en la experimentación y simulación (Batanero, 2013; Borovcnik, 2011).

La amplia disponibilidad de tecnología facilita hoy día la enseñanza de la probabilidad, pero a la vez plantea nuevos retos a la investigación. Por un lado, ya no son necesarios los cálculos tediosos o los ejercicios repetitivos sobre lectura de las tablas de las distribuciones. La tecnología realiza estos cálculos en segundos y proporciona al estudiante los valores de la probabilidad de la distribución normal o binomial (entre otras) de forma muy simple.

La tecnología hace también posible la exploración de micro mundos aleatorios virtuales por parte del estudiante, que puede estudiarlos por medio de la simulación, donde las frecuencias relativas en los experimentos se utilizarán para dar un valor estimado de la probabilidad de interés. Es importante, sin embargo, resaltar la diferencia entre probabilidad (modelo matemático) y frecuencia (que pertenece al mundo real de los datos y es sólo una estimación de la probabilidad). A la vez, estos micromundos permiten introducir conceptos más avanzados, pues no se requiere tanto conocimiento teórico ni habilidad de cálculo (Lee y Lee, 2011). Por ejemplo, se podría simular la distribución geométrica, planteando problemas sobre el tiempo de espera necesario para que ocurra un cierto suceso.

Por otro lado, encontramos un énfasis creciente en la introducción en el Bachillerato, e incluso en la Educación Secundaria de temas o situaciones de inferencia estadística con enfoques informales

basados en el re-muestreo o la simulación (por ejemplo, Makar, Baker y Ben-Zvi, 2011). En estas situaciones, si se quiere contrastar una cierta hipótesis, se reproduce la situación estudiada mediante la simulación y, utilizando muchas muestras del mismo tamaño se analiza que tan atípica fue la muestra dada en el problema, como base para rechazar o no la hipótesis planteada.

Esta “inferencia informal” es interesante, porque puede ser un primer paso hacia una comprensión más profunda – e incluso formal- de la inferencia en la universidad y formación profesional. Pero hay que ser precavidos para no llegar a un deslizamiento meta didáctico, al convertir un instrumento didáctico en objeto de aprendizaje. Además será importante que la enseñanza de la inferencia –sea informal o formal- enfatice la naturaleza específica del razonamiento inferencial y los riesgos asociados en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Si reducimos la enseñanza de la inferencia a la enseñanza de algoritmos (algebraicos, simulación o re-muestreo) no resolveremos los errores frecuentes de interpretación y uso de la inferencia estadística.

■ FORMACIÓN DE PROFESORES

Es claro que una enseñanza eficaz de la matemática requiere de la preparación adecuada de los profesores. La aceptación de este hecho ha hecho el estudio del conocimiento y creencias del profesor uno de los que actualmente cobran mayor desarrollo. Sin embargo, esta investigación apenas se ha centrado en el campo de la probabilidad.

La formación del profesor para enseñar esta materia ha de abarcar, en primer lugar el componente matemático, pues es claro que una falta de preparación matemática repercutirá en la formación de sus estudiantes. También debe tener en cuenta las diversas facetas de su conocimiento didáctico (Godino, 2009): conocimiento matemático especializado, conocimiento del estudiante, de los medios de enseñanza, del currículo y de las relaciones del tema con otras materias y con la sociedad en que el estudiante está inmerso.

La naturaleza específica de la probabilidad hace que algunos de estos componentes deban ser adaptados para su enseñanza (Batanero y Díaz, 2007). Por ejemplo, sería necesario que el profesor tenga conocimiento de los diferentes significados de la probabilidad y las dificultades filosóficas que hemos descrito en las primeras secciones. Igualmente sería preciso que se familiarice con los razonamientos típicos de los niños sobre probabilidad en los diferentes estadios de desarrollo y con los tipos de heurísticas y sesgos más comunes que puede encontrar en sus estudiantes. Ha de ser capaz de trabajar con la simulación de problemas de probabilidad sencillos y, lo que es más importante, reconocer el valor didáctico de la simulación en la formación de sus alumnos.

Igualmente es necesario tener en cuenta el conocimiento del profesor en relación a la tecnología (Lee y Hollebrand, 2011), puesto que cada uno de los componentes del conocimiento del profesor se ve afectado por ella. Así, no es lo mismo conocer cómo razonan los niños en probabilidad, en general, que saber cómo razonan cuando se hayan trabajado la simulación en un ambiente computacional.

Puesto que el tiempo disponible para la formación de los futuros profesores es muy limitado, se requiere del diseño de tareas que contribuyan a enriquecer las diferentes facetas del conocimiento del profesor sobre probabilidad, simultáneamente. Batanero y Díaz (2012) proponen la resolución

de problemas paradójicos sencillos con un posterior análisis didáctico en que los futuros profesores analicen el contenido matemático del problema, las dificultades de los alumnos y los recursos didácticos para superarlos.

■ PERSPECTIVAS FUTURAS

La variedad de puntos discutidos –muy brevemente– pone de manifiesto la riqueza de la Didáctica de la Probabilidad como área potente de investigación que requiere el aporte de investigadores comprometidos con la mejora de su enseñanza. La educación del conocimiento y razonamiento probabilístico de niños y jóvenes es necesaria – independientemente de la discusión sobre su interés en el estudio de la inferencia estadística.

Puesto que vivimos en un mundo caracterizado por el azar, hemos de preparar a los futuros ciudadanos para desenvolverse mejor en ambiente de incertidumbre, comprender las situaciones aleatorias y tomar decisiones adecuadas. No es claro, sin embargo, el modo de conseguirlo. Es necesario una labor sistemática de exploración de los razonamientos de los estudiantes, y de experimentación y evaluación de nuevas propuestas educativas, tanto tradicionales, como apoyadas en la tecnología.

Además, sería interesante buscar situaciones específicas que permitan dar más énfasis a la visión subjetiva de la probabilidad, aplicable en situaciones en que no es posible repetir indefinidamente un experimento aleatorio en las mismas condiciones.

Puesto que el profesor es un pilar esencial en el aprendizaje de sus alumnos, y ya que la investigación sobre el conocimiento matemático-didáctico del profesor para enseñar probabilidad es tan escasa, esta sería un área particularmente prioritaria. La formación de los que se preparan para ser profesor, así como el apoyo a los profesores en ejercicio, depende en gran medida de que seamos capaces de impulsar la investigación sobre formación de profesores en el campo específico de la probabilidad.

Agradecimientos: Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C. (2013). Teaching and learning probability. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). Heidelberg: Springer.
- Batanero, C. (2015). Understanding randomness. Challenges for research and teaching. Conferencia plenaria en el *Ninth Congress of European Research in Mathematics Education*, CERME 9 .Praga: ERME.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J.P Van Bendegen y K. François (Eds), *Philosophical dimensions in mathematics education*. (pp. 107-127). New York: Springer.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3-13.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.
- Bernoulli, Jacob (1987). *Ars conjectandi*, Rouen: IREM. (Original work published in 1713).

- Borovcnick, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 71-83). New York: Springer.
- Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J Chernoff y B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). Springer Netherlands.
- Chernoff, E. J. y Sriraman, B. (Eds.) (2014), *Probabilistic thinking. Presenting multiple perspectives*. New York: Springer.
- Fine, T. L. (1971). *Theories of probability. An examination of foundations*. London: Academic Press.
- de Finetti, B. (1974). *Theory of probability*. London: John Wiley.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive source of probability thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Hacking, I. (1975). *The emergence of probability* Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Jones, G. A. (2005). *Exploring probability in schools. Challenges for teaching and learning. Mathematics Education Library vol 40*. New York: Springer.
- Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing and NCTM.
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Laplace P. S. (1995). *Théorie analytique des probabilités*. Paris: Jacques Gabay. (Trabajo original publicado en 1814).
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59–98.
- Lee, H. S. y Hollebrands, K. F. (2011). Characterising and developing teachers' knowledge for teaching statistics with technology. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 359-369). Springer Netherlands,
- Lee, H. S. y Lee, J. T. (2011). Simulations as a path for making sense of probability. In K. Hollebrands & T. Dick (Eds), *Focus in high school mathematics on reasoning and sense making with technology* (pp. 69-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.
- Mises, R. von (1952). *Probability, statistics and truth*. London: William Hodge. (Original work published 1928).
- Moivre, A. de (1967). *The doctrine of chances*. New York: Chelsea (Trabajo original publicado en 1718).
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.