

Empleo del Análisis Didáctico en un Experimento de Enseñanza con Futuros Maestros de Educación Primaria

Gabriela Valverde, Universidad de Granada
Encarnación Castro, Universidad de Granada
Marta Molina, Universidad de Granada

La adaptación de la educación superior al marco de convergencia europea ha obligado a hacer una profunda reflexión en las distintas dimensiones y niveles de los currículos universitarios. Este proceso de ajuste ha derivado en unos planes de estudios universitarios basados en la noción de competencia. En el caso de la Titulación en Maestro de Educación Primaria, la orden ECI/3857/2007 (MEC, 2007) establece que el plan de estudios ha de incluir como mínimo un módulo relativo al área didáctico y disciplinar de la matemática en el que los estudiantes puedan adquirir, entre otras, competencias matemáticas¹ básicas, tales como plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana.

Compartimos la visión expuesta por Rico y Lupiáñez (2008, p.164) quienes plantean que el desarrollo de la competencia matemática en estudiantes de cualquier nivel constituye una tarea compleja dado que no existen directrices específicas sobre cómo abordarla. De aquí que consideremos que la investigación ha de proporcionar materiales contrastados, con indicios de calidad de los mismos (sobre tareas, metodologías de trabajo en aula, entre otros), que contribuyan a clarificar y facilitar el desempeño de formar en competencia matemática. Estas consideraciones motivaron la investigación a la que aquí aludimos y que responde a un experimento de enseñanza (Cobb y Gravemeijer, 2008). En dicho experimento interviene la primera autora de este trabajo como docente, los alumnos son maestros de primaria en formación inicial y el contenido está centrado en las nociones de razón y proporcionalidad. En diferentes momentos del experimento se ha utilizado el análisis didáctico como herramienta que ha permitido realizar ciertas acciones de manera organizada y justificada. En este capítulo centramos nuestra atención en el análisis didáctico realizado, detallando el papel que ha jugado en la investigación y mostrando el ensamblaje de sus diferentes componentes con el experimento de enseñanza.

SOBRE LA INVESTIGACIÓN REALIZADA

La investigación que llevamos a cabo trata de responder a las inquietudes surgidas de la reflexión en torno a la competencia matemática que sobre la razón y proporcionalidad muestran futuros maestros y a la posibilidad de trabajar dicha competencia a través de una propuesta de trabajo en el aula. Detallamos seguidamente aspectos generales de la misma.

Objetivos Generales de la Investigación

La situación descrita condujo al planteamiento de los siguientes objetivos generales de investigación.

1. Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una “secuencia de trabajo en el aula” que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad.
2. Investigar cómo contribuye la secuencia de trabajo en el aula en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria,

¹ Ver definición de competencia matemática en Rico y Lupiáñez (2008).

resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.

Para abordar el primero de dichos objetivos nos enfrentamos al reto de elaborar una intervención de enseñanza, fundamentada teórica y empíricamente, que nos permitiera promover el desarrollo de conocimiento matemático y de competencias en los futuros maestros y estudiar, a la vez, dicho desarrollo. Para ello decidimos realizar un experimento de enseñanza en el marco de la investigación de diseño, dado que este tipo de estudios persiguen comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

El contenido tomado para tal experimento, las nociones de razón y proporcionalidad, se ha elegido, entre otros, por los siguientes motivos:

- a) Ambas nociones matemáticas están asociadas a múltiples situaciones del entorno, lo que permite poner en práctica un acercamiento de la matemática a la vida cotidiana.
- b) La noción de razón posee una riqueza didáctica y una entidad matemática que amerita ser discutida en la formación de maestros. Freudenthal (1983) plantea que dicha noción posee una entidad propia ajena a la de fracción.
- c) Es importante complementar los conocimientos de los estudiantes de magisterio relativos a los subconstructos del número racional pues los maestros han de plantear secuencias de enseñanza no centradas únicamente en el significado parte-todo del número racional (Llinares y Sánchez, 1988), como ha prevalecido en la enseñanza de la matemática escolar. Esto demanda de los futuros maestros una mayor comprensión de todos los subconstructos del número racional.

Pero quizá el argumento más poderoso sea que la proporcionalidad es considerada uno de los temas más sugerentes en la enseñanza de las matemáticas ya que es un contenido que impregna al currículo de matemáticas de primaria, secundaria e incluso de niveles superiores que mantiene múltiples relaciones con otros conceptos matemáticos y conexiones con otras áreas de conocimiento (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; A. Fernández, 2001; Lamon, 2007).

Participantes y Tipo de Investigación

En este estudio han participado estudiantes pertenecientes a dos grupos, de 136 y 74 estudiantes respectivamente, que cursaron la asignatura Matemáticas y su Didáctica² de la especialidad de Educación Primaria de la Diplomatura de Maestro de la Universidad de Granada, durante el curso académico 2009-2010. La guía docente de la asignatura incluye entre los contenidos un tema referido a Números Racionales que incluye el estudio del concepto de fracción y sus significados, entre ellos el de razón.

Como se ha señalado previamente la investigación realizada es un experimento de enseñanza dentro del paradigma de la investigación de diseño. La ejecución de este tipo de estudios requiere del desarrollo de tres fases:

I. *Preparación*: contempla la definición del problema y objetivos de investigación, identificación de los contenidos y objetivos instrucciones, selección de la metodología de enseñanza y diseño de la secuencia de intervenciones, entre otras acciones.

² Asignatura troncal del plan antiguo de la diplomatura de Maestro especialidad de Educación Primaria, ubicada en el 1º curso y de duración anual, con 9 créditos (4,5 teóricos y 4,5 prácticos).

II. *Experimentación*: puesta en práctica de la propuesta de enseñanza preparada, con revisiones del diseño de cada sesión, previas a la intervención, a la vista de los datos recogidos en la sesión previa.

III. *Análisis retrospectivo de los datos*: organización y análisis de toda la información recogida (Molina et al., 2011).

Estas tres fases nos sirven de guía para estructurar este capítulo que queda establecido en tres apartados principales. Al final de cada uno de ellos se hace una reflexión sobre la mediación del análisis didáctico en cada caso.

FASE I. PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO

La primera fase del experimento comprende todos los elementos de la investigación necesarios y previos a la intervención en el aula. En esta fase se realizaron distintas acciones; recogemos aquí las relativas al análisis didáctico: análisis de contenido de la razón y la proporcionalidad, análisis cognitivo de las mismas nociones y análisis de instrucción.

Análisis de Contenido sobre Razón y Proporcionalidad

En nuestro experimento de enseñanza, y desempeñando el papel de docente, hemos realizado un análisis de contenido (Gómez, 2009) sobre la razón y la proporcionalidad. Con tal propósito, hemos explorado las tres dimensiones del significado de un concepto matemático: la referencia formal dada por la estructura conceptual, los sistemas de representación que se utilizan, y el sentido con que se usan los diversos conceptos o fenomenología. Previo a ello, delimitamos los conceptos a partir del tratamiento curricular que de los mismos se hace atendiendo a los estudiantes para los que va dirigida dicha materia. Lo hacemos desde los lineamientos establecidos en la guía docente de la asignatura, estudios previos y con base en la revisión de textos de Didáctica de la Matemática. Dichos textos se incluyen en la bibliografía recomendada a los estudiantes para el trabajo de los temas “Números Racionales” y “Magnitudes y su Medida” (ej., García y Bertrán, 1993; Godino, 2004; Llinares y Sánchez, 1988), y otros que, a partir de la experiencia de las investigadoras, son relevantes en el campo de investigación de la razón y la proporcionalidad (ej., Cai y Sun, 2002; A. Fernández, 2001; Freudenthal, 1983; Vergnaud, 1988).

Esta delimitación nos ha permitido: identificar distintos acercamientos a las definiciones de razón, proporción y proporcionalidad; detectar y clasificar conocimientos conceptuales y procedimentales relativos a los contenidos; e identificar los focos prioritarios sobre los cuales se centra el aprendizaje, las representaciones mediante las cuales tales nociones se ponen de manifiesto y las situaciones en las cuales están implicadas.

Acercamientos a la Noción de Razón

La revisión de los textos y estudios señalados en el apartado anterior nos ha permitido recoger distintas aproximaciones de los conceptos básicos objeto de nuestro estudio: razón y proporcionalidad. Mostramos aquí una síntesis de aquellas relativas a la razón.

Uno de los acercamientos considera que la razón se establece entre dos cantidades de magnitud y es el cociente de las medidas de dichas cantidades considerando la misma unidad; en el cociente el dividendo es la mayor de las medidas (F. Fernández, 2001; Grupo Beta, 1990). Este posicionamiento tiene dos implicaciones: las cantidades han de ser homogéneas (es decir, pertenecer a la misma magnitud) y la razón es un número real mayor que 1. Algunos autores toman la razón como una función o aplicación de un par

ordenado de números o cantidades de magnitud (Freudenthal, 1983; A. Fernández, 2001). Este último autor restringe los elementos del dominio de la función a cantidades de la misma magnitud y el ámbito de la función al conjunto $(1, +\infty)$. Freudenthal (1983) también plantea que la razón es una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de números (o valores de magnitud), establecida formalmente por $a:b = c:d$ si el par (a,b) es equivalente al par (c,d) . Esta consideración conlleva implicaciones relativas al estatus lógico de la razón cuyo significado propio es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón. Esta perspectiva se opone a aquellas que consideran la razón como un cociente.

Otro acercamiento a esta noción surge a partir de la consideración de la razón como una de las posibles interpretaciones del número racional (ej., F. Fernández, 2001; Llinares y Sánchez, 1988). Tales autores plantean que en algunas ocasiones las fracciones son usadas como “índice comparativo” entre dos cantidades de igual o diferente magnitud. La posibilidad de considerar la razón como relación entre una o dos magnitudes, que hace posible establecer comparaciones del tipo parte-parte y parte-todo, da lugar a diferentes tipos de fenómenos organizados por la razón.

Estructura Conceptual de la Razón

La clasificación que hacen Rico y Lupiáñez (2008), entre tipos de conocimiento matemático escolar, se ha aplicado a las nociones de razón y proporcionalidad. En la Tabla 1 aportamos ejemplos de la clasificación que hemos realizado de los tipos de conocimientos vinculados a tales nociones.

Tabla 1. *Clasificación cognitiva de los contenidos razón y proporcionalidad*

Conocimiento Conceptual	<p><u>Términos:</u> Razón, relación, antecedente, consecuente, cociente, razón inversa, proporción, medios, extremos, equivalente, alícuota, tasa...</p> <p><u>Notaciones:</u> $a:b$, $\frac{a}{b}$, a/b, $a \rightarrow b$, $x\%$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $a:b::c:d$, $y = f(x) = kx$, $f(x) = \frac{k}{x}$</p> <p><u>Convenios de lectura:</u> $a:b$ se lee “a” es a “b”; $a:b::c:d$ se lee “a” esa “b” como “c” es a “d”. El valor de la razón es un número mayor que 1. En las escalas $a:b$, $a \leq b$...</p> <p><u>Resultados:</u> Propiedades de las razones y de las proporciones. Tipos de razones y proporciones...</p> <p><u>Conceptos:</u> Razón como relación e índice comparativo. Equivalencia de razones, proporción. Semejanza de figuras y objetos. Función lineal, constante de proporcionalidad...</p> <p><u>Estructuras:</u> Sistema multiplicativo de los números reales positivos: subestructura (\mathbb{R}^+, \times)</p>
Conocimiento Procedimental	<p><u>Destrezas:</u> Aplicar procedimientos para obtener razones equivalentes. Multiplicación y división de números racionales. Uso de la razón unitaria. Regla de tres directa e inversa. Cálculo de porcentajes...</p> <p><u>Razonamientos</u></p> <p>Inductivo: búsqueda de patrones en secuencias numéricas proporcionales...Deductivo: aplicación de las propiedades de la razón o de las relaciones de proporcionalidad. Analógico: razonamientos en situaciones proporcionales particulares a partir de otros casos particulares...</p> <p><u>Estrategias</u> propias del razonamiento proporcional: reconocimiento de aspectos estructurales de las proporciones directas e inversas (relación funcional y escalar)</p> <p>Estrategias usadas en la comparación de razones. Estimación...</p>

De acuerdo con los documentos curriculares de la asignatura, los textos revisados y las descripciones aportadas sobre indicadores del razonamiento proporcional en investigaciones relevantes (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Vergnaud, 1988, entre otros), llegamos a distinguir cuatro prioridades o focos para el aprendizaje general de los contenidos razón y proporcionalidad en la formación de maestros de primaria:

1. Profundización en el estudio de significados y usos de la razón.
2. Estudio de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa.
3. Aplicación de los conocimientos asociados a la proporcionalidad directa en situaciones geométricas.
4. Interpretación y resolución de situaciones que impliquen la noción de porcentaje.

Tomando de base cada uno de los focos indicados procedimos a organizar los tipos de conocimientos considerados en la clasificación cognitiva según se diera su presencia en cada uno. Obtuvimos de este modo un listado de contenidos, de los temas razón y proporcionalidad, organizados por focos.

Organizamos la información relativa a los focos de aprendizaje en mapas conceptuales con el objetivo de destacar las relaciones entre distintos significados de un concepto, elementos del mismo, representaciones y situaciones en las que está implicado. Cada mapa nos permite visualizar la red o entramado de conocimientos que se requieren en la comprensión de éste. En la Figura 1 aparece el mapa conceptual relativo al Foco 1 centrado en la noción de razón.

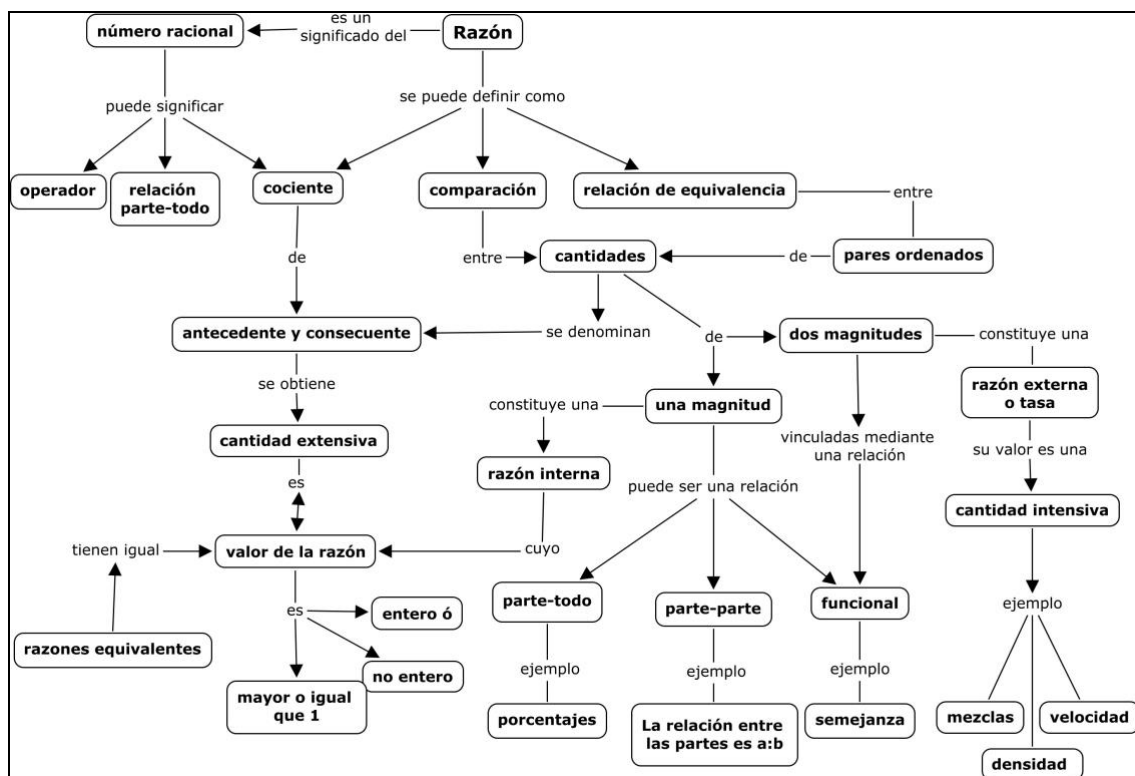


Figura 1. Mapa conceptual relativo al foco 1 "Razón: significados y usos"

Sistemas de Representación

En el caso de la razón y la proporcionalidad identificamos siete tipos de representaciones que clasificamos en dos sistemas de representación: simbólicos

(representación con dos puntos o flechas, representación fraccionaria, expresión decimal, porcentajes, verbal, algebraica-funcional y cartesiana) y gráficos (representación gráfica funcional —lineal e hiperbólica—, tabular, íconos y diagramas).

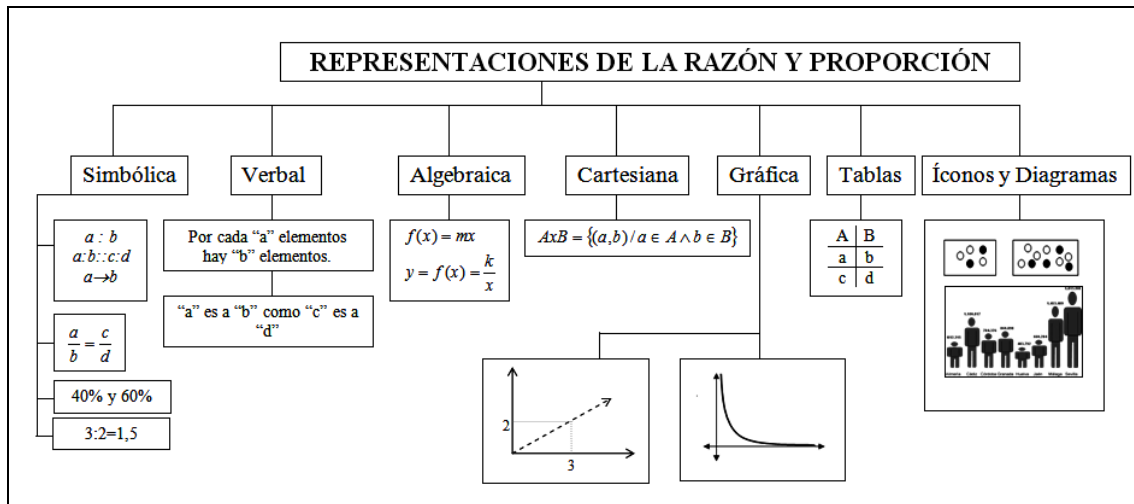


Figura 2. Representaciones de la Razón y Proporción

Cada uno de los sistemas de representación permite resaltar aspectos particulares de esos conceptos y de sus relaciones, y oculta otros (Castro y Castro, 1997; Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez, 2008). Así en nuestro caso, las expresiones algebraicas explícitas de las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, $f(x) = kx$ y $f(x) = \frac{k}{x}$, representan el procedimiento que permite generar pares de cantidades de las magnitudes proporcionales. Mediante una tabla es posible representar la relación de proporcionalidad existente entre las cantidades de dos magnitudes, lo que facilita la visualización de las relaciones funcional y escalar entre las cantidades. La representación gráfica de la proporcionalidad directa permite visualizar el sentido de covariación de las magnitudes a través de la monotonía. Las características de la proporcionalidad que las representaciones gráficas expresan son limitadas, por lo que en los procesos de enseñanza es preciso utilizar otras representaciones que permitan visualizar las propiedades estructurales de la relación de proporción que se da entre las magnitudes.

Fenomenología

En nuestro estudio hemos seguido la propuesta de análisis fenomenológico descrita por Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2008). En la misma se vincula la fenomenología con el planteamiento funcional de las matemáticas escolares.

Hemos detectado una variedad de situaciones en las cuales están implicadas las nociones de razón y proporcionalidad, éstas se han clasificado de acuerdo a la variable *tipo de situación* del estudio PISA (OCDE, 2004), cuyos valores son: personales, educativas o laborales, públicas y científicas, y que en nuestra investigación no hemos considerado de carácter excluyente. Ejemplos de situaciones personales corresponden al consumo del automóvil, uso de porcentajes o recetas de cocina. Entre las situaciones educativas o laborales se encuentra las relativas a la relación entre tiempo y número de personas que realizan cierto trabajo, cambio de unidades de medida, cambio de divisas. Algunas situaciones públicas son la densidad de población, tasa de natalidad o mortalidad, descuentos, entre otras. En las situaciones científicas se tiene por ejemplo

ley de proporciones de la materia, densidad, mezclas, probabilidades, Leyes de Kepler, cambio de unidades de medida, semejanza en el plano y el espacio, entre otras.

Con el propósito de delimitar los contextos de la razón y la proporcionalidad nos planteamos la pregunta ¿para qué sirven o se utilizan estas nociones en las diversas situaciones en las que están implicadas? Obtuvimos las cuestiones y respuestas presentadas en la Tabla 2.

Tabla 2. *Contextos de la razón y proporcionalidad*

Preguntas que Contempla	Modo de Uso
Razón	
¿Cuántas veces?	Índice comparativo
¿Cuál situación es más favorable?	
¿Qué tan probable es?	
¿Por cada “x”, cuántos “y” hay?	Relación: distribución de las cantidades
Proporcionalidad	
¿“a” es a “b” como “c” es a “d”?	Relación: entre índices comparativos
¿Qué tipo de relación hay entre dos magnitudes?	Relación: tipo de covariación de las cantidades
¿Cuántos hay aproximadamente?	Estimación
¿Qué cantidad corresponde a cada uno?	Relación: reparto, distribución de las cantidades
¿Tienen la misma forma?	Semejanza
¿Cuál es la medida?	Medición indirecta
¿Cuál es el porcentaje?	Índice comparativo estandarizado

Análisis Cognitivo

En el análisis cognitivo recogemos la descripción de los objetivos específicos que se pretenden promover en el aula y la contribución de los mismos a la formación matemática general de los estudiantes, expresada en términos de las competencias que establece el Proyecto PISA 2003 para caracterizar la *Alfabetización Matemática*³ (OCDE, 2004; Rico, 2007). Posteriormente, como parte de este análisis, presentamos la descripción de posibles errores y dificultades asociadas a los contenidos.

Expectativas de Aprendizaje sobre la Razón y Proporcionalidad

Para cada uno de los focos conceptuales prioritarios identificados en el análisis de contenido, enunciamos objetivos instruccionales específicos y, siguiendo la propuesta de organización y vinculación de expectativas descritas por Rico y Lupiáñez (2008, p. 309), relacionamos ambos niveles. La Tabla 3 recoge algunos de los objetivos que hemos enunciado para el Foco 1.

³ Aunque no se han concebido en el contexto de la formación de maestros, se ha utilizado el marco de competencias enunciadas en el estudio PISA debido a la coherencia que guardan con el planteamiento funcional del currículo de matemáticas (Rico y Lupiáñez, 2008), además tal decisión obedece a la limitada descripción de la competencia matemática que se desprende de los documentos curriculares revisados.

Tabla 3. *Objetivos específicos relativos al foco prioritario 1 y relación con las competencias matemáticas*

1. Profundizar en el estudio de significados y usos de la razón.	Competencias Matemáticas						
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS
1. Reconocer los significados de las fracciones cuando éstas representan a un número racional (parte-todo, operador, cociente y razón).	*					*	
2. Describir comparaciones parte-parte y parte-todo, utilizando los subconstructos y representaciones del número racional.	*					*	*
3. Comparar cantidades aditiva y multiplicativamente.					*		
4. Interpretar el significado de la razón en distintas situaciones.			*		*		
5. Describir el significado de los elementos de una razón, antecedente y consecuente en una situación cualquiera.			*				*
6. Justificar las propiedades de las razones.	*	*	*				
7. Aplicar las propiedades de las razones en la resolución de tareas.		*	*		*		*

Abreviaturas: Pensar y razonar (PR), argumentar y justificar (AJ), comunicar (C), modelizar (M), plantear y resolver problemas (RP), representar (R) y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones (LS).

Nota: No incluimos la competencia emplear soportes y herramientas tecnológicas debido a que el uso de tales dispositivos no formó parte de nuestro experimento de enseñanza.

Errores y Dificultades Asociadas al Estudio de la Razón y Proporcionalidad

Según investigaciones consultadas la estrategia errónea más documentada corresponde a la “estrategia aditiva” o de “diferencia constante” (A. Fernández, 2001); se trata de relacionar los términos de una razón aditivamente, cuantificarlos por sustracción entre los términos, y aplicar esta diferencia a la segunda razón. Ricco (citado en A. Fernández, 2001) describe dos actuaciones relativas al mal uso del método de reducción a la unidad, una posibilidad es usar un valor arbitrario como unidad para resolver el problema y la otra es usar el primer dato del problema como valor unitario. Uno de los errores más frecuentemente descritos en estudios relativos a la razón y proporcionalidad se conoce como *ilusión de linealidad* que corresponde a la tendencia a aplicar modelos lineales en situaciones no propicias para que éstos puedan ser aplicados. Constituye así una estrategia incorrecta para abordar situaciones problemáticas en donde las cantidades no mantienen una relación de proporcionalidad simple directa (Modestou y Gagatsis, 2007; Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2005).

Análisis de Instrucción

Este es un aspecto crucial dentro del proceso de diseño del experimento de enseñanza, en tanto que el logro de los objetivos específicos asociados a un contenido se evidenciará en las actuaciones de los estudiantes en tareas que requieran la puesta en marcha de su conocimiento acerca de dicho contenido. Además, como proceso en cadena, el mayor o menor alcance de tales objetivos aporta información sobre aquellas competencias matemáticas que podrían verse estimuladas. En el proceso de diseño y selección de las tareas hemos seguido los criterios descritos por Rico y Lupiáñez (2008, p. 314).

Selección de las Tareas

En la planificación de nuestro experimento de enseñanza se recogieron un total de 146 tareas procedentes de investigaciones previas (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; A.


Fernández, 2001; Lamon, 2007), de estudios como PISA (INECSE, 2005) o TIMSS (IEA, 2001) y de los textos indicados en el apartado anterior “Acercamientos a las noción de razón”.

Se realizó un proceso de selección inicial basándonos en el tipo de tarea, el formato de la misma (preferentemente de desarrollo), la situación implicada (de interés considerando la edad y características de los estudiantes) y procurando que las cuestiones que formaran parte de la tarea tuviesen potencial para promover la discusión. Aplicando estos criterios y las variables de tarea que a continuación se relacionan, la batería de tareas quedó reducida a 13. Las variables de tarea consideradas fueron:


- Tipo de problema: valor ausente, comparación de razones o tasas, porcentajes y escala.
- Tipo de relación entre las cantidades: proporcionalidad directa o inversa.
- Tipos de magnitudes: discreta o continua.
- Representación de la razón o de la proporción: simbólica (convencional, funcional, fraccionaria, porcentaje), verbal, gráfica, icónica, tabular.
- Situaciones: personales, laborales o educativas, científicas y públicas.
- Cantidades de la misma o diferente magnitud.

Finalmente, después de las decisiones tomadas tras los análisis realizados entre una y otra sesión, fueron siete las tareas que se aplicaron en el aula, las cuales abarcan los cuatro focos prioritarios producto del análisis de contenido y distintos valores de las variables previamente mencionadas. Así, por ejemplo, en la tarea 1 los datos aparecen representados gráficamente, las cantidades pertenecen a una magnitud continua, se centra en comparaciones del tipo parte-parte, la razón es entera e implica una situación pública. La tarea 2 (Figura 3) incluye una comparación del tipo parte-parte, el todo no se conoce, la razón se representa verbalmente, la situación es pública, las cantidades son de una misma magnitud discreta e incluye dos razones equivalentes.

Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola



¿BOLA-COLA O COLA-NOLA?



Las siguientes afirmaciones podrían ser parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.
- El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.
- 5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.

- Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.
- Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.
- Si necesitaras divulgar los resultados en un anuncio publicitario, ¿cuál afirmación podría ser más efectiva? ¿Por qué?
- Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

Figura 3. Tarea 2 “Preferencia en el Refresco de Cola”

En términos más generales la tarea 3 es un problema de porcentajes cuya situación es de tipo científica. La tarea 4 es de proporcionalidad directa, está orientada principalmente a caracterizar gráfica y simbólicamente la relación de proporcionalidad. La tarea 5 está orientada al estudio de la proporcionalidad inversa. La tarea 6 implica una situación personal, es un problema de comparación de razones que tienen la cualidad de que los términos se relacionan aditivamente de la misma manera. La tarea 7 atiende a ideas asociadas a los conceptos de escala y semejanza, las cantidades pertenecen a las distintas magnitudes (longitud, superficie, volumen).

Estudio y Toma de Decisión sobre la Gestión de la Clase

Nuestro experimento se sitúa en el marco curricular basado en la noción de competencia matemática propuesta en el estudio PISA (OCDE, 2004). Adoptamos el modelo funcional sobre el aprendizaje de las matemáticas que sugiere dicho estudio, lo que ha originado que la propuesta de enseñanza diseñada esté basada en problemas de situaciones cotidianas, en los que el conocimiento matemático puesto en funcionamiento se presenta en una variedad de contextos, y potencie medios reflexivos correspondientes a diferentes procesos cognitivos de aprendizaje. Parafraseando la definición de alfabetización o competencia matemática del proyecto PISA y centrándola en los contenidos razón y proporcionalidad, el objetivo instruccional del experimento de enseñanza realizado es fomentar, en el trabajo en el aula sobre razón y proporcionalidad, las capacidades de pensar y razonar, argumentar, comunicar, resolver problemas, representar ideas sobre razón y proporcionalidad, utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones sobre dichas nociones.

La intencionalidad de fomentar las capacidades señaladas exigió una metodología de trabajo en el aula adecuada. Optamos por una adaptación de la metodología ACODESA⁴ la cual está basada en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión. Tiene un enfoque de tipo socio-constructivista (Hitt, 2007). En nuestra investigación la metodología de trabajo en aula se desarrolló en cuatro etapas: (1) trabajo individual, (2) trabajo colaborativo, (3) puesta en común y (4) reconstrucción individual de la resolución de las tareas fuera de clase. El trabajo individual inicial hace posible que los estudiantes activen razonamientos que podrán compartir posteriormente en los equipos de trabajo. La etapa de trabajo colaborativo y la puesta en común tienen por objetivo integrar a los estudiantes en un planteamiento activo de cuestionamiento de los conceptos y de construcción crítica de sus propios conocimientos, incitándoles a proponer sus propias conjeturas y propuestas de resolución. La reconstrucción individual procura promover una reflexión sobre lo realizado en las etapas previas. El trabajo se realiza sobre tareas abiertas, complejas o no tradicionales, que favorecen la reflexión y el debate, lo cual responde a nuestro interés por estudiar cómo se reelabora un concepto a partir de la experiencia colaborativa.

Análisis Didáctico en la Fase de Preparación del Experimento

Tras describir el análisis de contenido, cognitivo e instruccional realizado en la primera fase del experimento de enseñanza, precisamos la función de estos análisis en esta fase en la que se diseñan las intervenciones a realizar en el aula.

La revisión curricular nos permitió detectar los contenidos y expectativas de aprendizaje relacionados con la razón y la proporcionalidad contemplados en la formación de maestros. La consulta de los textos señalados hizo posible la identificación de distintos significados vinculados a estas nociones.

⁴ Siglas referentes a Apprentissage Collaboratif, Débat Scientifique y Auto-réflexion.

En el análisis de contenido delimitamos los tipos de conocimientos conceptuales y procedimentales relacionados con la razón y la proporcionalidad, establecimos las relaciones y prioridades de enseñanza entre conceptos y procedimientos asociados a la razón y proporcionalidad, y decidimos cuáles abordar en el experimento de enseñanza. Identificados los 4 focos conceptuales prioritarios y decidimos seleccionar tareas que los abarcaran. Esta decisión obedeció a nuestro objetivo investigador referente a recoger información sobre las actuaciones de los futuros maestros en relación con distintos aspectos de la razón y la proporcionalidad.

El estudio de las representaciones asociadas a la razón y la proporcionalidad permitió clarificar las potencialidades de cada uno de los sistemas de representación para estas nociones, es decir, se logró identificar las características de las nociones que se evidenciaban con más fuerza en cada representación. Así mismo el análisis fenomenológico permitió detectar situaciones donde se usan la razón y la proporcionalidad. Como resultado, el tipo de representación y las situaciones se constituyeron en una variable para elegir las tareas que se trabajarían en el aula.

El catálogo de errores elaborado dentro del análisis cognitivo fue otra de las variables consideradas al contemplar que las tareas permitieran trabajar sobre alguna de las dificultades que presentan los estudiantes. El análisis cognitivo, en esta fase, ha posibilitado vincular los objetivos específicos y las competencias, y relacionar la planificación del trabajo concreto de aula con las expectativas generales descritas en la programación de la asignatura. Así mismo ha sido clave para identificar la mayoría de las variables de tarea.

En síntesis, la programación de las sesiones se describió en términos de: (a) las expectativas de aprendizaje del estudiante, (b) contenidos instruccionales, (c) un análisis detallado de las tareas que se complementó con el enunciado de conjeturas relativas al posible desempeño de los estudiantes en la resolución de las mismas así como de errores potenciales asociados a las tareas, y (d) objetivos de investigación para cada sesión, los cuales son concreciones de los dos objetivos generales del estudio.

FASE II. EXPERIMENTACIÓN

Para describir la fase de experimentación de la investigación, nos centramos en el trabajo realizado en el aula y en las reflexiones efectuadas sobre la información recogida en cada sesión, que son previas y permiten tomar decisiones para la siguiente intervención.

Desarrollo de las Sesiones

La experimentación tuvo lugar durante el curso académico 2009-2010⁵. La recogida de datos se realizó en el contexto natural de desarrollo de la asignatura. Se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes, se grabaron en audio las conversaciones que se desarrollaron en los pequeños grupos, y se grabaron en video las puestas en común y el trabajo de algunos pequeños grupos. Los datos recogidos informan sobre las capacidades matemáticas que el alumnado pone en juego y algún posible cambio en las mismas a lo largo de las sesiones, en relación con distintos componentes de la razón y la proporcionalidad.

⁵ Ver las características generales de la misma en la Tabla 4.

Tabla 4. *Características generales de la experimentación*

	G1	G2	Tareas	Foco Prioritario
1ª Sesión 25-01-10 (2 h)	48	27	Fracción, razón y porcentaje Preferencia en el refresco de cola	F1. Razón: concepto, caracterización y tipos
2ª Sesión 28-01-10 (1h)	21	25	Los niveles de CO ₂	F4. Porcentajes: significados y usos
3ª Sesión 19-04-10 (2h)	62	28	Crecimiento de bacterias Permanencia activa de un fármaco	F2. Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones
4ª Sesión 17-05-10 (2h)	67	39	Compartiendo pizza El palacio real de la Alhambra	F1. Razón: concepto, caracterización y tipos F3. Proporcionalidad geométrica

G1: Asistencia en el Grupo 1

G2: Asistencia en el Grupo 2

Después de cada una de las sesiones se hizo un balance de lo sucedido en la misma, siguiendo el proceso que se describe en la Figura 4. Este balance condujo a la toma de una serie de decisiones orientada a la reelaboración del diseño y la mejora de la siguiente sesión. Además implicó la revisión de las conjeturas planteadas para dicha sesión y la siguiente.

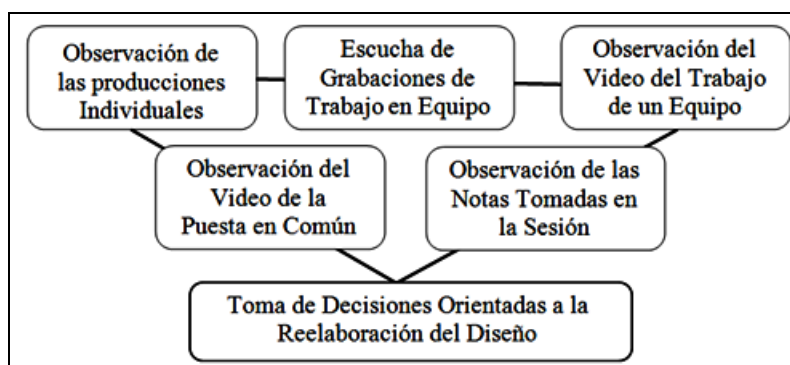


Figura 4. Acciones seguidas en el análisis entre sesiones

Análisis Didáctico en la Fase de Experimentación

Tanto el análisis de contenido como el análisis cognitivo nos proporcionaron pautas para el examen y revisión de la información obtenida en las sesiones. La información procedente de tales análisis se utiliza en esta fase como referente a partir del cual interpretamos las actuaciones de los estudiantes. Nos aportan un marco desde el cual actuar ante determinadas reacciones de los estudiantes. Por ejemplo, durante la primera sesión con el grupo 1 los estudiantes no lograron establecer el tipo de comparación esperada (parte-parte) y mostraron desconocimiento de la noción de razón. Este tipo de situaciones motivó a la investigadora-docente a recurrir a conocimientos obtenidos en el análisis didáctico, para solventar las deficiencias mostradas e intentar llevar a los estudiantes al logro del objetivo instruccional propuesto inicialmente. La observación de la información recogida en cada sesión llevó a tomar decisiones sobre el diseño de la siguiente sesión, justificadas a partir de conocimiento aportado por el análisis de

contenido o cognitivo. Por ejemplo, después de la primera sesión en el grupo 1 constatamos que los estudiantes no mostraron comprensión sobre aspectos básicos de la noción de razón y aunque para la siguiente sesión se había planificado trabajar sobre el porcentaje decidimos, basándonos en el análisis de contenido, definirlo como un tipo particular de razón, así desde esta perspectiva podríamos retomar y recalcar algunas características de la razón y vincular directamente las dos nociones.

FASE III. ANÁLISIS RETROSPECTIVO DE LO ACONTECIDO

La tercera fase del experimento de enseñanza consiste en realizar un análisis de todo lo acontecido en las dos fases anteriores, si bien cobra más peso el análisis particular de los datos obtenidos en la fase II. Las acciones a realizar, en esta fase, están guiadas por los objetivos de investigación del estudio. En nuestro caso, y debido a la metodología utilizada, el análisis retrospectivo se focaliza en tres unidades de estudio: de gran grupo (análisis de las sesiones grabadas y transcritas), pequeños grupos (trabajo mostrado por los equipos de alumnos en sus grabaciones y protocolos) y casos individuales de estudiantes (trabajo mostrado en las hojas de trabajo individual del alumnado). En todos los casos se trata de un análisis cualitativo de corte interpretativo.

El objetivo del análisis retrospectivo del gran grupo es profundizar en la situación ocurrida durante la intervención en el aula, aportando marcos explicativos para las actuaciones de los estudiantes y conjeturas sobre posibles formas de abordar las dificultades detectadas en nuevas circunstancias. Con ello se busca proveer “conocimiento” que amplíe los resultados recogidos en el campo de investigación relativo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la razón y proporcionalidad, específicamente en el contexto de la formación de maestros de primaria. Destacamos que el análisis retrospectivo del gran grupo persigue además detectar las debilidades y fortalezas de la dinámica de aula y de las tareas aplicadas, así como estudiar el papel del investigador durante la experimentación. El objetivo del análisis retrospectivo del pequeño grupo y de casos individuales se interesa por determinar el grado de consecución de las expectativas de aprendizaje propuestas en términos de los objetivos específicos y de las competencias matemáticas asociadas. El análisis retrospectivo global de cada sesión (gran y pequeño grupo) pretende dar información sobre el grado en que se han logrado los objetivos de investigación en cada sesión, así como hacer una revisión de las conjeturas planteadas para la misma. La información procedente de ésta revisión constituye la base que fundamenta la valoración de la sesión. En el caso, por ejemplo, de la sesión 1, hemos buscado evidencias del logro de los objetivos de investigación para dicha sesión en el trabajo colaborativo y la puesta en común de la resolución de la tarea (ver Figura 5). Se ha seguido el mismo proceso para cada una de las tareas y sesiones.

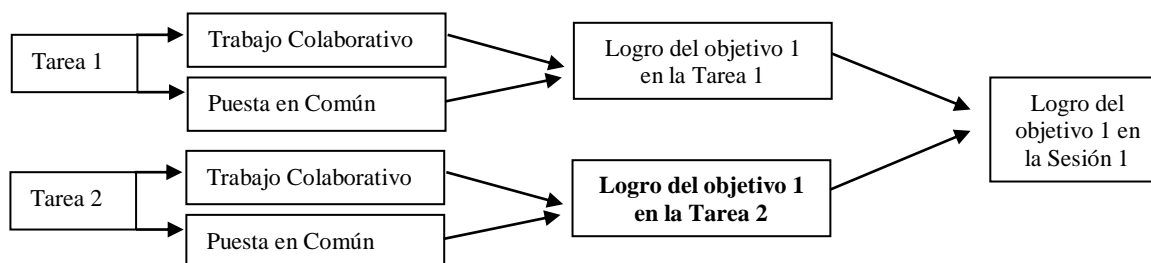


Figura 5. Esquema del estudio de los objetivos de investigación para la sesión 1

A continuación, con el fin de ejemplificar el trabajo realizado, mostramos resultados procedentes del estudio realizado sobre el objetivo 1 basándonos en la información

procedente de las actuaciones de los estudiantes en la tarea 2, trabajada en la sesión 1 (ver Figura 3).

Logro del Objetivo 1 de Investigación⁶ en la Pregunta 4 de la Tarea 2

Mostramos como ejemplo el análisis sobre el logro de este objetivo debido a la relación que guarda con el análisis de actuación, no obstante indicamos que los objetivos de investigación para la sesión consideran también otros aspectos relativos a la dinámica de clase y a la valoración de las tareas.

En la primera sesión se trabajaron dos tareas, nos centramos aquí en los resultados procedentes del análisis de la resolución de una de las preguntas (la 4ª) de la tarea 2 (Figura 3). El estudio de las respuestas dadas a dicha cuestión nos aporta información acerca de los conocimientos de estos estudiantes en relación con formas de representar la razón “3 a 2”. En la Tabla 5 recogemos las manifestaciones expresadas en cada uno de los pequeños grupos.

Tabla 5. Logro del objetivo 1 en la pregunta 4 de la tarea 2, Grupo 1

	Otras Formas de Representar la Relación “3 a 2”											
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
Rep1	*	*										*
Rep2	*	*	*			*	*			*		*
Rep3	*	*				*	*			*		
Rep4				*	*	*					*	

Rep1: Una razón equivalente a 3:2
 Rep2: Porcentajes 60% y 40%
 Rep3: Fracciones parte-todo $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$
 Rep4: Descripción verbal parte-todo

Como se recoge en la Tabla 5, tres de los equipos (E1, E2 y E12) aportaron una razón equivalente a “3 a 2”. En todos los equipos expresaron la razón “6 a 4” como alternativa para expresar la comparación de la preferencia de refresco, tal y como lo ejemplificamos con un fragmento del trabajo del equipo E1: “y la última que dice..., eh... pues sería por ejemplo... pon si la relación es tres a dos es igual que seis a cuatro de cada diez eh...”.

La representación más frecuente que mencionaron los estudiantes es el porcentaje. En total 7 de los 12 equipos manifestaron que 60% y 40% era otra forma de expresar la relación de “3 a 2”. Este hecho evidencia que estos estudiantes reconocen al menos intuitivamente la relación que hay entre la razón y el porcentaje. El fragmento que mostramos procede del equipo E3, en el cual adicionalmente se mostró un razonamiento que indica una comprensión de la relación entre razón y porcentaje:

“porque tú dices tres y dos, eso quiere decir que habría cinco... divides cien entre cinco... el total como si fueran cinco personas... cada persona representa el veinte por ciento, equis es veinte... ah... pues directamente da (varios le responden ¡claro!), el sesenta por ciento de lo que prefieren una y ahora el cuarenta por ciento quieren otro, yo lo que quería hacer es dividir cien en cinco partes cada parte es el veinte por ciento y tres pues sesenta...”

⁶ Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en torno a la razón, fracción y porcentaje así como sobre la relación entre estas nociones.

La representación de la razón “3 a 2” empleando la noción de fracción parte-todo se evidenció en el trabajo de cuatro equipos (E2, E6, E7 y E10). En el equipo E2 esta manera de representar se conjugó con la idea de que el total de elementos se correspondía con la suma de los elementos de la razón, así que “el todo” considerado en las fracciones mencionadas en estos equipos fue cinco, o 28565 (suma de los elementos de la razón de la 2ª afirmación) en el caso del equipo E2.

En los equipos E4, E5, E6 y E11 se expresó una descripción verbal de la relación parte-todo determinada por la cantidad de personas que preferían un refresco (la Bola Cola) respecto al total de 5 personas. Así ocurre en el equipo E11: *“tres de cada cinco personas prefieren la Bola Cola porque a la hora de transmitírselo a la gente es más claro, ¿no?...”*.

Las actuaciones Rep1 y Rep2 corresponden a la representación de la razón como una relación parte-parte, mientras que las actuaciones Rep3 y Rep4 son representaciones de la razón como relación parte-todo. De la Tabla 5 se desprende que los estudiantes reconocieron estos dos significados de la razón.

Análisis Didáctico en la Fase de Análisis Retrospectivo

Utilizamos los aportes teóricos derivados del análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, para enmarcar e interpretar las actuaciones de los estudiantes. Por ejemplo en el estudio del logro del objetivo 1 de investigación para la sesión, al examinar las representaciones mostradas por los equipos para expresar la relación de “3 a 2” (Tabla 5), contrastamos los aportes de los estudiantes con las representaciones que se habían recogido en el análisis de contenido. De este modo llegamos a determinar que de las siete representaciones recogidas, los estudiantes mostraron cuatro de tipo simbólico. En el grupo 1 no dieron muestra del uso de las representaciones gráficas para expresar la razón.

Los objetivos específicos instruccionales y las competencias matemáticas asociadas, procedentes del análisis cognitivo, han sido utilizados en el análisis retrospectivo como “lentes” para observar las producciones de los equipos. Particularmente en relación con el objetivo instruccional específico centrado en que el estudiante llegue a expresar una razón mediante distintas representaciones, observamos que 6 de los 12 equipos, lograron expresar al menos dos representaciones distintas para la relación “3 a 2”. Los equipos E1, E2 y E6 mostraron tres formas distintas de expresarla, lo cual es evidencia de un mayor logro de las expectativas de aprendizaje en relación con otros equipos como E3, E4 o E5. En consecuencia, basándonos en la relación previa entre objetivos específicos y competencias matemáticas, observamos que el trabajo de los equipos E1, E2 y E6 da más información sobre cómo se han estimulado sus competencias matemáticas de comunicar y representar.

Por otra parte consideramos que la descripción de las tareas en términos de distintas variables realizada en el análisis de instrucción facilita la valoración de las tareas que se realiza en el análisis retrospectivo. Así en la tarea 2 y particularmente respecto a la variable *tipo de razón (entera-no entera)* señalamos que de acuerdo con las actuaciones y conocimientos matemáticos puestos de manifiesto por los estudiantes de este grupo (no descrito en este capítulo), podría resultar más productivo proponer inicialmente una razón entera y posteriormente discutir lo que sucede con una razón no entera como lo es 3:2. Por otro lado, el carácter abierto de la tarea resultó ser una fortaleza debido a que constituyó una oportunidad para conocer cualitativamente las ideas iniciales de los estudiantes en torno a la razón. Este carácter abierto también suscitó conversaciones productivas durante el trabajo colaborativo.

CONCLUSIÓN

Con este trabajo se ha mostrado la utilidad del análisis didáctico en el marco de un experimento de enseñanza, se ha ejemplificado el desempeño de las tres primeras fases del análisis didáctico para el caso concreto de la razón y la proporcionalidad y se han vinculado elementos de la metodología de investigación utilizada y del análisis didáctico.

El análisis didáctico ha constituido un marco que ha permitido organizar y fundamentar muchos de los conocimientos que eran necesarios en el desarrollo del experimento de enseñanza. Se ha descrito el empleo del mismo en el diseño, rediseño y puesta en práctica de la propuesta de enseñanza. Esta aplicación se ha plasmado en las decisiones que la profesora-investigadora ha tomado en relación con el aprendizaje de los estudiantes después de cada intervención y se ha utilizado como referente que permite estudiar los procesos de resolución manifestados por los estudiantes en las tareas de razón y proporcionalidad consideradas en la experimentación.

En nuestra investigación también hemos utilizado las herramientas de exploración, organización y estudio de la información propuestas en el análisis didáctico, entre las cuales están los mapas conceptuales y las tablas de vinculación entre las expectativas de aprendizaje (Rico y Lupiáñez, 2008). Las mismas han resultado eficaces para visualizar las relaciones entre los componentes del análisis del contenido así como para mostrar la articulación entre los objetivos de instrucción y competencias matemáticas globales que se pretendían estimular en el experimento de enseñanza.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en Educación Matemática” del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

REFERENCIAS

- Ben-Chaim, D., Keret, J. e Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 333-340.
- Cai, J. y Sun, W. (2002). Developing students' proportional reasoning: A Chinese perspective. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios and proportions. 2002 Yearbook* (pp. 193-212). Reston, VA: NCTM.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representación y Modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona. Horsori.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: LAU.
- Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria*. Tesis Doctoral. Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España.

- Fernández, F. (2001). Proporcionalidad de magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 533-556). Madrid: Síntesis.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.
- García, J. y Bertrán, C. (1987). *Geometría y experiencias*. Granada: Alhambra.
- Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 471-498.
- Godino, J. D. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Disponible en <http://www.local.ugr.es/jgodino/edumat-maestros/>
- Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris: Hermès.
- Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (Ed.) (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: Editor.
- International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (2001). *TIMSS 1999 Mathematics Items. Released set for eighth grade*. Descargado el 2/07/2009 de http://timss.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math_items.pdf
- Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Llinares, S. y Sánchez, V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *BOE*, 312, 53747-53750.
- Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.
- Rico, L. (2007). Competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L; Marín, A; Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Reston, VA: NCTM