

De la aritmética discreta, al concepto de variable

Natalia Guzmán Bautista, Jairo Pulido Gómez, Mónica Alarcón R.

CORPORACIÓN ESCUELA PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL
natalia.guzman@epe.edu.co; jairo.pulido@epe.edu.co; monica.alarcon@epe.edu.co

Resumen

Una de las dificultades en las matemáticas escolares es la iniciación al lenguaje algebraico, para esto es necesario fortalecer la transición de la aritmética al álgebra y utilizar patrones geométricos que lleven a la generalización dando significado a la utilización de la letra requerida en el aprendizaje del álgebra.

Esta transición es importante, pues permite el paso de lo concreto a lo abstracto, o como Piaget lo llama de la percepción a la representación. Esto no sólo se presenta al enseñar nociones espaciales y geométricas también se presenta en la enseñanza del álgebra, puesto que un camino es desde lo concreto (lenguaje natural) para llegar a la simbolización que en este caso sería lo abstracto (uso de la letra). Dicha propuesta, se fundamenta en el manejo de representaciones geométricas a lo que algunos autores llaman “pruebas sin palabras” Flores (2000).

Introducción

Existen varias posturas de cómo se concibe y cómo se aplica la matemática, además de cómo se trabaja en el ámbito escolar, la Escuela Pedagógica Experimental ha venido desarrollando una concepción de matemáticas que orientan el trabajo con los estudiantes en cuanto a la construcción del conocimiento. Debido a la diversidad de tareas y al uso de la tecnología procesos que anteriormente se realizaban de forma algorítmica, han perdido su fuerza y han ocupado ese lugar procesadores, ordenadores lógicos, calculadoras, que agilizan el trabajo. No obstante a pesar de las facilidades de tiempo se corre el riesgo de perder procesos que se reconocen como importantes, la importancia del pensamiento, la creatividad y la imaginación, que no solo aporta al área de las matemáticas, sino a una formación integral.

En la EPE venimos buscando, desde hace varias décadas, alternativas en y para la clase de matemáticas. En estas incursiones hemos privilegiado más que el aprendizaje de algoritmos y procedimientos rutinarios, lo que denominamos “hacer matemáticas”, que no es otra cosa que propiciar entornos de trabajo para lograr las metas siguientes.

1. Fortalecer y desarrollar diversas formas de pensamiento tales como el iterativo y el analógico que unidos a lo aditivo, multiplicativo, probabilístico y proporcional, han sido reconocidos desde siempre, como determinantes para el hacer matemáticas.
2. Propiciar la invención y hallazgo de patrones y modelos, con la firme convicción de que lo que mejor caracteriza a las matemáticas es la búsqueda de patrones.
3. Crear ambientes de trabajo que busquen en los estudiantes a la vez un gusto por las matemáticas y una confianza en sí mismos y en las posibilidades del trabajo en colectivo.
4. Seleccionar los problemas de trabajo de tal suerte que en los procesos de búsqueda los estudiantes tengan que acceder a los elementos operatorios y algorítmicos.
5. Crear situaciones que nos permitan conocer mejor los procesos de matematización y de “hacer matemáticas”. Esta meta está unida con nuestra preocupación permanente de investigar el fenómeno del aprendizaje.

Consideramos que esto implica una concepción de las matemáticas diferente, sin embargo en otros lugares y como un propósito general de la educación Colombiana, se debe contar con un referente común a todas las instituciones, es decir, asegurar que todos los estudiantes tengan dominio de ciertos conceptos básicos para estar en capacidad de desenvolverse en igualdad de condiciones dentro de nuestra sociedad, esto con el fin de elevar la calidad de la educación en nuestro país. Para ello el ministerio de Educación Nacional (MEN) propuso unos estándares de calidad donde se exponen ciertas exigencias temáticas y expectativas que deben plantearse a todos y cada uno de los estudiantes de acuerdo al grado que estén cursando.

Conocimiento matemático en torno al álgebra

Es importante tener en cuenta que al realizar un análisis de los aspectos matemáticos a los que se hace referencia, se busca tener claro lo que se va a realizar con los estudiantes y los sustentos que en este aspecto son importantes, no solo conocer sino también considerar a la hora de ponerlos en juego en el aula. Por esto es necesario presentar entre otros aspectos, la posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder manejarlos de forma sencilla es, precisamente, lo que hace que el álgebra sea de gran utilidad, pero, sin embargo, los estudiantes no llegan a comprender y aprovechar la ventaja que supone la utilización de símbolos porque no llegan a ver la relación con lo que representan, y esto es debido, generalmente, a que las situaciones que se plantean no son lo suficientemente adecuadas como para llegar a necesitar símbolos. Para que esto no ocurra los símbolos tiene que servir realmente para recordar y comprender los procesos que se han seguido y para facilitar y hacer posible los cálculos.

Otra de las mayores dificultades con que se encuentran los estudiantes al iniciar el estudio formal está en el uso y significado de las letras. Esto lleva a pensar que las dificultades del álgebra se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos. Collis dice que esta dificultad no

sólo se da con las letras a un determinado nivel, sino que está muy relacionada con el tamaño de los números en otros niveles. Cree que el pensamiento concreto permanece mientras está restringido a la experiencia concreta, y que se llega al pensamiento formal en el momento en el que se pueden manejar elementos abstractos y operaciones.

Metodología del taller

Como el sentido de la estructura de las actividades va encaminada a centrar el trabajo en los procesos de pensamiento, de creatividad, de elaboración de patrones, en lugar de repetir y adiestrar; la organización del taller debe brindar espacios en los que el trabajo personal, grupal y los concesos del colectivo permitan la construcción del conocimiento. En estos procesos el papel de los argumentos, y las habilidades en la socialización de las elaboraciones, en las cuales aparecen el uso de las representaciones y de diversos lenguajes, dotan de mayor significado el trabajo permitiendo que cada persona que lo aborde tenga la oportunidad de construir, pero con el apoyo de lo que llama Brosseau una microsociedad científica que se genera en alrededor de la propuesta de trabajo.

Se proponen cuatro actividades en los que el objetivo principal es la identificación de patrones de regularidad desde la observación geométrica y concluir con el tránsito al lenguaje simbólico con la siguiente estructura:

Fase personal: De acuerdo a las indicaciones de la actividad esta fase permite el primer acercamiento con el problema, es un momento en el que se pueden hacer apreciaciones propias e identificar desde lo geométrico regularidades, se espera que acá se establezcan propuesta de solución al problema planteado y que se formulen para luego someterlas a procesos de validación.

- Rol de Tallerista: Dinamizar el taller, aclarar términos y orientar indicaciones, con el fin de incentivar el trabajo hecho por los grupos y evitar la deserción en las estrategias de solución propuestas.
- Rol del Participante: Abordar la actividad sugerida, interpretar las indicaciones y proponer una solución.

Fase grupal: Se organizan pequeños grupos en donde el objetivo es comparar las elaboraciones personales y llegar a acuerdos con el fin de dar una propuesta de solución y estructurarla de una forma clara para socializarla con el grupo en general, en esta fase es importante la discusión y la capacidad para recoger las elaboraciones de los demás y llegar a conjeturas de forma grupal, se fortalece el trabajo en colectivo y al hacerse con grupos pequeños permite una participación más directa. El aspecto principal que se trabaja en esta fase es la comunicación.

- Rol de Tallerista: Organizar los pequeños grupos de trabajo, la cantidad de asistentes que se considera pertinente es de 3 o 4 personas. Orientar los pequeños grupos e indicarles que deben preparar una propuesta de solución para ser socializada de forma general, esta debe ser descrita de la forma como se generó y dar argumentos del por qué satisface el problema.
- Rol del participante: Compartir la elaboración personal y analizar las de los compañeros del grupo de trabajo, con el fin de construir de forma grupal una sola. Debe haber una posición muy crítica y habilidad para considerar lo importante con el fin de llegar a conjeturas de forma colectiva.

Fase de socialización: Este espacio permite poner en práctica la habilidad para expresarse ante el grupo en general con una propuesta de solución que será sometida a un proceso de validación, la forma en que se organiza a los participantes debe suscitar momentos de discusión en donde el principal protagonista es el argumento, ya que es este el que dará razones para que de forma colectiva se valide o no.

- Rol de Tallerista: Moderar las exposiciones de los grupos de tal forma que existan espacios para la socialización de las soluciones, para formular preguntas que tengan la intención de cuestionar la capacidad argumentativa de los expositores, para generar posición crítica ante las exposiciones, para mantener la actitud del grupo y buscar estrategias para que los participantes ganen reconocimiento, y se trabajen sobre las inseguridades y temores propiciando orgullos y protagonismo.
- Rol del participante: Se reconocen dos momentos distintos, el primero de ellos como parte del grupo que se conformó para socializar la propuesta de solución que se concertó y el segundo como auditorio de los demás grupos expositores. En este último se debe adoptar una posición crítica ante el trabajo de los demás con el objetivo de validar lo que se expone, es necesario tener en cuenta que pueden darse múltiples formas de solucionar los problemas propuestos.

Fase de formalización: Luego de observar las propuestas de solución del grupo en general, haberlas cuestionado y validado o no, se ofrece un momento para formalizar, haciendo uso de un lenguaje más estricto que permita generalizar, para este proceso no es necesario determinar de nuevo un orden en las exposiciones simplemente orientados por el Tallerista se debe hacer reestructuración de lo expuesto en la fase de socialización teniendo en cuenta los cuestionamientos y los argumentos que se dieron y construir una nueva propuesta de solución más formal.

- Rol de Tallerista: Disponer el espacio y a los participantes con el fin de organizar lo que se propuso para enriquecer la propuesta de solución de cada grupo, en el caso en que la

propuesta no satisfaga el problema, orientarlos para hacer una reelaboración pasando de nuevo por cada fase, se deben hacer constantes intervenciones para motivar y no desistir del problema.

- Rol del Participante: Construir de forma grupal una propuesta de solución que puede ser enriquecida por lo expuesto por otros grupos de trabajo, o en caso de no poder hacer esa adaptación proponer una nueva. Se debe hacer uso de un lenguaje más formal y de llegar a procesos de generalización que por su estructura puedan ser validados ante el grupo en general.

Fase de retroalimentación: En caso de encontrar propuestas de solución que no satisfagan el problema, estas darán herramientas importantes para considerar el interpretar el problema diferente y de reestructurar parcial o totalmente las soluciones. Esta fase permite organizar la actividad en forma de bucle en donde se identifican aspectos importantes a la hora de enfrentar un problema, como la dinámica de la clase, el papel del error, la importancia del conflicto, la convicción del protagonismo. Al final del trabajo es importante reflexionar sobre procesos que se construyen durante la actividad que son cíclicos y consideramos claves en la clase de matemática como la creatividad, el razonamiento lógico, el montaje matemático y la operatoria.

Actividades

Actividad 1. Construcción del triángulo de Sierpinsky.

Se pide al público que dibujen la figura del “tetris” que tiene forma de L, usando la cuadrícula del cuaderno y tratando de usar de un cuadro a la vez, así:

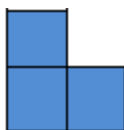


Figura 1.

Para la construcción de la figura 2 se usa la forma de la primera pero esta vez en cada cuadrado, se construirá la figura 1 en su totalidad. Es decir repetir la figura 1 conservando la forma de “L” Así:

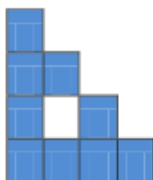
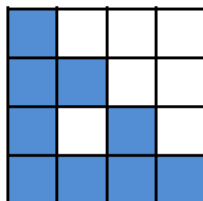


Figura 2.

Nuevamente para la siguiente figura se repetirá 3 veces la figura 2 conservando la forma de “L”.

Se pedirá que continúen dibujando hasta la figura No. 6, posteriormente a esto que encierren cada figura en un cuadro grande con la respectiva cuadrícula en el interior, así:



Ahora se hará un conteo de la cantidad de cuadros pintados, no pintados y la totalidad de estos y registrar la información es una tabla como la siguiente.

FIGURA	CUADROS SIN PINTAR	CUADROS PINTADOS	TOTAL DE CUADROS.
1	1	3	4
2	7	9	16
3	37	27	64
4	175	81	256
n	$4^n - 3^n$	3^n	4^n

El ideal es continuar la tabla sin hacer uso del dibujo, tan solo basándose en las regularidades del mismo, de manera que tan solo para completar el total de cuadros sea necesario saber el dato anterior y multiplicarlo por 4, de manera análoga para los cuadros pintados se requiere el valor del anterior y los cuadros pintados y la diferencia entre estos será el valor de los cuadros sin pintar. A este modelo verbal deberán llegar pues la socialización de estas regularidades será dirigida por el maestro. La pregunta ahora será construir un modelo para completar la tabla si se pregunta por los datos de la figura No 100, obviamente deberán buscar la manera de acortar camino pues sería muy tedioso hacer todos los 99 datos anteriores para encontrar el número 100. De esta forma no es gratuito que se encuentre esa letra allí, pues estará representando cualquier término que se les pregunte, es decir se hará uso de la variable como número generalizado y tendrá sentido en el contexto presentado.

Propósitos:

- Construcción de tablas para registrar información
- Encontrar regularidades a través de la coincidencia de los datos de la tabla.
- Iniciar el uso de la variable.
- Construir modelos usando la letra como numero generalizado.

Actividad 2. “Cubos y caras pintadas”

Se entrega a cada participante 27 cubitos unidad de igual tamaño para que formen con ellos, un cubo grande. Deben ahora pintar el cubo grande que han creado por todas sus caras. Contaran cuantos de los cubitos unidad quedaron con solo una cara pintada, cuantos con 2 caras pintadas, cuantos con 3 y así sucesivamente.

Una vez entendido el ejercicio, será más fácil construir cubos más grandes y más pequeños que el anterior, por lo que ahora deberán construir uno con solo 8 cubos unidad y repetir nuevamente el ejercicio de pintar el cubo grande y verificar la cantidad de cubos unidad que han quedado pintados en una, dos, tres... caras.

Posteriormente dibujaran lo que observan y registraran la información en una tabla. La siguiente es solo una propuesta,

Figura	Cubos con 0 cara pintada	Cubos con 1 caras pintadas	Cubos con 2 caras pintadas	Cubos con 3 caras pintadas	Cubos con 4 caras pintada	Cubos con 5 caras pintadas	Cubos con 6 caras pintas	Total de cubos unidad
1	0	0	0	0	0	0	6	1
2	0	0	0	8	0	0	0	8
3	1	6	12	8	0	0	0	27
4	8	24	24	8	0	0	0	64
5								125
6								
7								

La representación concreta solo se realizara con 8 y 27 cubitos unidad, los demás podrán dibujarlas y hacer desde allí el conteo para registrar la información en la tabla.

Desde la tabla es posible que se identifiquen regularidades y que puedan continuar el proceso sin necesidad de dibujar o construir la figura, se les pedirá ahora que completen la información hasta la figura No. 7. Si es posible solo con las regularidades de la tabla.

Por último construirán un modelo que describa:

El total de cubitos unidad, con 0, 1, 2, caras pintadas,

Para ello solo podrán usar el número de la figura, que es la misma que da cuenta de la cantidad de cubos de lado que requiere el cubo grande, sobre este aspecto son claves las inferencias y la elaboración de correlaciones para llegar a la respuesta.

Propósitos

Esta actividad pretende complementar y dar paso a nuevas actividades. Particularmente serán evidentes aquí aspectos como:

- Tránsito de representaciones, grafica, tabular, simbólica
- Paso de lo concreto a lo abstracto
- Construcción de modelos algebraicos de la situación.

Actividad 3. “el salto de la rana”

Este juego se realiza con fichas de dos colores. Se coloca igual número de fichas, a cada lado de un espacio libre. El objetivo es hallar la menor cantidad de movimientos que permita intercambiar las posiciones de las fichas.

Las reglas del juego son:

- Mover una sola ficha al espacio inmediatamente vacío (paso)

- Saltar sobre solo una ficha a un espacio vacío situado inmediatamente después de esta. Aquí se debe encontrar el menor número de movimientos



Una característica de este juego es la oportunidad de manipular el material, es decir trabajar en concreto. En un primer momento todos deben iniciar jugando con tres fichas a cada lado, posterior a esto cuando alguno determine la menor cantidad de movimientos y *el grupo valide esta solución como la mejor opción*, se continuara con otra cantidad de fichas a cada lado; por su parte el maestro debe ir registrando los datos obtenidos. Es decir para este caso la recolección de datos es un trabajo en colectivo, general para todo el grupo, todos estarán en búsqueda del mínimo de movimientos para cada caso.

Fichas de cada color	Mínimo de movimientos
1	3
2	8
3	15
4	24
n	

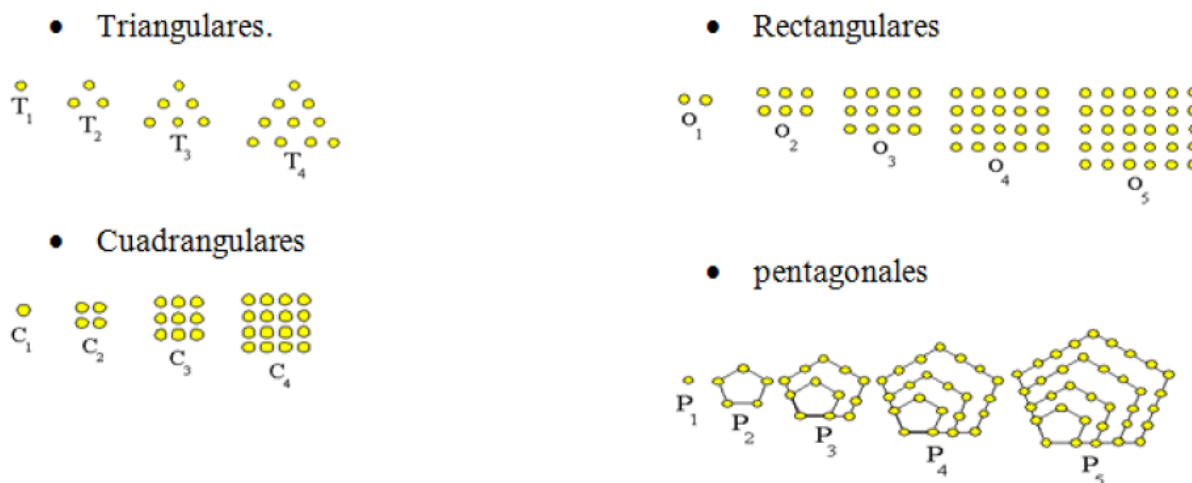
NOTA: Este juego se ha usado en varias ocasiones en los salones de clase de la Escuela Pedagógica Experimental y fue herramienta de una investigación cuyos resultados arrojaron más de 23 soluciones distintas que dan cuenta de los procesos diversos que hacen los estudiantes producto de las invenciones y descubrimientos particulares y a veces personales. Allí se refleja la diversidad del pensamiento. Por esto último es posible que los chicos creen diferentes expresiones a la situación, para responder a la pregunta ¿cuántos movimientos se obtendrán de un número n de fichas a cada lado?

Actividad 4 “Números Pitagóricos”.

Estudiar los números los pitagóricos implica buscar la manera como representaron por medio de puntos y según la forma geométrica obtenida al distribuirlos tendrán una determinada propiedad. Por ello para este taller como ya hemos mencionado la importancia del hallazgo de patrones geométricos en la construcción de la letra como variable, tomamos este hecho importante en la historia de las matemáticas. Construiremos entonces un modelo para los números:

¹ Tomado del texto “La multiplicidad de los patrones y la inagotabilidad del pensamiento”. Proyecto de investigación El modelaje matemático en estudiantes de educación básica: la validación de los modelos y

los procesos de matematización de la experiencia, estudio a partir de dos familias de problemas-
 Noviembre 2003



Una vez graficado cada momento, la dinámica es similar a la de las anteriores actividades, es decir, registrar la cantidad de puntos en relación a cada figura, para poder de allí encontrar el patrón y construir el modelo para cada clase de números.

Referencias bibliográficas

¿Como enseñar ciencias? Principales tendencias y propuestas [Sección del libro] / aut. Aida Campanario Juan Miguel y Moya // Enseñanza de las Ciencias / aut. libro Ciencias Grupo de investigacion en Aprendizaje de las. - Madrid. España : [s.n.], 1999.

Ideas y actividades para la enseñanza del álgebra. Cap. II y III [Libro] / aut. AZARQUIEL. - Madrid : Sintesis, 1993.

La inagotabilidad del pensamiento y la multiplicidad de patrones [Informe] / aut. Experimental Escuela Pedagógica. - Bogota. colombia : [s.n.], 2003.

La transición Aritmética - Álgebra [Libro] / aut. PRETEXTO. UDFJC. COLCIENCIAS. - Bogotá: [s.n.], 2002.

Planteamientos en Educación. Vol 2 [Libro] / aut. Escuela Pedagógica Experimental. - Bogota. Colombia : [s.n.], 2000.

Una metodología activa para la solución de problemas [Libro] / aut. Miro Julia y Margaret. - 1998.