

La paradoja de Aquiles y la Tortuga: Construcción de procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes

Diana Villabona Millán, Solange Roa Fuentes

Universidad Industrial de Santander, EDUMAT-UIS, Bucaramanga, Colombia
diana.villabona@gmail.com; sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen

En este documento se presenta una descomposición genética de la paradoja de Aquiles y la tortuga. Dicho análisis toma los elementos teóricos presentados en Roa-Fuentes (2012) para la construcción del infinito potencial (construcción de procesos iterativos infinitos) y el infinito actual (construcción de objetos trascendentes) mediante el mecanismo de completitud. El análisis teórico, muestra la necesidad de partir de “concepciones primarias” sobre el infinito, que pueden ser controvertidas mediante la construcción formal de procesos iterativos infinitos.

1. Introducción

La naturaleza dual del infinito (como acto y como potencia) ha ocasionado malestar y confusión desde la antigüedad en la mente de matemáticos y filósofos; las situaciones que involucran el infinito resultan ser paradójicas y conflictivas. Según Aristóteles, el infinito potencial es de fácil comprensión para los humanos, esto resulta natural pues las experiencias fuera de un contexto escolar relacionan esta noción matemática con “procesos sin fin” o con todo aquello que resulta inalcanzable por los sentidos (el número de estrellas en el firmamento, el mar, el amor, entre otros). Contrario a esto, el infinito actual se percibe sólo en un contexto escolar y es estudiado con detalle en cursos avanzados de teoría de conjuntos.

La construcción del infinito actual tiene influencia directa en conceptos del análisis elemental, topología y álgebra lineal y abstracta. El infinito potencial y el infinito actual en realidad son dos estructuras diferentes de la misma noción, esta idea puede ser explicada en términos de los elementos de la teoría APOE.

En esta investigación nos interesa resaltar las estructuras *Proceso* y *Objeto* que desde la teoría APOE explican cómo un individuo puede construir conceptos o nociones matemáticas. En particular mostraremos cómo las ideas de infinito potencial y actual pueden estructurarse en la paradoja de Aquiles y la tortuga. Para esto tomaremos los resultados previos presentados por miembros de RUMEC (Por sus siglas en inglés RUMEC: *Research in Undergraduate Mathematics Education*.) quienes han establecido una explicación sobre el tipo de Procesos y Objetos generados en situaciones relacionadas con el infinito; además del nuevo mecanismo mental presentado por Roa-Fuentes (2012) que permite dar el paso de un proceso iterativo infinito al *Objeto* que trasciende de él y de la nueva estructura propuesta por Dubinsky, Weller y Arnon (2013)

2. La teoría APOE y el infinito

La teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) es una teoría que surge de la teoría constructivista y que busca describir cómo las personas construyen los conceptos matemáticos a partir del desarrollo de ciertos mecanismos y estructuras. Los resultados que han arrojado los estudios de diferentes conceptos o tópicos a través de la teoría APOE no son sólo de interés para la investigación en sí misma sino que pueden desencadenar herramientas pedagógicas útiles en la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto o noción (para mayor información sobre la teoría ver Arnon, Dubinsky, Cottrill, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2013)

Han sido diversos los estudios del infinito en términos de la teoría APOE y estos han permitido especializar los elementos de la teoría para dicho propósito. A continuación realizaremos una breve descripción de los estudios que involucran la teoría APOE y el infinito matemático.

2.1 La teoría APOE y el infinito.

Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger (2004) proponen diferentes situaciones donde el infinito aparece, resaltando la importancia de este tópico matemático en conceptos como: límites, asíntotas de funciones racionales, sucesiones infinitas, series e integrales impropias. Así como en algunas estructuras matemáticas estudiadas en álgebra lineal, álgebra abstracta, análisis real y topología en donde son necesarias demostraciones que requieren de la construcción de procesos mentales infinitos. Sin embargo, las concepciones que los estudiantes construyen alrededor de este tópico matemático son contradictorias y están determinadas en muchos casos por los contextos en los que se encuentran inmersas. La primera explicación importante que da la teoría es sobre la relación entre el infinito potencial y el actual:

El infinito potencial es la concepción del infinito como un proceso. Este proceso es construido empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales) la cual es una concepción acción. Repetir estos pasos

(por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de estas acciones en un proceso. El infinito actual es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación de este proceso. (Dubinsky, Weller, McDonald y Brown 2005a, p. 346)

De esta manera el infinito actual es el objeto que se obtiene de aplicar una transformación sobre el conjunto de los números naturales. Brown, McDonald y Weller (2010) proponen dos estructuras determinadas para la construcción del infinito que se asocian con las conocidas estructuras de *Proceso* y *Objeto*; esto es:

- i. Concepción proceso de infinito mediante construcción de un proceso iterativo infinito.
- ii. Concepción objeto de infinito mediante construcción de un objeto trascendente.

El estudio del infinito ha generado la evolución de la teoría misma, ha sido necesario establecer nuevas explicaciones sobre cómo los individuos construyen esta noción matemática.

2.2 Totalidad como nueva estructura.

Esta es una nueva etapa propuesta por Dubinsky y otros (2013) que se encuentra entre las estructuras de proceso y objeto. Aunque diversas investigaciones hacen mención a la necesidad de ver un proceso como una totalidad (Weller et al., 2004; Dubinsky et al., 2005a, Dubinsky et al., 2005b) estas plantean la totalidad como una parte de la concepción objeto y no como una estructura independiente. Dubinsky y otros (2013) muestra para algunos casos específicos, como el de los decimales infinitos periódicos, que existen evidencias de la necesidad de una concepción totalidad que represente un cambio en la forma de pensar del individuo sobre el concepto matemático estudiado.

2.3 El mecanismo “Completez”.

Este elemento es una de las contribuciones que hace Roa-Fuentes (2012) a la teoría, como ya se ha mencionado, las características estáticas (en el objeto) y dinámicas (en el proceso iterativo infinito) son ajenas entre sí, al ver el proceso iterativo infinito como una todo se obtienen “cosas” que no mantienen las características del proceso, es decir, el objeto resultante no hace parte de la sucesión de términos que le da origen. Completez se propone como un mecanismo que permite la construcción del objeto trascendente y como se muestra en Roa-Fuentes (2012) se relaciona con la construcción del conjunto de los números naturales como una totalidad. En la sección cuatro abarcaremos todas estas ideas para la paradoja de Aquiles y la tortuga en el contexto propio de nuestra investigación.

3. Componentes del método

La teoría APOE propone un paradigma de investigación específico que consta de tres componentes: Análisis teórico, diseño e implementación de un modelo de enseñanza y

observación, análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996). En esta investigación desarrollaremos la primera y la tercera componente.

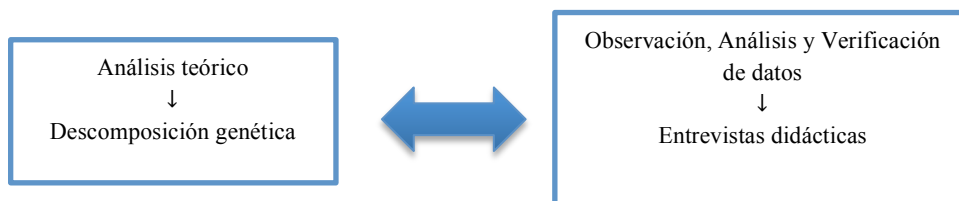


Figura 1. Elementos del método adaptados de Asiala y otros (1996)

La figura 1, vemos que debemos partir de un análisis teórico en el que se tienen en cuenta todos los elementos disponibles que estén relacionados con el tópico a estudiar, los cuales deben considerarse en una descomposición genética. Una descomposición genética revela un camino cognitivo (construido con base del estudio sobre el tópico matemático y su didáctica, así como en su epistemología, su presentación en libros de texto y la experiencia de los investigadores involucrados) sobre cómo un individuo puede construir el tópico matemático de interés. Una descomposición genética hipotética es el primer camino cognitivo que se tiene en cuenta para diseñar y desarrollar entrevistas que permitan determinar esos elementos que pudieron no haber sido tomados en cuenta en el análisis hipotético y aquellos que se tomaron en cuenta pero de los cuales no se encuentran evidencias en el razonamiento de los individuos. Estos elementos enriquecen el análisis teórico que ahora cuenta con evidencias empíricas que apoyan su estructura. Un análisis teórico validado, es una herramienta potente en el diseño de clases y de evaluaciones. Ya que allí se plantean pasos clave en la construcción de conocimiento en los cuales el profesor debe hacer énfasis o detenerse para ayudar a sus estudiantes a superar las dificultades ya detectadas. En la siguiente sección proponemos una descomposición genética hipotética sobre la paradoja de Aquiles y la tortuga.

3. Paradoja de Aquiles y la tortuga: análisis teórico

A continuación aparece la versión de la paradoja a la cual haremos referencia:

Aquiles, hijo de la diosa Tesis, héroe de la guerra de Troya; apodado “el de los pies ligeros” gracias a su gran velocidad, decide enfrentarse a una tortuga en una carrera. Para que la disputa sea un poco más justa, Aquiles da a la tortuga cierta ventaja. Al iniciar la carrera puede verse que cuando Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ésta ya ha avanzado un poco. Nuevamente, Aquiles va tras la tortuga pero al llegar a donde ésta se encontraba descubre que ya ha avanzado otro pequeño tramo. Así, decide seguir tras ella pero en cada intento, la tortuga ha

recorrido una pequeña distancia; de esta manera, ¿podrá Aquiles alcanzar a la tortuga?

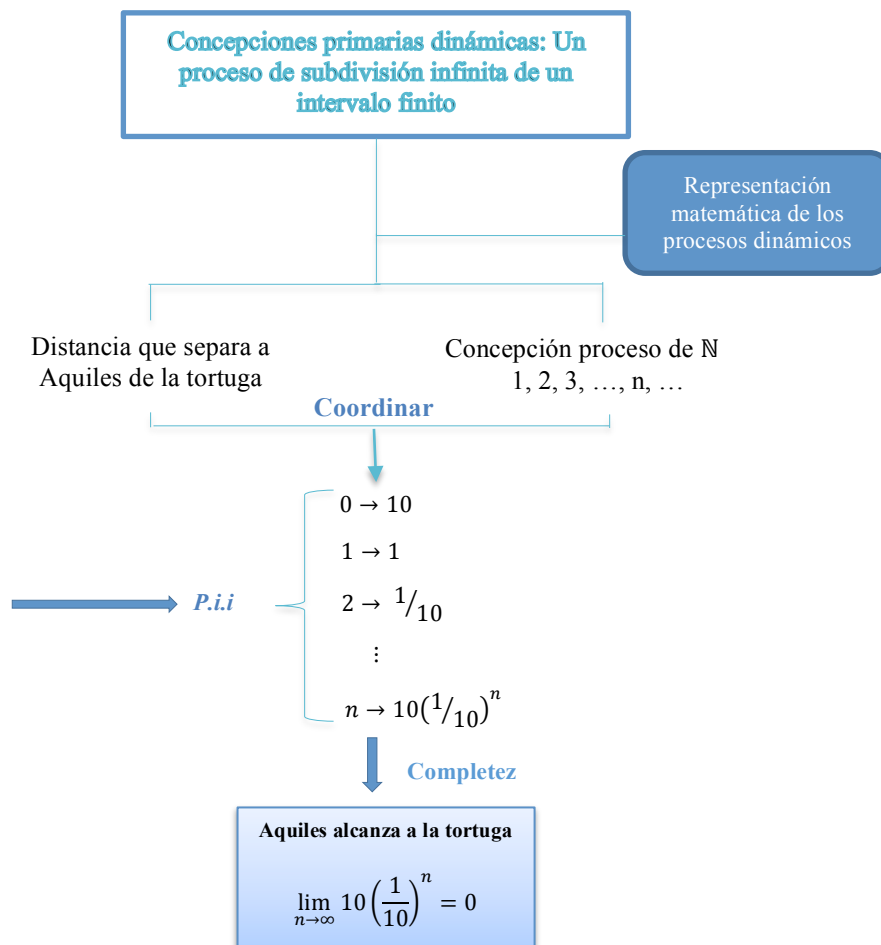


Figura 2. Descomposición Genética Hipotética de la Paradoja de Aquiles y la Tortuga

La figura 2 representa una descomposición genérica hipotética, las concepciones primarias existentes son de tipo dinámico, proporcionadas por el proceso inacabado de dividir una longitud finita, lo que da lugar a un proceso iterativo infinito por el cual podemos determinar para cualquier momento n la distancia que separa a Aquiles de la tortuga; esto es, una transformación de los naturales \mathbb{N} dada por $\frac{10\left(\frac{1}{10}\right)^n}{n}$. La suma de estas distancias arroja una serie geométrica infinita convergente, completar los procesos iterativos a través del mecanismo denominado completez asumiendo la convergencia de los mismos es aceptar que el límite al infinito del término general de la serie es cero, es decir, que al realizar el proceso iterativo infinitas veces no existirá distancia que separe a Aquiles de la tortuga. Durante la presentación de esta propuesta

analizaremos con detalle los elementos teóricos planteados y casos particulares de individuos pensando sobre la situación propuesta.

4. Referencias

- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2013). *Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, II*. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.
- Brown, A., McDonald, M. & Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 115-141.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335-359.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266.
- Dubinsky, E., Weller, K., & Arnon, I. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The Case of 0.999... and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 13(3)
- Roa-Fuentes, S. (2012). El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas. Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV - IPN. México.
- Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS*, 51(7), 741-750.