ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA Y FORMACIÓN DE PROFESORES PARA LA EDUCACIÓN BÁSICA

3

CAPÍTULO tres

Jorge Orlando Lurduy O.
Jaime Humberto Romero C.

Profesores Universidad Distrital Francisco José de Caldas

El grupo de investigación «Matemáticas Escolares" conformado por profesores del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, dada su naturaleza ha venido implementando, reflexión, y revisión bibliográfica en torno a algunos temas de la educación matemática y de la matemática escolar. Miembros de este grupo, realizamos este escrito como una manera de participar a los posibles lectores algo de lo que hemos aprendido.

Empezamos diciendo que estamos de acuerdo con la petición presente en los lineamientos curriculares: hoy el estudiante debe aprender mediante la resolución de problemas. Aunque esta petición recae sobre los estudiantes de los colegios, indirectamente crea un mandato sobre los estudiantes de las instituciones formadoras de profesores cuyo ámbito de desempeño será justamente, los colegios, pero también recae sobre los actuales profesores de la educación básica y de la media vocacional.

Este enfoque nos ha llevado a proponer que el futuro profesor deberá formarse a través de resolución de problemas, y que los problemas que habrá de construir y abordar serán los del profesor. En particular, como el profesor enseñará matemáticas en la escuela básica, algunos de sus problemas tendrán que referir la enseñanza de las matemáticas allí. Por lo tanto, los problemas que nuclearán su formación no son de matemáticas; aunque, obviamente, este tipo de problemas no se excluye de su formación. Esto quiere decir que el futuro profesor, a través de la resolución de problemas construirá saber como producto de conocimiento teórico práctico acerca de:

- La historia, como objeto de enseñanza, del objeto que habrá de enseñar; es decir, sobre la historia de las representaciones y recursos instruccionales que han estado presentes en la actividad de los profesores cuando enseñan este objeto.

- La historia del objeto de enseñanza visto como objeto de las matemáticas (historia y epistemología).

- La historia del objeto de enseñanza como objeto curricular, incluyendo los fines que se le adjudican dentro de los propósitos educativos y de formación.

- El objeto de enseñanza como objeto de aprendizaje. (obstáculos epistemológicos, estructuras de pensamiento).

- Del lenguaje teórico de las matemáticas, de sus formas argumentativas, de sus formas de estructuración y construcción. Es decir, deberá saber la historia y epistemología de las matemáticas. Y todo esto habrá de aprenderlo en función de su profesión y de lo que la caracteriza distinguiéndola de las otras profesiones; esto es, la enseñanza.

Aquí presentamos parte de la elaboración y estudio realizado por el grupo en el tema **estructura multiplicativa,** que a su vez es un elemento de lo que hemos denominado **pensamiento aritmético**. Por otra parte, estos son temas que la investigación y la teoría decantada de la educación matemática ha reconocido como pilares de la matemática que se enseña en la escuela, llamada **matemática escolar**, que es referente fundamental en la formación profesional del profesor de matemáticas para la educación básica.

El enfoque metodológico que practicamos en nuestra labor docente e investigativa es el de **resolución de problemas**, una de cuyas posibilidades es el **estudio de casos**. En este escrito disponemos elementos de análisis y discusión de tres casos, que nos permiten presentar desde nuestra perspectiva teórica y metodológica algunas concepciones de profesores en torno al papel del problema en la organización de la clase; al significado del problema; al significado de la multiplicación; a su valoración como resolutor de problemas; al sentido de su profesión; y, al origen del conocimiento matemático de los escolares. Sugerimos al lector analizar y participar en la discusión sobre la situación problémica, y si es posible y le interesa, escribirla y remitirnosla, o discutirla con otros colegas y profesores.

3.1 SITUACIÓN PROBLÉMICA

En el seminario sobre problemas aritméticos escolares, de profesores que se desempeñan en la Educación Básica en centros educativos urbanos y rurales del departamento de Cundinamarca, se presentó la siguiente situación:
El moderador de la reunión propone analizar y resolver individualmente, y después en grupo, los siguientes casos:

Caso No 1

Andrea, la profesora de tercero de primaria está planteando la clase de matemáticas para el siguiente día. Está tratando de formular una situación que le de sentido a la actividad que han de desplegar los niños al abordar la multiplicación. Así, pensando en los juegos que hacen los niños, evoca a Juan y Margarita (dos de sus alumnos) a quienes vio durante el recreo del día anterior intercambiándose, al final de un juego de bolas, esas bellísimas esferas multicolor. Recuerda haberse sorprendido con el negocio convenido: Juan aceptó darle tres canicas de tamaño normal a Margarita por cada canica diminuta que la niña le entregara. Andrea sonrió mientras pensaba "los niños no son bobos, ellos intercambian belleza… y como si fuera poco me han dado la situación que andaba buscando".

- ¿Cree usted que esta situación le es útil a la profesora para iniciar a los niños en la multiplicación?

- Si no es útil para iniciarlos ¿En qué momento de la enseñanza de la multiplicación sería aprovechable dicha situación? ¿Usted cómo aprovecharía esta situación con sus estudiantes de tercer grado?

Caso No 2

Martín nunca había dudado que su profesor, el viejo Romero, como solían llamarlo él y sus compañeros de curso, le dijo la verdad cuando le enseñó a multiplicar: *"la multiplicación es una suma abreviada"*. Martín, que hoy también es profesor en básica primaria, inicia sus lecciones acerca de la multiplicación con la misma afirmación de su profesor. Sin embargo, este año, luego de explicar cómo se encuentra el área del rectángulo, pidió a los niños que hallaran el área del rectángulo de tres metros de ancho y cuatro metros de largo. Carlos le hizo una pregunta que lo puso a dudar de la verdad que él le había adjudicado a la afirmación del viejo Romero.

profe: ¿Qué quieres Carlitos?

Carlitos: Es que yo hice esto 3m + 3m + 3m + 3m = 12 m. Pero Ana dice que el área es 12 metros cuadrados y yo no entiendo de dónde salen los metros cuadrados.

- ¿Cuál cree usted que es la duda del profe Martín?
- ¿Cómo le ayudaría usted a Martín a salir de la duda?
- ¿Cómo le ayudaría usted a Carlitos?

Caso No 3

Angelita y Gustavo, profesores del grado tercero, están charlando a la hora del descanso sobre los problemas de multiplicación que ellos pensaron, cuando prepararon la clase de matemáticas sobre multiplicación. Angelita ya trabajó con sus muchachos a primera hora y el profesor Gustavo va a tener clase, en seguida, después del recreo. En uno de los problemas, a los niños y niñas de Angelita, les dio tres respuestas diferentes, otros no pudieron entender el problema, y otros lo entendieron pero no lo pudieron resolver. El problema decía:

> *"En un campeonato de fútbol se sabe que el equipo A tiene tres veces más partidos ganados que el equipo B y la mitad de partidos ganados que el equipo C. Si el equipo C ha ganado 10 partidos, ¿cuántos partidos ganados tiene cada equipo?"*

- ¿Cuáles cree usted fueron las dificultades en la clase de los niños y niñas de Angelita, para resolver el problema? Enúncielas

- Gustavo, que es licenciado en matemáticas, después de escuchar a Angelita decide explicar el problema en clase, ya que para él no tiene porqué presentarse tanta dificultad, pero al leerlo detenidamente no se le ocurre que hacer ni cómo hacer la explicación del problema. ¿Cómo le ayudaría usted al profesor Gustavo?

3.1.1 Síntesis de una relatoría

En las polémicas grupales y colectivas se explicitaron posturas y temas de discusión, que de diferentes maneras están relacionados con los problemas de la profesión "ser profesor de matemáticas" (aquellas situaciones que para un docente de matemáticas son problema y merecen ser resueltos, cuando se desempeña como docente de niños y niñas de la Educación Básica) y con las posibles soluciones.

Buena parte de la discusión se refirió al enunciado del problema del caso No 3. ¿Porqué cree usted que eso pasó?. El relator del seminario organizó las ideas que "emergieron" con más relevancia, en la discusión de los tres casos así: ideas que son manifestaciones acerca del papel del problema en la organización de una clase; de lo que se entiende por problema; de lo que se entiende por multiplicación; de la valoración que se tiene de sí mismo como resolutor de problemas de matemáticas; del sentido de su profesión; y, del conocimiento.

Manifestaciones acerca del papel del problema en la organización de una clase:

1. Al niño se le debe enseñar que metros por metros da metros cuadrados, eso es de potenciación y parece que él no conoce los símbolos y los elementos de la potenciación.

2. El profesor Martín debe hacer primero una clase de geometría sobre áreas y perímetros.

3. Yo le enseñaría las medidas de longitud y el sistema métrico decimal, midiendo cosas y haciendo un metro cuadrado del tamaño natural para que lo vea y entienda que metros por metros da metros cuadrados.

4. Los números, que representan cantidades, son siempre los mismos, ¿para qué mirar el significado de las

cantidades que intervienen si siempre la respuesta es un número?.

5. Yo haría varias sumas repetidas de las canicas con acciones y objetos reales (fríjoles, granos, etc.).

6. El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas. Este aspecto es importante para establecer la relación de cambio.

7. No es la misma clase de acción lo que los niños hacen en el caso No 1 y en el caso No 2, pues por hacer las sumas repetidas el niño del caso No 2 es que no entiende.

8. Si en el caso del área el niño hace la suma repetida de cuadraditos pequeños, pues le da los doce cuadraditos y de ahí sale el carácter de metros cuadrados de área.

9. El problema no es si los cuadrados son pequeños o grandes, sino cómo llega a ellos, y lo que yo creo es que el profesor Martín le debe explicar a Carlitos que está multiplicando dos "cosas" distintas, el largo y el ancho y que le da otra cosa que es área y que las "cosas" se deben analizar.

10. El problema del caso No 3 se debe solucionar de manera que la respuesta sea un número natural y/o entero, porque eso es lo que los niños tienen que saber en primaria.

Manifestaciones acerca de cómo podría ser el papel del problema en la organización de una clase

1. Los niños tienen formas de comunicación y relación que nosotros los profesores no conocemos.

2. El intercambio es una manera de implementar "nuevas" relaciones entre las personas y a partir de ello generar situaciones educativas y formativas, específicamente en matemáticas sería de mucha utilidad.

Manifestaciones acerca de lo que se entiende por problema

- **El problema es una aplicación numérica de una teoría anteriormente aprendida**

1. Los números, que representan cantidades, son siempre los mismos, ¿para qué mirar el significado de las cantidades que intervienen si siempre la respuesta es un número?.

2. El problema no es si los cuadrados son pequeños o grandes sino como llega a ellos, y lo que yo creo es que el profesor Martín le debe explicar a Carlitos que está multiplicando dos "cosas" distintas, el largo y el ancho y que le da otra cosa que es área y que las "cosas" se deben analizar.

3. El problema del caso No 3 se debe solucionar de manera que la respuesta sea un número natural y/o entero, porque eso es lo que los niños tienen que saber en primaria.

4. Es posible explicarse el problema del caso No 3 a partir de la representación que haga de él y así el niño o la niña lo van a entender mejor.

- **El problema debe tener un enunciado claro y preciso**

1. El problema del caso No 3, está mal planteado, por tanto no tiene solución.

2. Todos los problemas de matemáticas tienen la misma forma: Los datos, la forma como se relacionan los datos y una pregunta final.

3. El problema del caso No 3. se debe solucionar de manera que la respuesta sea un número natural y/o entero, porque eso es lo que los niños tienen que saber en primaria.

4. La mejor manera de solucionar un problema es interpretando y analizando las palabras que en él intervienen, por ejemplo en este problema [el caso 3] cuando se dice "tres veces más", se sabe que esta parte es de multiplicación, y cuando se dice la mitad esa parte se hace dividiendo, el problema es de multiplicación y de división.

- **El problema puede admitir varias interpretaciones**

1. El enunciado de este problema tiene por lo menos dos formas de ser entendido: de acuerdo con la manera como sea leído (tonos y énfasis) y de acuerdo con la intención de la lectura.

2. El problema no está mal planteado, pero puede ser interpretado de dos maneras diferentes, dependiendo de cómo sea interpretado, el problema tiene solución.

- **El problema genera conocimiento nuevo**

1. El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas. Este aspecto es importante para establecer la relación de cambio.

2. Si en el caso del área el niño hace la suma repetida de cuadraditos pequeños, pues le da los doce cuadraditos y de ahí sale el carácter de metros cuadrados de área.

3. El problema es importante porque es una situación de la vida diaria del niño y ello le conviene para poder aprender a solucionar problemas, para practicar las operaciones, las tablas, que es lo que le sirve para la vida.

- **El problema modela acciones humanas**

1. No es la misma clase de acción lo que los niños hacen en el caso No 1 y en el caso No 2, pues por hacer las sumas repetidas el niño del caso No 2 es que no entiende.

2. Como las acciones de todos los casos son distintas se deben trabajar de diferente manera aunque todas estén referidas a la operación de multiplicación.

3. El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas; este aspecto es importante para establecer la relación de cambio.

4. Si en el caso del área el niño hace la suma repetida de cuadraditos pequeños, pues le da los doce cuadraditos y de ahí sale el carácter de metros cuadrados de área.

5. El problema es importante porque es una situación de la vida diaria del niño y ello le conviene para poder aprender a solucionar problemas, para practicar las operaciones, las tablas, que es lo que le sirve para la vida.

Manifestaciones acerca del conocimiento del profesor sobre la multiplicación

1. De acuerdo con lo anterior, o, independientemente de ello, el problema [refiriendo el del caso 2] es de adición o de multiplicación.

2. Sí, es de multiplicación y como la multiplicación es una suma repetida, el problema es de suma.

3. En nuestras clases dedicamos mucho tiempo y energía a las tablas de multiplicación y su memorización, porque eso es lo que sabemos de la multiplicación y nos facilita el trabajo.

4. Una persona que sabe bien las tablas de multiplicar, sabe lo mínimo para desempeñarse en la vida y poderse relacionar con los demás de una manera útil.

5. El problema es importante porque es una situación de la vida diaria del niño y ello le conviene para poder aprender a solucionar problemas, para practicar las operaciones, las tablas, que es lo que le sirve para la vida.

Manifestaciones del profesor como resolutor de problemas de matemáticas

- **El que debe saber sobre resolución de problemas matemáticos es el matemático, el profesor no tiene porque saber todos los detalles**

1. El problema sí tiene solución porque un matemático, que está en esta reunión, la encontró y ellos piensan y sí saben resolver problemas, porque saben matemáticas pues eso es lo que estudiaron y es lo que saben hacer: matemáticas.

2. El matemático lo resuelve haciendo una multiplicación y después que la respuesta dé y que el niño la entienda, el papel de los profesores es hacerle entender, con los métodos adecuados.

3. Si los números que intervienen son naturales, entonces los números son enteros y es lo mismo y no hay necesidad de complicarle la vida a los niños y niñas con tanta discusión sobre los números. Las cantidades se usan de la misma forma.

Manifestaciones acerca del sentido de la profesión

- **Lo que el profesor necesita saber es un método adecuado para enseñar las producciones de los matemáticos**

1. El matemático lo resuelve haciendo una multiplicación y después que la respuesta dé y que el niño la entienda, el papel de los profesores es hacerle entender, con los métodos adecuados.

2. Si los números que intervienen son naturales, entonces los números son enteros y es lo mismo y no hay necesidad de complicarle la vida a los niños y niñas con tanta discusión sobre los números. Las cantidades se usan de la misma forma.

3. Yo haría varias sumas repetidas de las canicas con acciones y objetos reales (fríjoles, granos, etc.).

- **El profesor no debe problematizar a los estudiantes con el significado de las cosas concretas, basta con trabajarles desde lo numérico**

1. Los números, que representan cantidades en todos los casos, son siempre los mismos, para qué mirar el significado de las cantidades que intervienen si siempre la respuesta es un número.

2. Si los números que intervienen son naturales, entonces los números son enteros y es lo mismo y no hay necesidad de complicarle la vida a los niños y niñas con tanta discusión sobre los números. Las cantidades se usan de la misma forma.

3. El problema no es si los cuadrados son pequeños o grandes sino cómo llega a ellos, y lo que yo creo es que el profesor Martín le debe explicar a Carlitos que está multiplicando dos "cosas" distintas, el largo y el ancho y que le da otra cosa que es área y que las "cosas" se deben analizar.

- **Al niño se le debe enseñar mostrándole acciones con objetos concretos**

1. Yo haría varias sumas repetidas de las canicas con acciones y objetos reales (fríjoles, granos, etc.).

2. Si en el caso del área el niño hace la suma repetida de cuadraditos pequeños, pues le da los doce cuadraditos y de ahí sale el carácter de metros cuadrados de área.

- **El niño puede aprender a través de abordar el problema**

1. El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas, este aspecto es importante para establecer la relación de cambio.

2. No es la misma clase de acción lo que los niños hacen en el caso No 1 y en el caso No 2, pues por hacer las sumas repetidas el niño del caso No 2 es que no entiende.

- **Cuando el profesor piensa acerca de un problema matemático que va a llevar al aula, no está pensando un problema pedagógico**

1. En los casos 1 y 2 los problemas son de tipo "pedagógico", mientras en el caso 3, el problema es de matemáticas.

- **Concepciones acerca del origen del conocimiento matemático de los alumnos y el papel que en ello juega la enseñanza**

Al analizar las diversas posiciones manifestadas por los profesores respecto de los problemas matemáticos propuestos en los tres casos, es posible vislumbrar dos concepciones respecto del origen del conocimiento matemático de los alumnos:

1. El profesor lo detenta y lo enseña directamente a través de su palabra

> *«El problema no es si los cuadrados son pequeños o grandes sino cómo llega a ellos, y lo que yo creo es que el profesor Martín le debe explicar a Carlitos que está multiplicando dos "cosas" distintas, el largo y el ancho y que le da otra cosa que es área y que las "cosas" se deben analizar».*

2. El profesor lo detenta y lo enseña a través de acciones concretas sobre objetos concretos para que el estudiante imite sus acciones

> *«El problema es importante porque es una situación de la vida diaria del niño y ello le conviene para poder aprender a solucionar problemas, para practicar las operaciones, las tablas, que es lo que le sirve para la vida»*

> *«Yo haría varias sumas repetidas de las canicas con acciones y objetos reales (fríjoles, granos, etc.)».*

3. El estudiante lo construye a través de sus acciones sobre situaciones problémicas

> *«El problema de los niños del caso No 1 es que ellos vean que hay una relación entre lo que cada uno tiene y la forma de intercambiarlo y aquí la belleza sí es un valor lo mismo que el tamaño de las canicas. Este aspecto es importante para establecer la relación de cambio».*

> *«No es la misma clase de acción lo que los niños hacen en el caso No 1 y en el caso No 2, pues por hacer las sumas repetidas el niño del caso No 2 es que no entiende».*

Es decir, a pesar de las distintas posturas manifestadas por los profesores -hecho que no es de manera alguna simple, y que tiene consecuencias, tampoco simples, a propósito de la manera en que fluye la vida en el aula- estas posiciones tienen en común la aceptación implícita de que el conocimiento matemático de los estudiantes proviene de afuera, ***cambia sólo el método mediante el cual los profesores hacen el ejercicio de transferirlo desde su lugar natural hacia el interior de sus estudiantes.***

Tal comprensión del origen del conocimiento matemático de los estudiantes, hace de la profesión del profesor un ejercicio bastante instrumental, al hacer superflua por innecesaria, toda reflexión que tienda a rescatar la conversación en el aula como acontecer que signe, signifique, y determine lo que en ella ocurra.

Con la intención de aportar otros elementos para tematizar esta visión externalista del conocimiento, de continuar con la conversación iniciada durante el seminario antes referido, y de exponer argumentos desde los cuales abogar por la dignificación del conocimiento que los escolares (niñas, niños y jóvenes) aportan cuando entran a las aulas, presentamos varias construcciones teóricas, con pequeños comentarios nuestros, al respecto de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación.

3.2 EL APORTE COGNITIVO Y DIDÁCTICO DE GERARD VERGNAUD

Nos parece importante detenernos en el análisis de la propuesta del francés Gerard Vergnaud, dado que este autor profundiza y sintetiza diversas corrientes y caminos didácticos y cognitivos de las estructuras operatorias, y por lo que expresa en su propuesta de "los campos conceptuales", teoría a nuestro parecer sugerente y poderosa.

La teoría de los campos conceptuales "apunta a una visión del desarrollo cognitivo en términos de formación de conceptos, en la relación de unos con otros". Esta relación se manifiesta por filiaciones o continuidades y por formar sistemas. Pero, aunque insiste sobre las continuidades también refiere rupturas, discontinuidades en esas relaciones.

En su elaboración, Vergnaud (1990), recoge ideas de Piaget y Vigotsky, fundamentalmente las nociones que elaboró Piaget, de esquemas e invariantes, así como la de mediación del lenguaje a través de las personas o los símbolos, enunciada y desarrolladas por la escuela socio cultural de Moscú.

Los problemas que plantea este autor están relacionados con los del vínculo entre un conocimiento y los problemas teóricos y prácticos a los cuales responde ese conocimiento; consecuentemente, aborda su trabajo en una situación real, la de un aula escolar. Como es evidente allí, de las relaciones de tipo pedagógico, enfatiza las didáctico-cognitivas, y entonces el lenguaje juega un papel muy importante para la construcción de los conceptos, pero no constituye por sí mismo el criterio decisivo del pensamiento conceptual.

En esta dirección, el pensamiento sólo es conceptual si obedece a criterios de orden teórico y práctico simultáneamente. Un discurso teórico no es conceptual, tampoco una simple conducta, a menos que aquel dé lugar a una conducta adaptada a la situación.

Igualmente, adoptando un criterio pragmático para pensar el pensamiento, Vergnaud define los campos conceptuales y señala sus componentes: el concepto, para ser tal, requiere ser operativo, es decir, debe permitir abordar soluciones; el criterio decisivo del pensamiento conceptual es su puesta en relación con conductas, la posibilidad de una respuesta a un problema.

Un campo conceptual es "un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas en estrecha conexión, así como las representaciones del lenguaje y simbólicas susceptibles de ser utilizadas para representarlos". (Vergnaud, 1990)

En el párrafo anterior se reconocen los tres contenidos básicos de un campo conceptual: situaciones (o referentes), conocimientos (o significados) y representación simbólica; referentes, significados y significantes vinculados en una compleja red de relaciones de interacción que conforman un campo de pensamiento operatorio de la persona; permitiéndole descubrir analogías y filiaciones, integrar sistemas, captar rupturas, actuar en la situaciones y anticipar nuevas situaciones posibles.

Las situaciones

El primer contenido básico del campo conceptual planteado por Vergnaud, es el de las situaciones o referentes (contextos, medios ambientes), que conforman un campo de pensamiento operatorio de las personas. Todo concepto adquiere sentido en función de las múltiples situaciones en que aparece. Es posible identificar dos clases de situaciones:

- En la que, para interpretarla, el individuo dispone (o cree que dispone) de las competencias necesarias para tratarlas, en cuyo caso las conductas son automáticas.

- En la que el individuo, durante un tiempo duda y reflexiona, presentándose el surgimiento de variados esquemas que se acomodan, descomponen y recomponen. Es decir, se equilibran y desequilibran.

Las dos clases de situaciones mencionadas anteriormente se caracterizan por su diversidad, pluralidad y por su historia. La pluralidad y diversidad de las situaciones le permite al sujeto que las vive, concebir el conjunto de posibilidades que se abre en cada caso y su clasificación, dejando camino al análisis, a la descomposición de la situación en elementos simples y a la combinación de estas posibilidades. El otro aspecto de las situaciones es su historia, el progresivo dominio de las continuidades, que va dando sentido a los conceptos que se forman, se descubren semejanzas tanto como diferencias..

Desde el punto de vista de la didáctica de la matemática, vemos que, en cuanto a la variedad, la vida escolar ofrece un número limitado de casos que se repiten, y los datos importantes de esas situaciones se encuentran en un cúmulo de informaciones, confundidos con otros pertinentes que oscurecen las preguntas que se deben formular. Esto dificulta establecer una clasificación sistemática de las tareas cognitivas por plantear, pero se hace necesario superar esta situación, para identificar las relaciones básicas a partir de las que se generan los problemas de carácter matemático.

Desde el punto de vista de la historia de las situaciones, aquellas en las que se disponen los conceptos matemáticos potentes (como por ejemplo el de proporcionalidad, concepto que juega un papel muy importante en las relaciones multiplicativas) son las que permiten las inferencias y las articulaciones de nuevos hechos en la red de los esquemas cognitivos anteriormente construidos.

Afirmar que las situaciones tienen historia, es afirmar que las personas que las viven tienen memoria, pero que esta memoria es relacional; es decir, no accionamos un botón para recordar algo en especial. Nuestra memoria funciona en relación con grandes trozos de nuestra experiencia de vida, organizando los elementos y sus relaciones jerárquicamente, según la importancia percibida por quien tiene esa experiencia.

Desde la biología, la identificación de analogías y diferencias es un requerimiento para la vida (es obvio que un tigre reconoce una gacela y su mayor o menor lentitud, y una gacela reconoce la separación necesaria para supervivirle al tigre). Para los seres humanos, la ventaja básica está en la posibilidad de extender este mundo de experiencias concretas hacia un mundo de experiencias posibles, no tenemos que vivirlo todo para saber cómo algo podría ser. Sin embargo, la flexibilidad de las experiencias, situaciones vividas, es una necesidad para que nuestro pensamiento también sea flexible. De esta manera, es posible extender nuestro pensamiento cada vez más lejos de los mundos concretos. La diversidad, pluralidad e historia de las situaciones son características necesarias para construir pensamientos flexibles y mundos posibles.

Un ejemplo: De acuerdo con esto, en cuanto las acciones de ordenar y clasificar los objetos del mundo según sus diferencias y sus semejanzas, se extiendan como relaciones binarias, al mundo de lo abstracto, dichas acciones pueden ser representadas con los números naturales a través de las relaciones de orden y de equivalencia respectivamente; pues estos números, en los procesos cognitivos para su construcción, las comportan: afirma Vergnaud, que es con base en el operar cognitivamente con estas relaciones binarias, como se conforma el concepto de número, pues, el hecho de que las clases constituidas por las correspondencias pueden ser incluidas por otras clases que las componen, implica el reconocimiento de que una clase puede ser a la vez un todo y parte de otro todo, reconocimiento que exige, no solo la ordenación y clasificación, sino que éstas deben ser simultáneas, lo cual, a su vez, también exige un pensamiento reversible (flexible en direcciones opuestas), ya que no es posible realizar simultáneamente las acciones concretas de ordenar y clasificar, y por lo tanto es en el pensamiento en el que se va indistintamente de la acción de clasificar a la de ordenar al margen del tiempo, es decir, simultáneamente.

Vergnaud plantea que en el concepto de número quedan implicadas, la unión de clases, y su separación, sin que por ello se desaparezca o se transforme la totalidad, y por ello, queda implicada la posibilidad de la adición: es decir que partiendo de dos conjuntos disyuntos cuyos cardinales se conocen, se obtenga para su unión un resultado expresable por un cardinal único. El reconocimiento de que un todo puede ser considerado también parte, y que en ese cambio de contexto, los cardinales implicados no cambian.

Los conceptos

El segundo contenido del campo conceptual lo forman los conceptos, las respuestas cognitivas que se adquieren y se utilizan en las situaciones. En su elaboración Vergnaud retoma y amplía la noción planteada por Piaget de esquema. Un esquema cognitivo está compuesto de: a) anticipaciones, b)reglas de acción, c) invariantes operatorias, d) inferencias.

- "El funcionamiento cognitivo reposa en el repertorio de esquemas disponibles, anteriormente formados" y se activa en función de la situación particular por enfrentar. El sujeto dispone de una conceptualización (que puede ser implícita) que es la que le permite enfrentar una situación desconocida y lo impulsa a realizar exploraciones y tentativas que pueden resultar exitosas o fracasadas. Esto no quiere decir que el sujeto aprende primero la teoría y luego la práctica, la conceptualización implica unión indisoluble entre pensamiento y acción. Pero sí quiere decir que las posibles nuevas acciones se construyen desplegando acciones actuales sobre lo novedoso.

- Vergnaud pone el ejemplo del salto alto que hace un atleta, que supone un conjunto de conocimientos y destrezas espaciales y mecánicas que contribuyen a asegurar la eficacia de las diferentes fases del movimiento. Las exploraciones que el esquema genera para alcanzar un objetivo se rigen por reglas de acción, que organizan las conductas que se han de seguir.

- Vergnaud da a la noción de invariante un sentido amplio, incluyendo en ella tres tipos: teoremas en acto, conceptos en acto y argumentos. La expresión "invariante operatoria" designa el conocimiento contenido de los esquemas. Desde la perspectiva de la conservación, Piaget propuso una noción de invariante más restringida, iniciando con la conservación del objeto, pasando luego a la de cantidad y posteriormente a distintas magnitudes.

  Un teorema en acto no es del todo un teorema, ni un concepto en acto es del todo un concepto, pero se corresponden en las categorías de conocimiento explícito: proposiciones y funciones proposicionales. Los teoremas en acto -como las proposiciones- pueden ser verdaderos o falsos. Los conceptos en acto -como las funciones proposicionales- no pueden ser verdaderos o falsos, sólo susceptibles de ser más o menos adecuados a la situación enfrentada. "Hay una estrecha interacción en la construcción de teoremas en acto y conceptos en acto."

Esta es la definición pragmática de concepto de Vergnaud: Cada uno de los conceptos matemáticos comporta distintas propiedades, algunas de las cuales pueden ser comprendidas antes que otras, pero el camino de su formación pasa siempre por el de captar, en las diversas situaciones, invariantes utilizables en la acción; dicho de otro modo, cada concepto matemático "nos remite al conjunto de esquemas movilizados por los sujetos en esas situaciones".

- El sujeto en cada situación determinada hace inferencias o deducciones de acuerdo con el relacionamiento de anticipaciones, reglas de acción y conocimientos. Las inferencias que realiza el sujeto en el caso particular son, pues, indispensables para el empleo del esquema, que es siempre universal. "El esquema de conocimiento deber ser puesto en marcha en cada situación particular; no es un estereotipo sino una función temporalizada a argumentos, que permite generar series diferentes de acciones y de empleo de informaciones en función de las variables de situación" (Vergnaud, 1991)

Las representaciones

Por último, el tercer componente de los campos conceptuales lo conforman las representaciones. Son formas de poner para otros y para sí mismo las construcciones mentales (conceptos, esquemas, situaciones, las mismas representaciones). Para este propósito, se usan dispositivos gráficos (palabras escritas, dibujos, fotografías) o fónicos (palabras habladas, ruidos) para disponer los elementos de una situación, sus relaciones y para mediar las acciones concretas que habrán de recaer sobre éstos o imaginar las acciones posibles que podrían efectuarse. Estos símbolos o referentes, según Vergnaud (1991), cumplen una triple función:

- "De evocación: recuerdan esquemas, tanto como los evocan las situaciones;
- De designación: facilitan de este modo la representación y la comunicación;
- De apoyo al razonamiento y a la planificación de la acción."

En las tareas matemáticas, la simbología tiene una gran importancia por su economía ($\mathbf{X} \in \mathbb{N}$ es una frase que resume infinita cantidad de frases). Sin embargo, esta economía trae como consecuencia un altísimo grado de abstracción y empaqueta enorme cantidad de trabajo y conocimiento humano. Este hecho entraña un riesgo de confusión. Para evitarlo se puede utilizar representaciones menos generales (por eso menos potentes), que permiten diferenciar la situación referida en la representación.

Aportes didácticos

En la teoría propuesta por Vergnaud evidenciamos tres "principios" que resumiremos así:

- Lo pragmático: El conocimiento es, por definición operativo, todo concepto se conforma a través de las situaciones que vive el sujeto, en la acción de la búsqueda de soluciones a los problemas que se plantea. El primer acto de mediación del docente ha de ser la propuesta de tareas cognitivas, seleccionadas entre las situaciones que vive el niño, y dirigidas a estimular las operaciones del pensamiento que den respuesta a los problemas. Ese primer acto de mediación deberá ser seguido de otros muchos, en los que se dará siempre un juego dialógico, vivo, nunca automático, entre el maestro y el alumno. (Lo crítico - comunicativo).

- Lo interactivo: Los contenidos matemáticos tienen que ser elaborados a la vez desde tres ángulos: de la realidad de la que surgen (contexto), de los conceptos tal como se estructuran (cognición) y de los símbolos que los representan (sentido e intenciones). Los datos recogidos de la situación, los significados emergentes de la acción y la representación simbólica de esas situaciones y actos se implican y enriquecen entre sí. (Lo complejo).

- Lo evolutivo, pero no mecanicista: el desarrollo conceptual se produce a través de continuidades y de rupturas; de asimilar por afinidad lo nuevo a lo ya conocido y de acomodar los significados construidos a situaciones que los desestabilizan parcial o totalmente. (Lo constructivo).

El mismo Vergnaud ubica su discurso y elaboración en la "interacción entre lo cognitivo y lo didáctico" cuando nos dice:

> "No se trata de la historia de las matemáticas, sino de la historia del aprendizaje de las matemáticas. Esta historia es individual. No obstante, se pueden observar regularidades impresionantes entre un niño y otro, en la manera como abordan y tratan una misma situación, en las concepciones primitivas que

> se forman de los objetos, de sus propiedades y de sus relaciones, y en las etapas por las que pasan. Estas etapas no están totalmente ordenadas, no obedecen a un calendario estricto, las regularidades llevan a distribuciones de procedimientos y no están unívocamente determinadas. Pero el conjunto forma, forma sin embargo, un todo coherente para un campo conceptual dado, donde se pueden efectivamente encontrar las principales dependencias y las principales rupturas, lo que constituye la justificación principal de la teoría de los campos conceptuales". (Vergnaud, 1991)

Vergnaud señala que los docentes desarrollan un saber práctico, demuestran su capacidad de diagnóstico y reconocen la oportunidad de su intervención. Esto habilita una búsqueda didáctica, en la que se valora el quehacer del aula.

3.3 NATURALEZA DE LA MULTIPLICACIÓN

Nos dedicaremos a examinar la naturaleza de la multiplicación, desde una perspectiva matemática.

La multiplicación entendida como una operación aritmética entre números naturales, tiene como punto de partida dos números y punto de llegada otro número (distinto o no) de los anteriores. En el camino se puede registrar una transformación de los primeros en el último y tiene un carácter binario ya que opera sobre dos números.

$$\begin{array}{ccc} N \times N & \longrightarrow & N \\ (a, b) & \longrightarrow & c \end{array}$$

Sin embargo, se puede interpretar la multiplicación como la acción de un número sobre todos los otros, como sucede con "la tabla el dos". De manera general, en este contexto, aparece dispuesta así:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\times b} & N \\ a & \longrightarrow & c \end{array}$$

Esta interpretación unitaria de la multiplicación es, naturalmente, más limitada, menos general. Sólo define los resultados de multiplicar cualquier número natural a por otro b, es decir, sólo define los múltiplos de b.

Del primer modo es más general y, por tanto, preferible en el terreno matemático. Pero, del segundo modo, sin embargo, se ajusta mucho más a la concepción inicial que se tiene de la multiplicación: Existe una cantidad (multiplicando) que es transformada por otra cantidad (multiplicador) que señala el número de veces que se repite la primera.

La multiplicación es una operación binaria desde el punto de vista matemático, pero comienza siendo unitaria en su aprendizaje. Ello refleja el hecho de que los papeles de ambas cantidades están diferenciados en un principio para hacerse intercambiables después.

En su interpretación unitaria, la multiplicación puede definirse como una suma reiterada generalizando la definición de suma de la siguiente manera:

- Escoger b conjuntos disyuntos dos a dos, cada uno con cardinal a.

- Realizar la unión de esos b conjuntos, obteniendo el conjunto C

- Hallar el cardinal c del nuevo conjunto C que es la multiplicación de a veces b.

Esta interpretación responde a una concepción unitaria de la operación ya que los papeles de a y b son distintos. Por otro lado, pone de manifiesto que no solo estos papeles son distintos, sino que son los cardinales de conjuntos de distinto rango en abstracción: el número a es el cardinal de un conjunto de elementos, mientras que b es el cardinal de una colección de conjuntos. A partir de esta definición se puede comprender que el multiplicando y el multiplicador tienen papeles diferentes y naturalezas también distintas. Por ello, la interpretación de la multiplicación como una suma reiterada excluye la identificación de una con otra. La multiplicación no es una suma reiterada incluso interpretándola como tal. No es un caso particular de la suma. Es otra operación que puede definirse, tal como aquí se ha hecho, a partir de la suma. Pero no se reduce a ella.

3.3.2. Multiplicación como producto cartesiano

Entender la multiplicación como la realización de un producto cartesiano supone muchas cosas diferentes respecto a la definición anterior. Dentro de la misma, los conjuntos A y B tienen el mismo nivel de abstracción: se refieren a conjuntos de elementos concretos, sean los que sean. En cambio, el resultado c es el cardinal de un conjunto cuyos elementos son combinaciones de elementos de A y B. Se haría del siguiente modo:

- Escoger un conjunto A cuyo cardinal es a
- Escoger un conjunto B cuyo cardinal es b
- Formar el producto cartesiano A x B
- El cardinal de A x B es el resultado c y se entendería como el cardinal de un conjunto cuyos elementos son combinaciones de elementos de A y de B

Las diferencias entre ambas concepciones no acaban aquí, puesto que si la primera se apoyaba en una concepción unitaria de la multiplicación, la segunda lo hace sobre una concepción binaria de la misma. Ello implica una conmutatividad entre los elementos de A y B que no existía en el caso de la suma reiterada. Así la pareja de Pedro y Margarita es la misma pareja de Margarita y Pedro. Esto no es rigurosamente cierto pero señala ya el aspecto binario de la operación que se ha demostrado de comprensión posterior al aspecto unitario.

¿Qué es entonces la multiplicación? Es, ante todo, una operación aritmética tanto de naturaleza unitaria, como binaria, que puede interpretarse como una suma reiterada (sin ser lo mismo), o como un producto cartesiano.

3.4 NATURALEZA DE LA DIVISIÓN

En la división se dispone de dos números iniciales, que suelen denominar dividendo y divisor y, a partir de ellos, se trata de obtener otro con el nombre de cociente:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{(Dividendo, divisor)} & \longrightarrow & \text{cociente} \\
(D, d) & \longrightarrow & C
\end{array}
$$

Ello ya indica que la división sólo es una operación dentro de los números racionales. Es decir, que es una aplicación definida del siguiente modo:

$$
\begin{array}{c}
Q \times Q \longrightarrow Q \\
(D, d) \longrightarrow C \\
\text{tal que } D = d \times C
\end{array}
$$

Se puede afirmar que es una aplicación si apelamos a la llamada <división exacta>:

$$
\begin{array}{c}
N \times N \longrightarrow N \times N \\
(D, d) \longrightarrow (C, r) \\
\text{tal que } D = d \times C + r, \\
\text{debiéndose cumplir que } 0 \leq r < C
\end{array}
$$

Una situación modelada con esta interpretación de división podría ser:

¿Cuál es la menor cantidad de salones que se debe disponer si el cupo máximo de personas

en cada salón es de 30 y se requiere sitio para 145 personas?

Lo cierto es que existe una relación clara entre la multiplicación y la división. La mayoría de los autores prefieren hablar de <cierta forma de inversión> apelando mas a criterios psicológicos y de aprendizaje que a criterios matemáticos:

Si, la multiplicación se interpreta como una acción efectuada sobre dos números para obtener otro, la división expresa el hecho de que se conoce parte de la acción y el resultado y se desconoce el resto de dicha acción. Es decir, en una multiplicación ha de hallarse uno de los factores conociendo el resultado final:

$$a \times ? = c$$

lo cual se escribe como $c : a = ?$

En consecuencia, suponer que la división <es> una resta reiterada puede parecer correcto matemáticamente. Es posible tal definición si los siguientes pasos se aplican:

- Se considera un conjunto A cuyo cardinal es a
- se considera una colección de subconjuntos de A, disyuntos dos a dos, cada uno de los cuales con cardinal b.
- Se resta del conjunto A sucesivamente cada uno de esos subconjuntos
- El número de veces que esta resta sea posible es C (El cociente)
- Se considera el conjunto R resultante de la sucesión de restas realizadas
- El cardinal de R es r (el residuo de la división)

3.5 IMPORTANCIA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

En otra ocasión habíamos planteado que entendemos problema **"como una situación que debe ser modelada, de la cual se deriva una pregunta, para cuya respuesta la estrategia de resolución no es inmediata ni simple. Por lo tanto genera conocimiento, recordando que no existe conocimiento sin preguntas"**; entonces, no se le puede considerar como la última etapa del proceso de aprendizaje.

Visto como el proceso mediante el cual un sujeto o grupo de sujetos resuelve(n) un problema, la resolución de problemas es una actividad que los seres humanos realizamos desde el nacimiento mismo, manifestándose desde los procesos de adaptación biológica, cognoscitiva, afectiva. Es uno de los procesos de constitución del sujeto como ser humano pues participa en el desarrollo de sus dimensiones éticas, afectivas, lúdicas, estéticas, al mantenerlo en relación e interacción con otros seres humanos y con el medio social y cultural.

No es gratuito que en la investigación educativa y psicológica, la importancia curricular de los problemas se haya puesto de relieve; aunque en la educación, tradicionalmente se les relegue en relación al aprendizaje de los conceptos -por parte de profesores y desde el currículo- a cubrir dos objetivos: mecanizarlos y afianzarlos en medio de una práctica sobre situaciones para las cuales el individuo tiene ya competencias adquiridas, y, servir como indicadores para evaluar si es cierto o no que se les ha aprendido.

En palabras de Maza (1992, p. 25), la sicología cognitiva consideraba que en un sentido amplio, en el "problema

- Se partía de unos datos originales.
- Se planteaba una meta a alcanzar.
- Esta meta respondía a una necesidad del resolutor.
- Se buscaba una estrategia que permitía pasar de los datos originales a la meta buscada.
- Se ponía en práctica dicha estrategia", dejando de lado, que el proceso de resolución muchas veces exige acompañamiento e intervención puesto que esta actividad es de gran complejidad cognitiva. Siendo este proceso extremadamente sensible a los cambios en las operaciones, al tipo y tamaño de los números, al formato como se presenta las situaciones, e incluso a los nombres usados para referir los objetos que aparecen en las situaciones, etc.

El profesor Carlos Maza (1991) en su trabajo desarrolla una conceptualización sobre la resolución de problemas multiplicativos, aportando una forma de clasificarlos, mostrando formas de solucionarlos, así como las principales dificultades de los sujetos que resuelven estos problemas:

3.5.1. Razón y combinación

Este autor identifica dos clases de problemas de multiplicación, correspondientes con las interpretaciones que caracterizan a la multiplicación. Por un lado, los problemas que se resuelven por suma reiterada y los que son resueltos por el producto cartesiano. Consideramos el siguiente ejemplo:

> **Vamos a comprar 5 tamales. Cada uno cuesta 2000 pesos. ¿Cuánto tendremos que pagar en total?**

Este es un problema clásico que se resuelve sin más que sumar 2000 pesos cinco veces: \$2000 + \$2000 + \$2000 + \$2000 + \$2000= 5 x \$2000 = \$10000 pesos.
Esta estrategia no es tan adecuada, sin embargo, para tratar un problema como el siguiente:

> **Carlos tiene un restaurante en el que ofrece 5 clases de postre y 4 tipos de almuerzo. ¿Cuántos menús ofrece Carlos en su restaurante?**

Se puede aplicar la suma reiterada (sumar uno a uno los veinte menús, o sumar los 4 tipos de almuerzo por cada postre (4 menús), tantas veces como número de postres hay (5 tipos distintos de menú). Pero tal vez es más adecuado considerar la multiplicación como un producto cartesiano de manera que el resultado se obtenga multiplicando directamente (sin hacer suma reiterada) veinte tipos distintos de menú.

Dado que los tipos de acción involucrados en las dos situaciones son distintos, los dos problemas son diferentes de resolver; aunque ambos problemas se resuelven empleando la misma operación: la multiplicación.

Estos problemas también presentan diferentes dificultades: se ha encontrado que el segundo resulta más difícil de resolver que el primero.

En opinión de Maza (1991), las dificultades de resolución de esta clase de problemas, están asociadas con dos razones fundamentales:

- "El problema de razón se puede resolver, inicialmente, por una suma reiterada. Sin embargo, el de combinación requiere un conocimiento maduro de la operación de multiplicar. Todas las investigaciones indican que el distinto papel que caracteriza, en la suma reiterada, al multiplicando y al multiplicador, se va construyendo de un modo paulatino a partir de ejercicios de suma repetida de una cantidad consigo misma.

- Complementariamente al argumento anterior, es necesario notar el carácter de operación a que responde cada problema de los tratados. En los de razón se dispone de una cantidad inicial que va cambiando a medida que se repite sucesivamente un número de veces. En este caso, la multiplicación se concibe como una operación unitaria."

Desde nuestro punto de vista, la mayor dificultad del segundo problema, radica en dos aspectos:

- La necesidad de construir una nueva unidad, «tipo de menú», a partir de las unidades «tipo de almuerzo» y «tipo de postre».

- La necesidad de aceptar que cada una de las unidades «tipo de almuerzo», debe relacionarse con cada una de las unidades «tipo de postre». Es decir, el pensamiento actúa más allá de lo concreto, extendiéndose a lo posible.

Encontramos, según lo dicho aquí, distintos tipos de interpretación de la multiplicación: la que resuelve el primer problema, enmarcada dentro de la concepción de suma reiterada, y la que resuelve el segundo, inmersa en una concepción de variación simultánea de ambos factores, lo que hace indistinguible su papel para entender la estructura de la situación abordada. Todo lo discutido muestra que la multiplicación no se concibe como una operación con estructura única con la que se puede resolver una serie de problemas.

Así que para conseguir una unificación conceptual de la multiplicación, se debe tener conexiones entre ambos tipos de problemas, filiaciones en el sentido de Vergnaud, que permitan a la persona que los resuelve descubrir que las distintas formas de resolverlo son, en realidad, una sola. Un instrumento esencial para ello serán las representaciones gráficas en forma de matriz, lo que establece relaciones directas con los aprendizajes y discusiones desde el álgebra lineal. Según Carlos Maza (1991), "la estrategia más usual para intentar resolver el problema multiplicativo requiere tres pasos:

1) Considerar una cantidad hipotética para el primer conjunto.

2) Construir la inclusión jerarquizada de los tres conjuntos en juego.

3) Resolver multiplicativamente (o por suma reiterada a partir del primer paso) la relación entre los dos cuantificadores dados".

De acuerdo con las investigaciones realizadas por investigadores en varias partes del mundo, se presentan ciertos niveles de dificultad en la resolución de problemas multiplicativos y en la secuencia de aprendizaje así:

NIVELES DE DIFICULTAD

1. PROBLEMAS DE COMPARACIÓN………………… Multiplicativos
   Agrupamiento - comparación
   Partición - comparación
2. PROBLEMAS DE RAZÓN…………………………… Multiplicativos
   Agrupamiento - razón
   Partición - razón
   División
3. PROBLEMAS DE COMBINACIÓN………………… Multiplicación
   División
4. PROBLEMAS DE CONVERSIÓN…………………… Multiplicación
   División

Relación de estrategias utilizadas y los tipos de problemas a que se aplican.

ESTRATEGIAS DE MULTIPLICACIÓN

1. SUMA REITERADA…………………………………… Razón
2. SUMA REITERADA CON INCLUSION JERARQUIZADA…………………………………… Conversión
3. ESTRATEGIA MULTIPLICATIVA…………………… Combinación
4. ESTRATEGIA MULTIPLICATIVA CON INCLUSIÓN JERARQUIZADA……………………… Conversión

ESTRATEGIAS DE DIVISIÓN

1. ADICIÓN Y RESTA REITERADAS………………… Agrupamiento - razón
   Agrupamiento - comparación
2. ENSAYO Y ERROR DE REPARTO………………… Partición - razón
   Partición -comparación
3. REPARTO CON INCLUSIÓN JERARQUIZADA … Conversión
4. INVERSIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN…………… Combinación
5. INVERSIÓN CON INCLUSIÓN JERARQUIZADA… Conversión

Fuente: Carlos Maza (1991)

3.6 ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Se consideran problemas con estructura multiplicativa aquellos que se pueden resolver a través de una multiplicación o una división.

3.6.1 Clasificación según Vergnaud:

Clasifica en dos grandes categorías los problemas simples de multiplicación:

1. La categoría de isomorfismo de medidas.
2. La categoría de producto de medidas.

• Isomorfismo de medidas

Esta estructura se refiere a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas. Para representar esta estructura utiliza tablas de correspondencia:

M_1	M_2
x	f(x)
x´	f(x´)

La función **f: $M_1 \longrightarrow M_2$** es una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M_1 y M_2. Dentro de esta estructura (isomorfismo de medidas), identifica cuatro subclases de problemas, una subclase de multiplicación, dos subclases de división y una cuarta que llama problemas generales de regla de tres.

La subclase de multiplicación corresponde en el esquema anterior al caso particular de ser x=1; conocidos f(x) y x'; desconocido f(x').

La subclase de división en este primer tipo de problemas considera los que en la estructura general presentan la característica de ser x=1; la incógnita f(1) y son conocidos x' y f(x').

La subclase de división en el segundo grupo considera los que de acuerdo al esquema general deben hallar x' conociendo f(x') y f(1) siendo x=1

Los problemas de regla de tres se pueden esquematizar por:

M_1	M_2
a	b
c	x

Intervienen tres datos a, b, c; lo que indica que no son problemas simples de estructura multiplicativa.

- **Producto de medidas**

En esta estructura se consideran tres magnitudes M_1, M_2, M_3 una de ellas (M_3) es el producto cartesiano de las otras dos $M_1 * M_2 = M_3$. Dentro de la estructura producto de medidas se pueden distinguir dos tipos de problemas:

- **Multiplicación** (encontrar la medida producto, conociendo las medidas que la componen).
- **División** (encontrar una de las medidas que se componen, conociendo la otra y la medida producto).

En cada una de estas clases de problemas se pueden subdividir de acuerdo al tipo de magnitud implicado: discreta, continua; el tipo de números enteros decimales, números grandes, números inferiores a 1 y los conceptos implicados.

3.6.2. Enfoque de estructura de cantidades

Schwartz (1988) considera dos tipos de cantidades, intensivas **(I)** y extensivas **(E)**; la cantidad extensiva viene expresada como unidad simple (Ej. 8 metros), mientras la cantidad intensiva (I) tiene una unidad compuesta (Ej. 50 metros por hora). Con base en esta distinción clasifica los problemas multiplicativos así:

- Problemas asociados a la terna (I, E, E'): estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama isomorfismo de medidas y se dan tres tipos: **I*E=E', E'/E=I y E'/I=E.**

- Problemas asociados a la terna (E, E', E''): estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama producto de medidas y se pueden dar: **E*E'=E'' y las divisiones E''/E=E' o E''/E'=E**

- Problemas asociados a la terna (I, I', I''): corresponde al problema **I*I'=I''** y las divisiones **I''/I'=I y I''/I=I'.**

• **Clases de cantidades en problemas de razón y combinación** (Maza, 1991)

Se dijo anteriormente los problemas multiplicativos son de dos tipos de razón y combinación, si bien los primeros mucho más que los segundos. Igualmente en una forma de profundización del análisis coexisten dos clases mas: los problemas de comparación y los de conversión.

Los primeros tienen una similitud estructural muy marcada con los de razón, mientras que los segundos, muestran marcadas relaciones tanto con los de razón como con los de combinación.

Intrínsecamente en esta clasificación en cuatro clases, distinguimos un criterio de diferenciación en la estructura de sus cantidades. Por ello conviene, antes de pasar a examinar con detalle los dos últimos tipos de problemas, revelar este criterio, observando su aplicación a los problemas multiplicativos.

RAZÓN	$E \times I = E'$
COMBINACIÓN	$E \times E' = E''$

Se puede identificar cuatro tipos de problemas multiplicativos. Pues aparece otra diferenciación, debido a que la cantidad intensiva en los problemas que el autor llama de comparación, puede adoptar una forma peculiar para la cual es cuestionable el empleo del termino razón; y porque se identifica los problemas que el autor llama de conversión con el producto de cantidades $I \times I' = I''$.

Se suele asociar el planteamiento de estos problemas a las cuestiones de la física de conversión de medidas, propias de un nivel de enseñanza diferente a la de los grados iniciales, sin embargo un tipo de estos problemas es:

> En la escuela del barrio hay 35 niños en cada salón y tres salones por grado. ¿Cuántos niños hay por grado?
>
> Hay 10 dulces en un estuche pequeño. Uno grande tiene 5 veces más. ¿Cuántos dulces hay en el paquete grande?

Por otro lado se puede observar en el siguiente problema, que se identificaría con un problema de comparación, como el análisis de su estructura de cantidades es E x I = E´ y que Maza (1991), analiza así:

> **"Un coche de juguete cuesta 50 pesos. Otro, más grande, cuesta 3 veces más. ¿Cuánto me costaría este último?**
>
> **Al mencionar <tres veces más > ¿Qué estamos empleando? ¿Una cantidad intensiva o extensiva? Extensiva, desde luego, no. El número 3 denota las veces que una cantidad (pesos del coche grande) es superior a otra (pesos del coche pequeño). En este sentido, uno puede inclinarse por afirmar que es una cantidad intensiva. La diferencia con la razón es que, en ésta, la segunda cantidad es la unidad. Sin embargo, aquí nos estamos refiriendo a pesos del coche grande respecto a las del coche pequeño. Y éstas últimas no son la unidad.**

> **A este término comparativo se llama <cuantificador> y a los problemas que genera, en consecuencia, de comparación. La estructura es idéntica a los problemas de razón. E x I = E'."**

PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN

RAZÓN	E x I = E'
COMPARACIÓN	E x I = E'
COMBINACIÓN	E x E´ = E"
CONVERSIÓN	I x I´ = I"

Dado el tipo de refinamiento en el análisis estructural de los problemas multiplicativos, en cuanto a la diferenciación entre los problemas de razón y de comparación, máximo cuando a la luz del análisis de las cantidades que intervienen ambos problemas tienen la estructura E x I =E´, se podrían hacer las distinciones así:

En los problemas de razón: se repite la cantidad intensiva, según el número de la cantidad extensiva

En los problemas de comparación: se repite la cantidad extensiva, según el número de la cantidad intensiva.

Por otro lado los diferentes roles de multiplicando y multiplicador conducen a formular distintos problemas de división, dependiendo de cual de estos datos sea la incógnita.

Por ejemplo el siguiente problema:

Un balón vale 10000 pesos. Otro balón de los de mayor tamaño cuesta 40000 pesos. ¿Cuántos balones pequeños valen igual que uno grande?

Una muñeca grande vale 15000 pesos y cuesta tres veces más que un muñeca pequeña. ¿Cuánto vale la muñeca pequeña?

PROBLEMAS DE DIVISIÓN

AGRUPAMIENTO - RAZÓN…………	? x I = E
PARTICIÓN -RAZÓN……………..……	E x ? = E'
AGRUPAMIENTO - COMPARACIÓN..	E x ? = E'
PARTICIÓN COMPARACIÓN………....	? x I = E
COMBINACIÓN…………......…………	? x E = E'

3.6.3 El enfoque textual

Para Nesher(1988), citado por Castro et al. (1995), los análisis de Vergnaud y de Schwartz se apoyan en un conceptos físicos del análisis dimensional, la diferencia está en que Schwartz considera en la estructura multiplicativa la relación entre los elementos y Vergnaud lo concibe como una relación cuaternaria. Nesher se sitúa en un análisis semántico al igual que lo hizo con los problemas aditivos. Identifica tres grandes categorías:

- Reglas de transformación. Considera dos tipos de problemas de multiplicación y de división, los problemas de división los subdivide en dos: división cuotitiva y partitiva (de acuerdo a la categorización de Vergnaud corresponde a isomofismos de medida y según Schwartz a los de tipo **I*E = E’.**

- Comparación multiplicativa. Hay implicadas tres cantidades, la cantidad que sirve de referente en la comparación, la que es comparada y el factor de comparación o escalar. De acuerdo a Vergnaud corresponden a la categoría de isomorfismo de medidas y según Schwartz a la terna I * E’ = E”.

- Multiplicación cartesiana. Están incluidos en la categoría producto de medidas de Vergnaud y en los del tipo E * E’ = E” de Schwartz.

3.6.4. Clasificación según Greer

Las categorías para los problemas multiplicativos establecidas por Greer son:

- Grupos iguales. A esta clase corresponden los problemas multiplicativos en los cuales aparecen dos expresiones, una relativa a cada uno (referida a cada grupo) y la otra expresión que refiere el número de grupos. Esta clase da lugar a dos tipos de problemas de división: la partitiva (en la que se busca el tamaño del grupo) y la cuotitiva (en la que se busca el número de grupos).

- Comparación multiplicativa. Corresponden a aquellos problemas en los que está presente la expresión: tantas veces como”, y en ella se involucran un factor multiplicativo y un multiplicador es decir, un número que indica cuántas veces se repite el factor multiplicativo.

- Producto cartesiano. Involucra aquí todos los problemas en los que la combinatoria es el modelo de interpretación del problema. Debido a que en esta clase los números que aparecen en el problema son elementos de una pareja ordenada, se puede encontrar sólo un problema de división.

- Área rectángulo. Se encuentran en esta categoría los problemas relacionados con hallar áreas, ó hallar las longitudes de los lados de un rectángulo.

En este punto de la presentación, es posible vislumbrar la complejidad de eso que comúnmente llamamos la multiplicación, y eso que hasta ahora no hemos traído a colación su algoritmo clásico. Pues bien, la noticia es que aquí no se le discutirá. Sin embargo, expresaremos comentarios acerca de la relación entre los algoritmos clásicos y el sistema de valor posicional, con la intención de reflexionar acerca de la complejidad de estas herramientas de representación y cálculo.

3.7 ANOTACIONES ACERCA DE ALGORITMOS ARITMÉTICOS ESCOLARES CLÁSICOS

La expresión **algoritmo matemático** es un término usado para referir un procedimiento matemático, finito a ejecutar paso a paso, para conseguir un propósito determinado. Tal es el caso de los algoritmos clásicos enseñados para hacer calculos de suma, resta, multiplicación y división.

Los algoritmos clásicos de las cuatro operaciones involucran el manejo de la estructura del sistema de numeración decimal de la cual forman parte los conceptos de número, valor posicional y teoría de agrupamiento. Tal como lo afirma Vergnaud (1991, pág. 135) "el número es un concepto para el cual existen varios sistemas posibles de escritura; la numeración posicional en base diez es uno de ellos", los conceptos: número, posición y agrupamiento dan sentido a los algoritmos de manera diferenciada; mientras el número es un concepto cuya estructura puede diferenciarse de las diversas maneras en que se puede escribir los números específicos, "el sistema de numeración es un soporte de la conceptualización" (Vergnaud, 1991, pág. 135) ya que la escritura de los números aparece vinculada al número mismo; sin embargo los métodos de enseñanza utilizados hasta ahora y basados en lo que Plunkett denomina el enfoque "analítico" en lo computacional permite el aprendizaje de una serie de reglas:

> **"que aunque puedan ser recordadas, son en gran parte aprendidas sin justificación y no están relacionadas con otros conocimientos aritméticos. Distan mucho de contribuir a la comprensión de la noción de número; más bien suscitan y alimentan la creencia de que las matemáticas son esencialmente arbitrarias**" (citado por Dickson et al. 1991 pág. 271*)*.

Este enfoque analítico hace relación no sólo al concepto de número sino que también puede verse en relación al valor posicional y al agrupamiento, en la medida, en que estos conceptos son aprendidos como esquemas de colocación (poner en casillas) o como simples valores de equivalencias entre unidades, decenas, centenas y demás unidades de orden.

La idea de número involucrada en el sistema decimal de numeración se basa en el reconocimiento del valor relativo de cada cifra de acuerdo al lugar que ocupa en el número tomado como globalidad, es decir, comprender que un dígito cambia su valor en la medida en que asume diferentes posiciones dentro del número global, por ejemplo el número 444 está compuesto de 3 dígitos iguales (el 4) pero que cuando se involucran en el número cuatrocientos cuarenta y cuatro toman valores diferentes, que corresponden a los dígitos que acompañan a las potencias de diez ($4x\ 10^2 + 4x\ 10^1 + 4x\ 10^0$).

Así mismo la idea de agrupamiento se refiere a los grupos de las potencias de diez que se han construido para conformar lo que denominamos unidades 10^0, decenas 10^1, centenas 10^2, etc.

El sistema de numeración decimal incluye el manejo del aspecto posicional y del agrupamiento en la medida en que en la lectura de un número se encuentran a la vez el valor de la posición, entender el número como una síntesis de agrupamientos de 10 y las cifras como portadoras de un valor de acuerdo a la posición que ocupan es diferente de entender el número solo desde la secuencia de los números conformada por 1 más. Las seriaciones que se realizan cuando se "cuenta" no significan que se entienda el sistema de numeración y el valor de los agrupamientos que se han hecho para poder escribirlos.

Así mismo, el sistema de numeración incluye aspectos multiplicativos en cuanto todo número se descompone en un polinomio de potencias de la base 10. Ej: en el número 324 su descomposición polinomial será: $3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$. Pero así como en la escritura del número hay implícitos varios conceptos, también en el desarrollo de los algoritmos los hay en la escritura de las cantidades y las propiedades de las operaciones.

El sistema posicional emplea el numeral 0 para describir la carencia de unidades de un determinado orden y no en el sentido de que el cero es sinónimo de nada " por sobreentenderse que si es nada, nada hay que tener en cuenta". Citado por Dickson, et al. (1991, pág. 277) Oesterle señala que:

> **"La importancia del cero para denotar un lugar en la notación posicional y como parte vital de nuestro sistema de numeración, aparece, como tantos autores han señalado, cuando comenzamos con la adición y multiplicación de los números de dos dígitos. Hasta ese mo-**

mento no parece existir auténtica razón para introducir tablas del cero en ninguna de las operaciones fundamentales"

Entonces para entender los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división es necesario tener los conceptos involucrados en el sistema de numeración de tal manera que sean ellos los que permitan dotar de significado a las operaciones realizadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro et al. (1995). ***Estructutas aritméticas elelmentales y su modelización***. México: Iberoamérica.

Dickson, L; Brown, M; Gibson, O. (1991) ***El aprendizaje de las matemáticas***. Madrid :Labor.

Maza, C. (1991). ***Multiplicar y dividir***. Madrid :Visor.
Reportaje a Vergnaud (1994). En: Novedades Educativas Buenos Aires p. 25-34.

Maza, C. (1992). ***La enseñanza de la multiplicación y la división***. Madrid :Síntesis.

Vergnaud, G. (1990). ***La théorie des Champs Conceptuales.*** En: Recherches en Didactique de Mathematiques. Vol. 10 (2-3). p. 133 - 170.

Vergnaud, G. (1991). ***El niño las matemáticas y la realidad.*** México :Trillas.