

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES A TRAVÉS DE LA VISUALIZACIÓN

Beatriz Adriana Vega Herrera, José David Zaldívar Rojas, Noelia Londoño Millan

Universidad Autónoma de Coahuila (México)

betyvega@gmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx, noelialondono@uadec.edu.mx

RESUMEN: Cuando se inicia el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en Secundaria (13-15 años), comúnmente se enfatizan los métodos algebraicos, con poca atención al gráfico y nula relación con el estudio de la función lineal. Más aún, existen dificultades y confusiones por parte de los estudiantes para interpretar la *solución de un sistema* (Ochoviet, 2009). La investigación que proponemos implica un acercamiento didáctico alternativo que considera a la visualización y la variación de parámetros como elementos indispensables para introducir al estudio de los Sistemas de Ecuaciones en nivel Secundaria y su relación con el estudio de la función lineal y posteriormente la identificación del tipo de solución del sistema según los parámetros involucrados en el modelo lineal. Se reportan los avances relativos a la primera parte de dicha propuesta.

Palabras clave: visualización, sistemas de ecuaciones lineales, Secundaria.

ABSTRACT: When the study of linear equations systems is started in secondary school (13-15 year-old students) , the algebraic methods are commonly emphasized, with little attention to the graph and no relation with the study of the linear function. Moreover, the students experience difficulties and mistakes to interpret the solution of a system (Ochoviet, 2009). The research we propose involves an alternative didactic approach that considers parameter visualization and variation as essential elements to introduce the study of the systems of equations in secondary school, as well as, its relation with the study of the linear function, and later, the identification of the type of answer of the system according to the parameters involved in the linear model. Progresses related to the first part of this proposal are reported.

Key words: visualization, systems of linear equations, Secondary school.

■ Introducción

Cuando hablamos de la palabra solución en nuestra vida cotidiana pensamos en muchas cosas: ya está resuelta nuestra vida, el bienestar emocional, poder dormir en paz, me quité un peso de encima, etcétera, pero cuando hablamos matemáticamente, los estudiantes están familiarizados en llegar a un resultado: el valor de una incógnita, el perímetro de cinta que necesita una caja, las raíces que se obtienen usando la fórmula general, entre otras. Pero, cuando se habla en el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas de que “*el sistema no tiene solución*”, la situación no es tan trivial. Como profesores, nos podemos encontrar con reacciones de los estudiantes como las siguientes: ¿por qué no?, ¿para qué se nos enseña si no hay “respuesta”? Y en pocas ocasiones se lleva a reflexionar al estudiante del porqué de esta afirmación. No damos una explicación amplia sobre tal hecho, solamente nos concretamos a decir: *la raíz negativa, si las rectas son paralelas, la división por cero no tienen solución*, etcétera.

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales da inicio en el segundo grado dentro del bloque 5 de los programas de estudio de nivel Secundaria en México, este tema se ubica en el eje de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico (SEP, 2011). De manera tradicional, los estudiantes comienzan con el aprendizaje de la resolución de problemas que implican el planteamiento de un sistema de ecuaciones de 2×2 utilizando principalmente, los métodos analíticos (métodos de Suma y Resta, Igualación y Sustitución). En ocasiones, no se concluye con buen detalle este tema, y mucho menos se pone atención a la representación gráfica donde se reconozca significados del punto de intersección de las gráficas como la solución simultánea del sistema (Ochoviet y Octak, 2011) y sobre todo existe una nula relación con los temas de función lineal, es decir, los sistemas de ecuaciones son vistos como un trabajo con ecuaciones, pero sin ninguna reflexión sobre la función lineal involucrada o de los parámetros involucrados. Incluso, la enseñanza del tema se hace de forma similar en diferentes países (Ochoviet, 2009). Como se puede apreciar, la inclusión del tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales dentro del currículo se realiza sin importantes cambios, ni cuestionando su importancia o inclusión.

En una investigación relativa a la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales, Ochoviet (2009) reporta que los estudiantes de bachillerato ante la pregunta que se presenta en la figura 1, asocian la “solución de un sistema” como el punto de corte de dos rectas.

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Justifica tu respuesta.

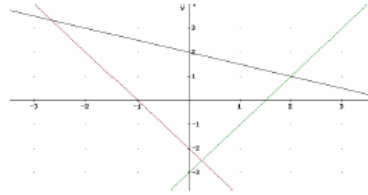


Figura 1. Pregunta realizada a estudiantes (tomado de Ochoviet, 2009, p. 20)

Ante la pregunta, varios de los estudiantes mencionan que “*hay tres soluciones porque hay tres puntos de corte*” o “*si se cortan una sola vez es una solución si se cortan dos veces o más, hay más soluciones*”(Ochoviet, 2009, p. 21). Aunado a la dificultad anterior, en la misma investigación mencionada, algunos estudiantes consideran a un sistema de ecuaciones como algo con lo que se puede hacer algo, es decir, resolverlo, de manera, que las reflexiones de los estudiantes giran en torno a un método para obtener una solución y no sobre las condiciones que debe cumplir el sistema para que exista solución. Lo anterior posiblemente se debe a la importancia que se les da en la enseñanza a los métodos de solución por sobre la comprensión de las características de los tipos de solución y su relación con la naturaleza del sistema en sí mismo.

Es así que consideramos en la presente investigación atender a las dificultades anteriormente mencionadas en cuanto a la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales, proponiendo una alternativa didáctica donde se considere a la visualización como elemento central que permita al estudiante desarrollar una alternativa de solución de un sistema de ecuaciones basada en la variación de los parámetros involucrados en las ecuaciones lineales que componen al sistema. De esta manera, se asume como hipótesis de investigación que *la visualización de las relaciones lineales involucradas en el sistema a través de la variación de parámetros permitiría generar nuevos significados asociados a la solución del sistema que permitirá caracterizar el tipo de solución*. Lo anterior permite modificar la enseñanza empleando en primer lugar la visualización para enseñar un método gráfico alternativo para posteriormente trabajar con los métodos analíticos.

El objetivo de este artículo es mostrar avances sobre una propuesta didáctica que pretende potencializar dos conceptos importantes: la visualización y los significados que se pueden generar con respecto a la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, y con ello, aportar a la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de dicho concepto matemático.

■ Marco conceptual: la visualización en el aprendizaje de las matemáticas

Este trabajo describe la importancia que tiene la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. Generalmente, se considera que la visualización solo es importante en el estudio de la geometría, sin embargo, se demuestra que también lo es en otras disciplinas tales como el álgebra; por ejemplo, cuando los estudiantes interpretan el comportamiento de una relación lineal. De hecho, el estudio de la visualización ha recibido mucha atención como tema de numerosas investigaciones en Matemática Educativa desde hace algunos años (ver por ejemplo: Hitt, 1997; Cantoral y Montiel, 2001). Duval (1988) señala que la conversión del sistema algebraico al gráfico es más fácil que el inverso; es decir, del gráfico al algebraico. Se sabe que en general, la enseñanza de la matemática se inclina hacia el desarrollo de algoritmos y de lo algebraico. Los profesores de matemáticas enfatizan el trabajo sobre los procesos algebraicos restándole importancia a los procesos visuales.

Zimmermann y Cunningham (1990) citados por Cantoral y Montiel (2001) mencionan:

en la visualización matemática lo que interesa es precisamente la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz o papel o en algunos casos con computadora) para representar un concepto matemático o problema como una ayuda en la resolución del problema. Dentro de nuestra investigación, se considera a la Visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales (Cantoral y Montiel, 2001).

■ Aspectos metodológicos y avances de resultados

Se pretende mostrar avances sobre el tratamiento didáctico-metodológico que se implementó con un grupo de 25 estudiantes de segundo grado de nivel Secundaria en Saltillo, Coahuila, México, con respecto al aprendizaje del tema de solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. Cabe mencionar que para este grupo de estudiantes se trataba del primer contacto con el tema de sistemas de ecuaciones, por lo que se decidió proponer una propuesta alternativa durante el curso, a manera de un experimento de enseñanza, donde en un primer momento del curso se trabajaría con los estudiantes la variación de los parámetros A y B del modelo lineal $Y=Ax+B$, para posteriormente involucrar una pareja de funciones lineales a manera de sistema de ecuaciones y caracterizar de manera gráfica y por medio de las características de los parámetros y sus relaciones, los tipos de solución que el sistema pudiera tener según la naturaleza de las ecuaciones involucradas. En nuestra propuesta, se usa en algunos casos la tecnología (Geogebra) y normalmente las herramientas básicas de cualquier estudiante: lápiz y papel. Todos los diseños que se trabajaron fueron tomando el plano cartesiano como base, observando en cada uno las representaciones generadas, las respuestas documentadas que se iban obteniendo por parte de los estudiantes con

respecto a la información visual que se iba generando en cada una de los diseños que conformaron a la propuesta. De manera que nos basamos en los trabajos de Cantoral y Montiel (2001) para realizar una alternativa didáctica dentro del aula de clases, haciendo uso de la variación de los parámetros para caracterizar el comportamiento de una recta a través de los mismos.

Como ya se mencionó, en algunas de estas fases se aplicaron secuencias didácticas que privilegian la visualización de los parámetros de un modelo lineal, con la finalidad de que el estudiante al momento de llegar al sistema de ecuaciones lineales sea capaz de identificar el tipo de solución del sistema, empleando un análisis de la variación de parámetros para caracterizar el tipo de solución del sistema. A continuación se presentan las fases de la investigación, que incluye una fase de diagnóstico a estudiantes de tercer grado y la propuesta de intervención de enseñanza que se implementó al grupo de estudiantes de segundo grado de secundaria. Durante las fases, la mayoría del trabajo realizado por los estudiantes se realizó a papel y lápiz. Las implementaciones se realizaron durante la sesión regular de clases del grupo que consistía en sesiones de clase de alrededor de 50 minutos por clase. Sólo durante una de las tareas en la última fase se utilizó un recurso tecnológico que consistió en el uso del Geogebra.

1. Fase 1. Examen diagnóstico. En esta fase se realizó un examen diagnóstico a 60 estudiantes de tercer grado de secundaria para observar las dificultades que ellos tienen al momento de identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales en el plano cartesiano. El análisis de las respuestas de dicho diagnóstico confirma lo mencionado por Ochoviet (2009) en cuanto a que los estudiantes presentan dificultades para identificar sistemas de ecuaciones lineales de los que no lo son y sobre los significados de solución gráfica y analítica de un sistema. Aquí presentamos algunas evidencias que se obtuvieron de dicho examen diagnóstico (Ver figura 2).

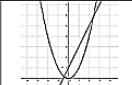

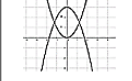
Gráficas	¿Representa un sistema de ecuaciones lineales de 2x2?	El sistema, ¿tiene solución?, ¿Qué tipo de solución es?	¿Es un sistema de ecuaciones lineales?
	SI (✓) NO ()	SI (✓) NO () Justificación: <u>interseccion las lineas</u>	SI Justificación: <u>porque no tiene el signo cuadrático</u>
	SI (✓) NO ()	SI (✓) NO () Justificación: <u>porque son rectas y se cruzan</u>	NO Justificación: <u>porque es una ecuación cuadrática</u>
	SI () NO ()	SI () NO (✓) Justificación: <u>porque no son rectas</u>	NO Justificación: <u>no las entiendo</u>
			$3x - 2y = 7$ $y = 7 - 3x$ ¿Es un sistema de ecuaciones lineales? <u>SI</u> Justificación: <u>porque no tiene el signo cuadrático</u>
			$x^2 + 2y - 3 = 0$ $-y + 2x - 1 = 0$ ¿Es un sistema de ecuaciones lineales? <u>NO</u> Justificación: <u>porque es una ecuación cuadrática</u>
			$3m + 7n = 7$ $n = 7 - 3m$ ¿Es un sistema de ecuaciones lineales? <u>NO</u> Justificación: <u>no las entiendo</u>

Figura 2. Algunas respuesta del examen de diagnóstico (tercer grado)

De acuerdo con las respuestas se puede mencionar que los estudiantes de tercer grado tienen dificultades al momento de identificar algebraica y gráficamente un sistema de ecuaciones, además,

que algunos son capaces de identificar un polinomio lineal de uno cuadrático, sin embargo, no pueden identificar el tipo de polinomio de manera gráfica, es decir, existen dificultades en el registro gráfico.

A partir de la confirmación de las dificultades con el tema obtenidas en el examen diagnóstico, es que se realiza una intervención con un grupo de estudiantes de segundo grado quienes iban a tener un primer contacto con el tema de sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, se consideraron dos fases en la intervención: la fase de la variación de parámetros en la función lineal y la fase de alternativa para la enseñanza de un sistema de ecuaciones basada en la variación de parámetros. Nuestra propuesta se basa en la visualización de los parámetros de una función lineal y los efectos que tienen dichos parámetros en el comportamiento de la misma, de manera que cuando se conjunten dos funciones, a manera de sistema en un mismo plano cartesiano, se puedan realizar caracterizaciones del tipo de solución a partir de los parámetros de las funciones lineales y de sus comportamientos gráficos en conjunto. A continuación mostramos la manera en la que se desarrollaron las siguientes dos fases y algunos resultados preliminares del análisis de las producciones de los estudiantes. Cabe mencionar que nuestros análisis se basan únicamente en las producciones escritas de los estudiantes cuando éstos respondieron a hojas de trabajo que se les aplicaba en cada sesión mientras duró la implementación de la alternativa didáctica que propone nuestro trabajo.

2. Fase 2. La variación de parámetros. Esta fase consistió en dar un enfoque alternativo a la función lineal, trabajando más en la visualización y la variación de los parámetros del modelo lineal $Y = Ax + B$. Durante ocho sesiones de clases repartidas en dos semanas de clases, se trabajó con el grupo completo de segundo grado de nivel Secundaria en Saltillo. Durante las sesiones se introdujeron los conceptos de pendiente y ordenada al origen como parámetros del modelo lineal. De manera que la pendiente tendrá que ver con la forma con la cual la inclinación de la recta se controla, mientras que el parámetro B se refiere a la traslación de la recta sobre el eje vertical (Ver Figura 3). Se trata de una forma particular de entender a la visualización de las funciones. Dicha alternativa didáctica se dividió en seis hojas de trabajo, presentando aquí alguna parte de ellas.

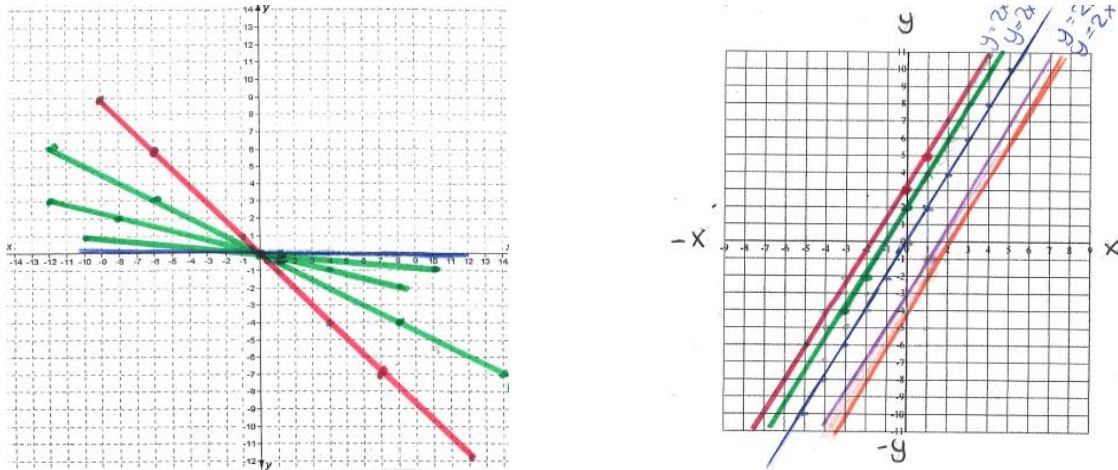


Figura 3. La Visualización de los parámetros A y B en el modelo Lineal. Algunas respuestas de estudiantes de segundo grado

De nuestros resultados preliminares durante esta fase de acuerdo a las producciones escritas de los estudiantes, podemos ver que entre las dificultades de los estudiantes se encuentra que un porcentaje de estudiantes consideran a gráfica de la recta sólo como un segmento determinado por la tabla de valores que los estudiantes debían completar para formar la gráfica, y no como una recta infinita. Esto se debe probablemente a que los estudiantes consideran solamente como la gráfica dentro del intervalo dado en la tabla. Sin embargo, los estudiantes son capaces de identificar el comportamiento de las gráficas a partir de las características de la pendiente y de la ordenada al origen.

3. Fase 3. Sistema de Ecuaciones con variación de parámetros. En esta tercera fase, implementada unas semanas posteriores a la fase dos, para ir de acuerdo al plan de estudios de los estudiantes, se trabajaron con diseños planteados para que los estudiantes, por medio de la visualización y la variación de parámetros, sean capaces de identificar el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Esta etapa, que se desarrolló durante una semana, consistió en discutir con los estudiantes a partir de los parámetros involucrados, una pareja de líneas rectas y encontrar un patrón en los parámetros de manera que se caracterizara un tipo de solución. Por ejemplo, si un par de líneas rectas tenían la misma pendiente pero diferentes ordenadas al origen, entonces la pareja de rectas nunca se intersecan, con lo cual, se podría caracterizar al sistema como *sin solución*. Mientras que si las rectas tenían diferentes pendientes, podían tener un solo corte, lo cual caracterizaría al sistema como con una *única solución*.

El tratamiento didáctico que se llevó a cabo con los estudiantes consistió en una serie de actividades donde ellos tenían que realizar tareas de *construcción* o de *interpretación*, según Leinhardt, Zaslavsky y Stein, (1990) (Ver figura 4).

Possibilidades	Dibujo	Observación	Funciones lineales	Representación grafica	¿Cuál es el valor de la pendiente de cada una?	Que características tienen las pendientes	¿Qué características tienen la ordenada al origen?
Possibilidad uno		Se crean de forma desigual	1) $y = 2x + 8$ 2) $y = x + 4$		$m = \frac{2}{1}$ $m = 1$	Que se cruzan	Que de una representa la mitad de la otra.
Possibilidad dos		las líneas no se juntan	1) $y = 6x - 10$ 2) $y = 6x + 10 = 0$		$m = \frac{6}{6}$ $m = \frac{6}{6}$	Que los dos rectas coinciden	Que es la misma
Possibilidad tres		Se forma un ángulo Perpendicular	1) $y = -2x - 1$ 2) $y = -2x + 5$		$m = -2$ $m = -2$	Que son paralelas y se cruzan	Que de un el número negativo y la otra positiva
Possibilidad cuatro		Se forma un Ángulo agudo	1) $y = -3x - 2$ 2) $y = -3x - 5$		$m = -3$ $m = -3$	Que son paralelas y se cruzan	Que la ordenada al origen de uno es menor otro mayor.
		Se forma un ángulo obtuso	1) $y = 3.4x + 5$ 2) $y = -x + 5$		$m = \frac{3.4}{-1}$ $m = -1$	Se cruzan	Que son las mismas
			1) $y = -2x - 3$ 2) $4y + 8x + 12 = 0$		$m = -\frac{1}{2}$ $m = -\frac{1}{2}$	Que las 2 rectas coinciden	son las mismas

Figura 4. Tareas de Construcción e Interpretación implementadas a los estudiantes

Es importante mencionar que al momento de la escritura de este reporte, los investigadores se encuentran en el análisis de las producciones de los estudiantes en esta fase de la alternativa propuesta por la investigación. Se espera aportar elementos que puedan caracterizar la forma en la cual los estudiantes visualizan durante estas tareas de interpretación y de construcción la solución de un sistema de ecuaciones lineales cuando se implementa una alternativa basada en la variación de los parámetros de una función lineal y sus características gráficas.

Comentarios finales

La propuesta que se presentó en apartados anteriores y los resultados preliminares durante las fases 1 y 2, busca, en síntesis, aportar experiencias vividas en el aula de clase al implementar una alternativa visual para el tema de sistemas de ecuaciones lineales de tal manera que se permita al estudiante resignificar la noción de solución de un sistema de ecuaciones por medio de la variación de parámetros. Esperamos aportar a la comunidad de profesores evidencias de las habilidades y dificultades que los estudiantes tuvieron en la transición de la función lineal al tema de sistemas de

ecuaciones, para que en un futuro se considere nuestra alternativa didáctica como una forma plausible para introducir al estudio de sistemas de ecuaciones lineales relacionándolo con el tema de funciones lineales, contenidos que no deberían parecer desconectados.

De acuerdo a un análisis preliminar de los datos y evidencias con las que se cuentan, hemos notado diversas dificultades en el tema de graficación con los estudiantes y algunas dificultades con la noción de función lineal, tal y como Leinhardt, et al. (1990) han reportado.

Nuestros análisis se están encaminando a caracterizar los tipos de tareas que se le presentaron a los estudiantes y qué elementos visuales utilizan, las representaciones que emplean y el tipo de formulaciones que ponen en juego los estudiantes al momento de discutir sobre la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Esperamos aportar con ello una propuesta de intervención didáctica en dicho tema que considere el rol de la graficación y la visualización en la construcción de ideas matemáticas en estudiantes de Secundaria (Ver figura 5).



Figura 5. Trabajo con Geogebra

■ Referencias bibliográficas

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice Hall & Pearson Educación: México.

Hitt, F. (1997). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática*, 10(2), pp. 23-45.

- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions Graphs and Graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* 60(1), 1-64.
- SEP (2011). *Programa de Estudios 2011, Guía para el maestro*, Educación Básica Secundaria, Matemáticas.
- Ochoviet, C. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.
- Ochoviet, C. & Oktac, A. (2011). Comprender los resultados de investigación: La función docente de investigador en la enseñanza de la matemática educativa. En G. Buendía Ábalos (Coord.): *Reflexión e investigación en Matemática Educativa* (pp. 53-80) México: Editorial Lectorum.