

## SITUACIONES DE APRENDIZAJE PARA LA MODELACIÓN ESCOLAR

**María Esther Magali Méndez Guevara, Nancy Marquina Molina, Karen Zúñiga González**

Universidad Autónoma de Guerrero. (México)

memmendez@uagro.mx, nmarquina@uagro.mx, kzg.93@live.com

**RESUMEN:** Desde nuestra perspectiva, la modelación es parte esencial en la construcción, difusión y desarrollo del conocimiento científico, es por ello que consideramos importante incluir en las aulas de Matemáticas, diseños en los que se desarrollen actividades que promuevan la modelación de situaciones cotidianas. Así se proponen tres diseños de situación basados en la categoría de modelación escolar, mismos que han sido explorados en escenarios escolares y de divulgación matemática y que trastocan conocimientos de la geometría analítica, el cálculo y las ecuaciones diferenciales. El objetivo principal fue compartir los diseños mediante su aplicación y análisis de la experiencia vivida, se utilizaron diversos sensores para obtener datos gráficos y analizar las variaciones, locales y globales, para ajustar las tendencias y delimitar estabilidad de las gráficas, considerando las condiciones iniciales. Finalmente se invita a conocer y discutir el eje que sustenta los diseños, quedando abierta la posibilidad de sugerencias a la mejora y a la adaptación de los mismos.

**Palabras clave:** modelación escolar, variaciones, tendencias y estabilidad

**ABSTRACT:** From our perspective, modeling is an essential part in the construction, spreading and development of the scientific knowledge. That's why we consider it is important to include designs to develop activities that allow modeling daily situations in math classrooms. Then, we propose three designs of situations, based on the school modeling category, all of which have been explored in school and mathematical spreading settings. They change knowledge of analytic geometry, mathematic calculus and differential equations. The main objective of this work was to share the designs by applying and analyzing of the achieved experience. Different sensors were used to obtain graphical data and to analyze both local and global variations, in order to adjust the tendencies and to define graphs stability, according to the initial conditions. Finally, we propose to know and discuss the core that supports the designs, and we are open to suggestions for changing and improving them.

**Key words:** school modeling, variations, tendencies and stability

### ■ La modelación escolar

El desarrollo científico y tecnológico no está aislado de los problemas, contextos o usanzas que vive la sociedad en momentos específicos. En este sentido, la modelación es parte esencial de la construcción, difusión y desarrollo del conocimiento científico, pues otorga una justificación funcional a este, además provoca la construcción de herramientas como elementos esenciales de la situación que se atiende, para representar lo que se estudia con determinados fines, de manera que pueda ser comunicado (Gilbert, 2004; Koponen, 2007). Es decir, es lo que hace posible a un grupo humano construir explicaciones de su realidad, tomar decisiones y desarrollar sus construcciones, de manera que no es ajena al ser humano, ni a la situación en la que sucede.

La modelación se reconoce como la estrategia por excelencia del ser humano para generar conocimiento (D'Ambrosio, 2009). Sin embargo, la visión generalizada sobre modelación en la Matemática Escolar consiste en concebirla como un proceso establecido que conviene implementar para resolver problemas o movilizar competencias, de manera que este proceso se muestra aislado a quienes lo usan. Para nosotros, la modelación es una práctica social en donde los actores principales del desarrollo de conocimiento son partícipes del proceso, esto lo llevamos al discurso Matemático Escolar y en el proponemos a la modelación escolar como una categoría de conocimiento matemático que promueve el desarrollo y articulación de los conocimientos matemáticos, en este sentido la modelación es un proceso de construcción en sí mismo de conocimiento matemático.

Nos interesa incluir las prácticas de modelación en las actividades del docente de Matemáticas mediante una categoría de construcción de conocimiento matemático llamada modelación escolar, es por ello que proponemos que mediante talleres de modelación y reflexión sobre la estructura de los diseños podríamos lograr el escenario que propicie la adopción de prácticas de modelación por parte de profesores en servicio o formación. En primer lugar se comparten algunos diseños de situación (DS) basados en la modelación escolar, mediante los cuales los participantes tendrán una vivencia desde la experimentación con diversos sensores (movimiento, fuerza y temperatura), analizando las variaciones locales, globales, las tendencias de gráficas para postular estabilidad y comportamientos de las mismas, incluyendo los efectos de las condiciones iniciales. En segundo lugar, se da a conocer y se discute el eje que sustenta los diseños en tanto sustento teórico-metodológico, y tercero se invita a realizar sugerencias para mejorar y/o adaptar los mismos a la Matemática de la escuela según sus realidades. Con esto se tiene la intención de crear un medio para poder incluir en la Matemática Escolar elementos de la investigación que provoquen problematizar y desarrollar el saber matemático.

Las actividades se detonan desde el estudio de fenómenos Físicos, que son tratados desde el Nivel Básico en la secundaria hasta el Nivel Superior, y que a nosotros nos da un contexto para resignificar el proceso de modelación en el estudio de las condiciones iniciales y las variaciones, tangible en el desarrollo del uso de las gráficas. Los fenómenos son: El estudio del movimiento rectilíneo uniforme y rectilíneo uniformemente acelerado; El estudio de las temperaturas y, El estudio de la fuerza sobre un objeto.

Con este escenario se busca significar y desarrollar el uso de la gráfica en la modelación de estos fenómenos. Con esto evidenciamos también la transversalidad de la Matemática.

Los diseños se sustentan en elementos de la teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013), sobre todo de aquellos que caracterizar el rol de la modelación en la construcción social del conocimiento, mediante las categorías de conocimiento matemático basados en el proceso de modelación (Méndez, 2013; Suárez & Cordero, 2010; Méndez, 2008; Arrieta, 2003), desde estas retomamos los medios y procesos que permitieron estudiar cómo la Matemática adquiere sentido y se desarrolla en sus usos ante situaciones específicas (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez & Cordero, 2014; Méndez & Cordero 2014), por ejemplo en comunidades de estudiantes de la educación media superior y superior.

### ■ Los diseños de situación

Los diseños de situación están basados en la modelación escolar son:

- La experimentación o experiencia evocada; de donde se obtienen y tienen sentido los datos a estudiar; las condiciones iniciales y el comportamiento general del fenómeno darán significado a los dominios o rangos de funciones, en general conllevará a la formulación de los modelos matemáticos.
- El estudio de las variaciones locales y globales en los datos expresados en gráficas o tablas numéricas.
- La descripción, análisis y ajuste de comportamientos que transforman los datos en modelos, con los que es posible predecir a corto o largo plazo (o aproximar a un valor específico) el fenómeno o situación estudiada.



Figura 1. Elementos de la categoría de modelación escolar

Los elementos mencionados se hacen tangibles en los diseños, los cuales pasan por tres momentos, no necesariamente son lineales y consecutivos, estos son:

El Momento 1: Está caracterizado por la emergencia de usos que explican los cambios que ocasiona la modificación de condiciones en el experimento que se realizó. Usos detonados por la situación de transformación, en donde se caracterizan variaciones globales. Es decir, por el comportamiento del tipo de variación.

El Momento 2: Está caracterizado por el estudio del cambio de una posición a otra o de un intervalo de tiempo a otro, para determinar cuánto o cómo varía algo en ese intervalo, o bien, en los intervalos en donde sucede un cambio (propio de la situación de variación).

El Momento 3: Este momento se caracteriza por los usos del conocimiento cristalizados ante la intención de acercarse lo más posible a un valor específico. Estos usos se valen de las propiedades de variación en intervalos pequeños cercanos al valor que se quiere aproximar (esto sucede en la situación de aproximación).

Con esta categoría se busca generar escenarios para resignificar conocimientos matemáticos, reconociendo cuáles son las funciones de estos ante el análisis, la predicción y la argumentación sobre situaciones específicas en donde es inherente el cómo y por qué se hacen visible los elementos esenciales, la variación y el comportamiento de lo estudiado, es decir las formas.

### ■ Desarrollo de la propuesta

El ambiente del taller es adecuado para desarrollar nuestra categoría pues mediante el análisis y la reflexión se construyen hipótesis sobre las experiencias, esto lleva a postular, ajustar y convenir herramientas matemáticas que describan y predigan lo estudiado, es decir los modelos. Nuestra propuesta promueve una Matemática Funcional, lo que implica que los partícipes en el desarrollo de situaciones construyan y articulen usos del conocimiento matemático donde la modelación escolar es el eje argumentativo.

#### **La gestión del taller se realiza en tres fases:**

**Fase 1.** La experimentación. Análisis de lo sucedido en la experimentación o, en la experiencia evocada o simulada, esto se realiza mediante actividades en equipo, las cuales invita a definir qué variables intervienen en la situación, qué variables se pueden relacionar.

**Fase 2.** La especulación. Se discute cómo se pueden relacionar las variables, qué significan según el experimento y cómo se puede expresar esa relación esto se hace en equipo y en el colectivo para compartir usos.

**Fase 3.** El consenso y la identidad de usos. Se convienen en los equipos qué herramientas Matemáticas permiten articular los elementos que intervienen en las situaciones enfatizando en el

funcionamiento de estas según su intención. Esto último llevará a reconocer identidades en los usos del conocimiento matemático.

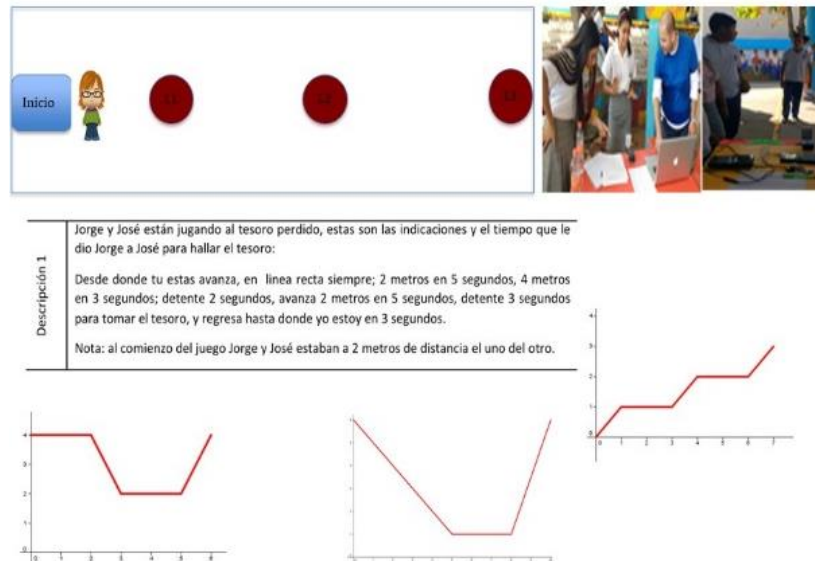
Los diseños que se desarrollan están estructurados en momentos de desarrollo de usos del conocimiento matemático que se articulan de manera inevitable ante la formulación de argumentos en torno a las herramientas matemáticas construidas, los modelos, que permiten caracterizar y predecir los fenómenos estudiados, a este hecho le llamamos Desarrollo de redes de usos de conocimiento matemático (Drucm).

En actividades sobre el estudio del movimiento (Tabla 1), se invita a estudiar; el desplazamiento de un objeto en línea recta, a lo largo de tres puntos, con esto se tiene la intención de conocer cuáles son los usos cotidianos de las gráficas en donde se busca resignificar el espacio de graficación, las variables y su articulación, y promover desde ahí el desarrollo del uso de las gráficas para describir distancias recorridas con respecto del tiempo en donde se construyen o develan saberes sobre función y función a trozo, también promovemos el desarrollo del uso de gráficas velocidades en ciertos tiempos, en donde es posible resignificar a la integral definida mediante el estudio de situaciones de movimiento (Tocto & Méndez, 2015).

**Tabla 1.** Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio del movimiento

DS		Estudiando el movimiento
Drucm		
Usos de las gráficas y las expresiones analíticas	Momento 1	Consta de la experimentación donde se develan los usos de las gráficas en tanto <b>se convienen las variables y sus relaciones</b> . Se <b>desarrolla la gráfica</b> para las <b>variaciones a trozos</b> . Se convienen y analizan las variables a considerar para comunicar y caracterizar el movimiento.
	Momento 2	Consta de la experimentación y <b>desarrollo de la gráfica</b> para las <b>variaciones a trozos</b> . Se estudia las variaciones del movimiento dadas diferentes condiciones, para realizar ajustes y las tendencias en las gráficas que expresan como es el movimiento.
	Momento 3	Desde <b>la articulación</b> de la gráfica dadas diferentes condiciones a la expresión algebraica. Se analiza <b>la variación y el comportamiento general de la gráfica</b> para poder proponer una expresión algebraica que reúne las condiciones del experimento y la acción del movimiento durante cierto tiempo.

En general las actividades se desenvuelven desde el estudio del movimiento mediante la articulación de modelos y el fenómeno (Fig. 2) Para el desarrollo de estas actividades recurrimos al sensor del movimiento y al programa que nos facilita la visualización de las gráficas, también se emplea el geogebra como medio de argumentación en los modelos de funciones a trozos.



**Figura 1.** Imágenes de la Situación del estudio de movimiento.

Mientras que las actividades que se proponen para el estudio de la temperatura versa básicamente sobre el análisis de las condiciones iniciales y cómo estas se expresan en las gráficas en tanto su variación global y su tendencia, y finalmente se pide que se postulen modelos que se ajusten a los datos que se tienen de esta situación (Tabla 2).

Se estudian básicamente dos fenómenos; el enfriamiento o calentamiento de sustancias (Agua y/o silicón) y el equilibrio térmico (Figura 3). Las actividades giran entorno en el estudio de las variaciones globales y su tendencia, lo cual motiva a postular alguna función conocida dado el comportamiento que se identifica en las gráficas y los incrementos numéricos.



**Tabla 2.** Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio de la Temperatura

DS		°Frio vs caliente, ¿se establece?
Drucm		
Desarrollo de usos de las gráficas y articulación con modelos numéricos y algebraicos	Momento 1	Este consiste en conjeturar desde el sentido común sobre la tendencia de la temperatura bajo ciertas condiciones. Se toman datos puntuales de la temperatura y se bosquejan gráficas, donde <b>se convienen las variables y sus relaciones</b> , esto es expresado en usos de las gráficas.
	Momento 2	Consta de la experimentación y <b>desarrollo de la gráfica</b> para las <b>variaciones globales</b> . Se estudia las variaciones del cambio de la temperatura con respecto al tiempo en ciertas condiciones de experimentación. Sucede un desarrollo del uso de las gráficas dado que se argumenta sobre cómo afecta a las variaciones globales, visibles en gráficas, las diferentes condiciones de experimentación.
	Momento 3	Consiste en analizar las variaciones y postular alguna relación algebraica o analítica que se corresponda con la gráfica y la situación estudiada. Se prueba y se ajusta los modelos propuestos. Se analiza la <b>variación de los datos numéricos y el comportamiento general de la gráfica</b> para poder proponer una expresión que reúne las condiciones del experimento, su variación y tendencia en cierto tiempo.

Para la realización de las actividades nos apoyamos de sensores de temperatura y calculadoras graficadoras, estos medios nos permiten visualizar las variaciones globales de las gráficas y obtener los datos numéricos para analizar las variaciones en intervalos de tiempo, con ello dar elementos a los partícipes para postular expresiones que se ajusten a la gráfica y la situación que se estudia. Finalmente se plantea el estudio de gráficas que expresan la variación de la fuerza de un objeto en movimiento durante el transcurso del tiempo, nos enfocamos básicamente al estudio de las variaciones globales con respecto a las condiciones de experimentación.

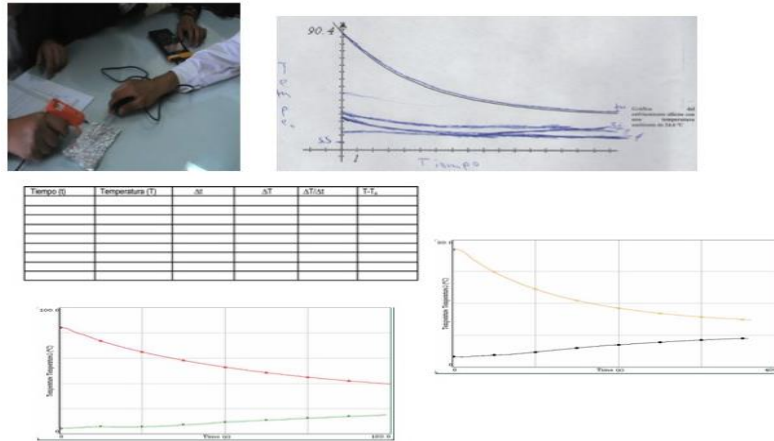


Figura 3. Imágenes de la Situación del estudio de la temperatura

En este caso nos interesa que los participantes analicen la relación que existe entre los modelos gráficos y las condiciones iniciales cuando experimentamos con un sensor de fuerza utilizando objetos redondeados de diferente tamaño, colgados de un hilo y puestos en movimiento (Tabla 3).

Tabla 3. Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio de la Fuerza

DS		¿Graficando fuerza?
Drucm		
Desarrollo de usos de las gráficas para la predicción de la situación.	Momento 1	<p>Consiste en el análisis de una situación dada y su interpretación por medio del bosquejo de una gráfica.</p> <p><b>Se convienen y analizan las variables</b> a considerar para la construcción de un modelo gráfico.</p>
	Momento 2	<p>Consta de la experimentación y la obtención del modelo gráfico a partir del uso del sensor de fuerza bajo diferentes condiciones experimentales.</p> <p>A partir del estudio de <b>las variaciones de las gráficas modificando las condiciones iniciales del experimento</b> se pretende la elaboración de <b>argumentos</b> que sustenten la <b>predicción</b> del comportamiento de las gráficas.</p>
	Momento 3	<p><b>La articulación</b> de las condiciones iniciales de experimentación, <b>postulando</b> a los parámetros que intervienen en los modelos gráficos, significando con esto la tendencia del comportamiento y/o la estabilidad de la gráfica.</p> <p>Se analiza <b>la variación y el comportamiento general de la gráfica</b> bajo las diferentes condiciones iniciales, sucede una articulación de las gráficas con el fenómeno modelado.</p>



Las gráficas obtenidas de la tensión ejercida sobre la cuerda cuando pende a ésta un objeto en movimiento, pretenden provocar diferentes argumentos que relacionen los parámetros de las gráficas con características específicas de la situación tales como: tamaño de la bola, largo de la cuerda de la que pende y el ángulo desde el cual se suelta la bola, mismas que deberán corroborar experimentando (Figura 4). Con estas actividades se promueven la inclusión de prácticas de modelación mediante una categoría que desarrolla y articula los usos de conocimientos matemático que la comunidad pueda desarrollar para describir y predecir qué sucede con la situación vivida.

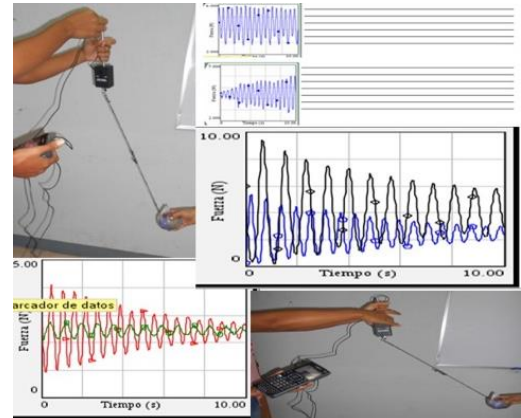


Figura 4. Imágenes de las actividades de fuerza

### ■ Algunos resultados

Con esta propuesta de taller se genera un espacio para la resignificación del uso de las gráficas desde argumentos cotidianos, matemáticos y físicos. Por ejemplo en una situación de movimiento se pidió analizar una gráfica velocidad - tiempo y describir las distancias recorridas del móvil, esto ha mostrado dos usos de la gráfica, una tiene que ver con argumentos de la Física escolar, específicamente la fórmula para calcular la velocidad, y el otro argumento se corresponde con la Matemática, en tanto usan la integral definida.

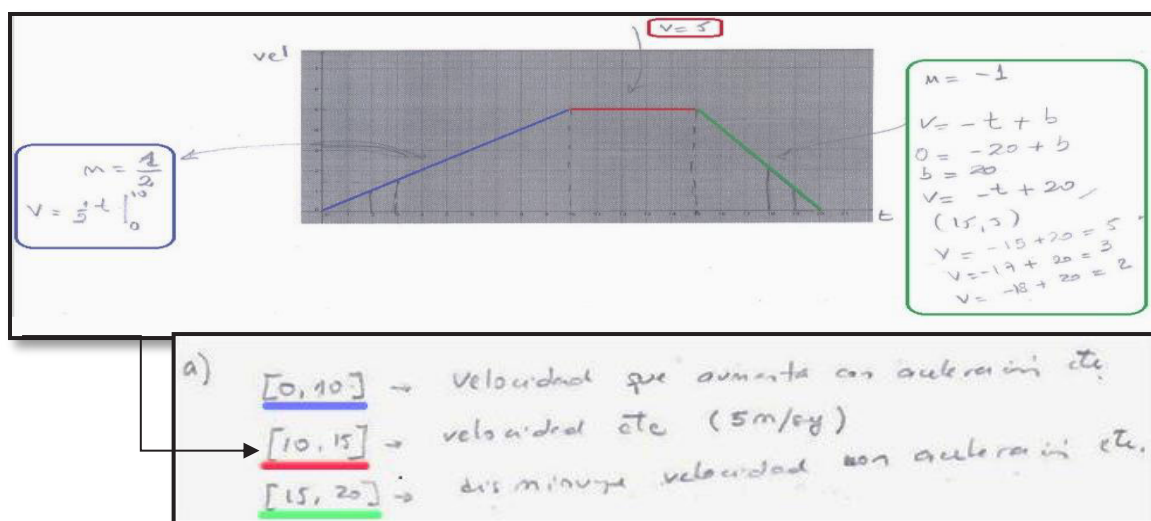


Figura 5. Uso de la gráfica que se desprende de argumentos de la Física escolar (Tomado de Tocto, 2015)

La figura 5 muestra cómo se usa la gráfica desde el argumento de la física para obtener las funciones por intervalos de tiempo. Esto permite determinar las variaciones locales de velocidad y posteriormente permitió saber las distancias recorridas por intervalos y en total de esta. Mientras que la figura 6 muestra cómo se usa la gráfica para identificar comportamientos en los intervalos, marcados como creciente, constante, decreciente y se identifican los puntos de cambio de estos comportamientos para así emplear la fórmula de punto pendiente y así obtener las funciones a trozos, y finalmente calcular la integral definida a cada función según sus extremos de variación.

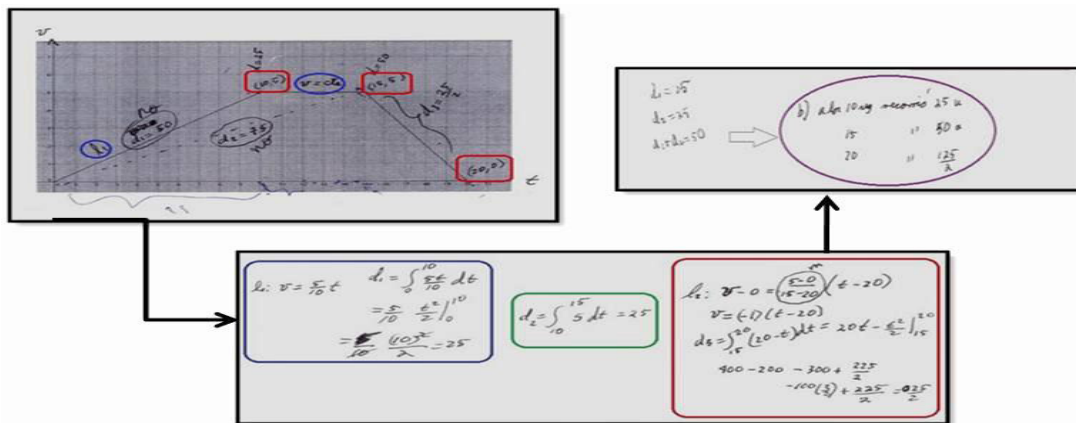


Figura 6. Uso de la gráfica que se desprende de argumentos matemáticos (Tomado de Tocto, 2015)

Esto nos deja evidenciar que si bien podría observarse la misma representación no son iguales, y eso se caracteriza por el uso de gráfica, la cual da significados a los saberes que confluyen y la situación misma. Entre los argumentos matemáticos que se promueven están; el espacio de graficación cartesiano, función, función a trozos, derivada e integral definida así como la estabilidad expresada como la tendencia de las gráficas en las situaciones del estudio de fuerza y la temperatura. Si bien las actividades que se proponen están aún en exploración se obtuvo buena aceptación por parte de los participantes, así mismo se nos hicieron algunas sugerencias que serán consideradas en los próximos rediseños.

### Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa.

- Cen, C., Zaldívar, D. Briceño, E., Méndez, M., & Cordero F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: Un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17 (4-III), 417-436.
- Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar*. (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Méndez, M & Cordero, F. (2012). La función de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, (pp. 257 – 267). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav. D´Ambrosio, 2009
- Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de la práctica: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas*, (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.
- Méndez, M. & Cordero, F. (2014). *La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos*. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27. (Pp. 1603-1610) Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociopistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), p. 319-333.
- Tocto, M. & Méndez, M. (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En F. Rodríguez & R. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa* (pp. 226-231). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.
- Tocto, M. (2015). *Modelación escolar y la caracterización de la integral definida*, (Tesis de maestría no publicada). ). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.