

IDENTIFICACIÓN DE NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO A CARGO DE MAESTROS DE EDUCACIÓN BÁSICA

Cecilia Gaita, Francisco Ugarte, Jesús Flores, Mihály Martínez

Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)

cgaita@pucc.edu.pe, fugarte@pucc.edu.pe, jvflores@pucc.edu.pe, martinez.ma@pucc.edu.pe

RESUMEN: En este artículo presentamos los resultados de una investigación realizada con maestros de educación primaria, a quienes se les solicitó reconocer, en las respuestas de sus estudiantes, rasgos de desarrollo del razonamiento algebraico e identificar los niveles de algebraización adquiridos. Para ello se utilizaron actividades sobre patrones geométricos. Los resultados muestran que, si bien los docentes declaran de manera general conocer cuáles son los objetos y procesos propios de la actividad algebraica, no reconocen en las respuestas de sus estudiantes los procesos de unitarización y formalización. Por lo que se concluye la necesidad de diseñar actividades que contribuyan a dicho fin.

Palabras clave: razonamiento algebraico, profesores, niveles, patrones

ABSTRACT: This article shows the results of a research that was carried out with primary school teachers. They were asked to recognize, in their students answers, some features of algebraic thinking development and to identify the acquired algebraic knowledge levels. With this respect, some activities about geometric patterns were used. The results show that the teachers generally state that they know which the objects and processes are typical of the algebraic activities, but they don't recognize, when checking students' answers, the unitary and formalization processes. Therefore, the conclusion is focused on the need of designing activities for achieving this purpose.

Key words: algebraic thinking, teachers, levels, patterns

■ Introducción

En relación a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, en los últimos años se han desarrollado numerosos trabajos con distintos focos de atención, tal como lo señala Kieran (2006). Por un lado, tenemos las investigaciones sobre la naturaleza del álgebra; algunas centradas en el álgebra como un instrumento de modelización matemática (Chevallard, 1994; Bolea, 2003; García, 2008; Ruíz Munzón, 2010; Gascón, 2011; Fonseca, Gascón y Oliveira Lucas, 2014; Ruíz Munzón, Bosch y Gascón, 2015), otras centradas en el razonamiento algebraico y en la elaboración de un modelo que contemple niveles de algebrización para estudiar la actividad algebraica, tanto en el nivel elemental como en el superior (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2012; Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato, y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Este último grupo de investigaciones han sido desarrollados desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

En relación al desarrollo del razonamiento algebraico, Radford (2012) señala que este no es de ninguna manera natural, sino el producto de una reflexión sofisticada. En esa misma línea, Cai y Knuth (2011) plantean la necesidad de que los maestros compartan una visión ampliada del álgebra a fin de que estén capacitados para transformar las tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización.

De estas investigaciones, conjeturamos que los docentes de matemáticas requieren tener conocimientos sobre el desarrollo del razonamiento algebraico, de modo que puedan identificar los niveles en los que se encuentran sus estudiantes, para luego propiciar que estos evolucionen. De allí nuestro interés, en primer lugar, de evaluar los conocimientos didáctico matemáticos de un grupo de maestros en ejercicio, al analizar respuestas, dadas por estudiantes que finalizaron la educación básica, a tareas que involucran objetos y procesos algebraicos.

■ Marco teórico

Tomamos como base el modelo teórico de razonamiento algebraico elemental (RAE) desarrollado en Godino et al. (2014), según el cual definen niveles primarios de algebrización; es decir, estadios del funcionamiento de conocimientos matemáticos al abordar una situación problema. Esto se hace en base a cuatro criterios: generalización, unitarización, formalización y ostensión, y transformación. Así, aquellas soluciones en las que el estudiante recurra a objetos particulares y en las que, aunque reconozca la relación de un término con el siguiente, no identifique la regla que generaliza dicha relación, serán consideradas de nivel 0. Serán de nivel 1, aquellas en las que intervienen objetos intensivos (generales) que se reconocen explícitamente a través de lenguajes gestual, numérico, natural o icónico, pero no simbólico literal. Una práctica matemática será considerada en un nivel de razonamiento algebraico 2, siempre que la generalización se exprese mediante un lenguaje simbólico, asociada a la información del contexto pero que no se realicen operaciones con dichos símbolos. Finalmente, en un nivel consolidado de algebrización, nivel 3, se consideran aquellas soluciones en las

que intervienen objetos intensivos representados de manera simbólica-literaI y que se realicen operaciones con ellos.

Para el análisis de las respuestas de los docentes, se consideró el trabajo de Godino et al. (2015), en el que se definen categorías para los conocimientos didáctico- matemáticos sobre el RAE de un profesor de matemáticas.

■ Método

Esta investigación sigue los supuestos de la metodología cualitativa investigación-acción ya que se focaliza en el trabajo con profesores en ejercicio, los cuales reflexionan sobre su forma de trabajo, organizados en comunidades de investigadores (Serres, 2007). En una primera etapa, se consideraron actividades de tipo generacional, que resultan del estudio de patrones geométricos, las que fueron aplicadas a estudiantes que habían culminado la educación básica (16 años).

Posteriormente, se seleccionaron respuestas que permitían explorar la adquisición de diferentes niveles o grados de razonamiento algebraico. Dichas soluciones fueron presentadas a doce profesores de educación básica que se encontraban realizando un programa de formación continua, en el que se había estudiado previamente el modelo teórico para el RAE considerado en Godino, et al. (2014). Los docentes desarrollaron un cuestionario que buscaba identificar los conocimientos didáctico- matemáticos que poseían en relación a los objetos matemáticos presentes en el álgebra elemental, así como su capacidad para reconocer rasgos del razonamiento algebraico en las respuestas de los estudiantes. El análisis de las respuestas fue complementado con entrevistas.

■ Resultados

El análisis de las respuestas nos permite concluir que los docentes reconocen cuáles son los objetos matemáticos presentes en prácticas consideradas algebraicas, que pueden desarrollarse en la educación primaria. Señalan, por ejemplo: la búsqueda de patrones en secuencias numéricas o de figuras, las propiedades de las operaciones aritméticas, las ecuaciones, las situaciones de variación en contextos de proporcionalidad, así como las funciones. Sin embargo, la mayoría de los docentes asocia estos temas a determinados niveles de razonamiento algebraico; por ejemplo, consideran que actividades sobre búsqueda de patrones solo permiten explorar razonamientos de nivel 0 o 1, mientras que las ecuaciones y funciones son asociadas a niveles 2 y 3. Es decir, los docentes no reconocen que hay procesos propios de la actividad matemática algebraica, tales como la generalización, unitarización, formalización y ostensión, así como la transformación, que pueden emerger al abordar situaciones sobre los diferentes tópicos señalados. Y que será a partir de la presencia o ausencia de dichos procesos que se podrá asignar un nivel de razonamiento a la solución de un determinado estudiante.

Para propiciar la identificación de dichos rasgos, se presentaron tareas como la mostrada en la figura 1.

A un estudiante se le pidió determinar el número de cuadraditos que formaban las siguientes figuras y, a partir de ello, determinar cuántos se necesitarían para formar las de la posición 5, 8, 30 y n .
La respuesta del estudiante A se muestra a continuación:

¿A qué nivel de razonamiento algebraico asociaría esta solución?

Figura 1. Primera tarea propuesta a los maestros para identificar el nivel de RAE

El estudiante A resolvió otra tarea: determinó el número de segmentos con los que se formaban las figuras. A través de un recuento, el estudiante A reconoció que, de figura en figura, el número de segmentos no se incrementaba de manera constante pero sí respondía a una sucesión de la forma 8, 12 y 16 por lo que el término siguiente debía construirse con 20 segmentos más. El estudiante no necesitó dibujar la figura de la posición 5 para concluir que se requerían 60 segmentos. Sin embargo, no pudo determinar la cantidad correcta de segmentos que generaría la figura 8 (señaló que eran 76), lo que muestra que no identificó la regla que generalizaba dicha relación.

Se esperaba que los maestros reconocieran que, si bien el estudiante A había respondido una pregunta distinta a la que se le había formulado, sí había intentado hallar un patrón aunque sin éxito. Se esperaba también que los maestros argumentaran su respuesta en base a la presencia o no de procesos de generalización, que es uno de los procesos fundamentales en el desarrollo del razonamiento algebraico elemental.

Si bien la mayoría de profesores asignó a esta solución el nivel 0 de algebrización, los argumentos dados se basaron en que el estudiante no *había usado* álgebra y que su solución estuvo centrada en procedimientos aritméticos; en ningún caso se hizo mención a que el estudiante solo operó con objetos particulares y que solo hizo uso de un lenguaje icónico y numérico.

De otro lado, los maestros que sí reconocieron una búsqueda de generalización, asignaron a la solución del estudiante A un nivel intermedio de algebrización, dando como argumento que el estudiante sí había descubierto la regla de formación pero que no había logrado simbolizar la regla

general. Esta afirmación, muestra que dichos maestros no reconocieron que el estudiante solo logró determinar el término inmediato siguiente y que la asignación de 76 segmentos para la figura 8 era incorrecta. El resto de maestros señaló que, dado que el estudiante A había respondido otra pregunta, se le debía asignar el nivel 0. En estas respuestas se evidencia que dichos maestros se centran en la solución ideal, sin preocuparse por identificar los procesos involucrados en la actividad matemática del estudiante.

Otra de las tareas presentada a los maestros se muestra en la figura 2.

A un estudiante se le pidió determinar el número de cuadraditos que formaban las siguientes figuras y, a partir de ello, determinar cuántos se necesitarían para formar las de la posición 5, 8, 30 y n .
La respuesta del estudiante B se muestra a continuación

figura 5 = $5 + 5(4) = 25$ cuadraditos
 figura 8 = $8 + 8(7) = 64$ cuadraditos
 figura 30 = $30 + 30(29) = 900$ cuadraditos.
 $n =$
 $(2n-1) + (2n+1) = 4n$
 ¿A qué nivel de razonamiento algebraico asociaría esta solución?

Figura 2. Segunda tarea propuesta a los maestros para identificar el nivel de RAE

El estudiante B realizó un recuento particular: contó el número de cuadraditos de una fila y le sumó el producto del número de cuadraditos de una fila por la cantidad de filas restantes. Esto lo hizo para las primeras cuatro figuras, pero para las figuras 5, 8 y 30 ya no recurrió nuevamente al recuento; lo que evidencia el reconocimiento explícito de intensivos a través de un lenguaje numérico. Intentó establecer la relación entre un término general y el número de cuadraditos empleando un lenguaje simbólico, aunque sin éxito.

Se esperaba que los maestros reconocieran que el estudiante B había encontrado la regla general (la cantidad de cuadraditos es igual al número de la figura más el producto de dicho número y el predecesor), pero que no logró expresarla adecuadamente de manera simbólica; ello ubicaría la solución en el nivel 1, con algunos rasgos del nivel 2.

La mitad de los docentes reconoció que la estrategia de solución del estudiante B se basó en el recuento de cuadraditos para casos particulares y que luego identificó la regla general. Más aún, señalaron que la expresión simbólica obtenida: $(2n-1)+(2n+1)=4n$, era correcta y ubicaron la solución en el nivel 3, nivel consolidado de algebrización. Dichos maestros no reconocieron que el estudiante no había simbolizado correctamente.

Otro grupo de maestros señaló que, si bien el estudiante B encontró regularidades y estableció relaciones, no logró formalizar adecuadamente la generalización, por lo que le asignaron el nivel 1 de razonamiento algebraico.

Finalmente, un maestro no reconoció el patrón identificado por el estudiante B (para la figura n se requieren $n+(n-1)n$ cuadraditos), solo consideró la respuesta final y señaló que en la generalización el estudiante había considerado que el número de cuadraditos necesario para formar la figura n era n^2 .

■ Consideraciones finales

Los docentes reconocen que la búsqueda de patrones y de relaciones entre variables, así como la manipulación de expresiones algebraicas y la generalización de propiedades de operaciones aritméticas son objetos y procesos matemáticos presentes en la actividad algebraica. Sin embargo, tienen dificultad para analizar las respuestas de los estudiantes desde el modelo RAE. Así por ejemplo, en aquellas respuestas en las que los estudiantes trataron de expresar la regla de formación con símbolos aunque de manera incorrecta, los docentes no reconocieron un proceso de formalización.

La investigación realizada permitió reconocer los conocimientos didáctico- matemáticos que poseían docentes de primaria en relación a los niveles de desarrollo del pensamiento algebraico: los docentes de primaria no están familiarizados con la manipulación de símbolos algebraicos ni con la obtención de una expresión simbólica para el término general de una sucesión. De otro lado, la falta de comprensión del significado de los criterios de generalización, unitarización y formalización no permitió que identificaran en las respuestas de los estudiantes los rasgos de un razonamiento algebraico.

■ Referencias bibliográficas

- Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.
- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Dordrecht: Springer.
- Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis, Université de Turin*, 52(2), 175-208.

- Fonseca, C., Gascón, J., y Oliveira Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 289-318
- García, F. (2008). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007*, 71-92.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, 14(2), 203-231.
- Godino, J., Castro, W., Ake, L. y Wilhelmi, M.R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 26(42B), 483-511.
- Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática* (Vol. XVI, pp. 285-294).
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199–219
- Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.
- Godino, J., Aké, L.P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A.F., Blanco, T., ..., Wilhelmi, M.R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 127-150.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp.11-49), Rotterdam: Sense Publishers.
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117-133.
- Ruíz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Ruíz Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT*, 4(2), 106-131.
- Serres, Y. (2007). Un estudio de la formación profesional de docentes de matemática a través de investigación-acción. *Revista de Pedagogía*, 28(82), 287-310.