Joseph Louis Lagrange & Carl Friedrich Gauss: sobre las formas cuadráticas y determinantes

John Ariza López[72]   Sterling Castañeda Jaimes[73]

Resumen

Se muestran aspectos relevantes al desarrollo histórico de las formas cuadráticas del famoso problema de encontrar todas las soluciones de cualquier ecuacióón indeterminada del segundo grado involucrando dos incóógnitas, donde estas incógnitas pueden asumir tanto valores enteros como racionales. centrándose en los matemáticos: Lagrange y Gauss, sus obras, la realidad social, política de la época y el tratamiento ofrecido concernientes al desarrollo de las formas cuadráticas.

Palabras & frases claves: Epistemología, Historia de las matemáticas, Determinante, Formas cuadráticas .

Introducción

Las formas cuadráticas (llamado en su época teoríia de cuadrados) tiene una larga historia que se remonta a la época de Arquímedes. Este recoge en su obra "Liber Assumptorum"(el libro de lemmas) un problema relacionado con los bueyes, allí plantea una ecuacióón $x^2 = 4729494y^2 + 1$ de la cual no da solución. El avance posterior se dio gracias a matemáticos hindúes (Brahmagupta y Bhaskara) los cuales plantean un método razonado para la solución de esta ecuación, de la cual solo quedo en el olvido. Fue hasta el clásico trabajo de Lagrange el que, aprovechando las contribuciones de Pierre de Fermat y de Euler, aporto uno de los métodos que se aplica en la actualidad, el cual constituye un avance a la teoría de números de la época.
Mas tarde Legendre descubrióó en gran parte por inducción, muchas propiedades elegantes de las formas cuadráticas, seguido de los grandes aportes de Gauss con su obra maestra "Disquisitiones Arithmeticae".

Lagrange

Lagrange en 1773 en su obra Recherches d'Arithmétique, que trata de un extenso libro de memorias sobre los núúmeros que pueden ser representados por la formula $Bt^2 + Ctu + Du^2$.
Lagrange emplea principalmente las funciones de dos indeterminadas x e y de esta forma:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{0.28}$$

[72]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia, e-mail: jairoariza08@gmail.com

[73]Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga - Colombia, e-mail: stercas_10@yahoo.es

donde a, b y c son enteros dados.
Es interesante mostrar que Lagrange determina la expresion $b^2 - ac$ como el residuo cuadráático de un número M, si este número M puede ser representado por la forma cuadráática (a, b, c), de manera que los valores de las indeterminadas son primos entre ellos. Lagrange llama a este residuo el "determinante de la forma (a, b, c)", la cual a lo largo de su trabajo muestra que de la expresión $b^2 - ac$ dependen grandes propiedades de las formas de segundo grado.

Gauss

Gauss en su obra principal "Disquisitiones Arithmeticae"totalmente en latín, establece un tratado de la teoría de números en el que se sintetiza y reúne todo el trabajo ya realizado hasta la época.
En la cuarta seccióón Gauss desarrollo la teoríía de restos cuadrááticos. Aquíí se encuentra la primera demostracióón publicada de la ley de reciprocidad cuadráática. La prueba es una asombrosa aplicacióón de la induccióón matemáática , y una muestra de esa ingeniosa lóógica que se encontrara en otros lugares de su obra. La investigacióón realizada en la quinta seccióón se presenta desde el punto de vista aritmético, la teoría de las formas cuadráticas en general acompañada de una discusión de las formas cuadráticas ternarias.
para las primeras formas citadas el problema general es encontrar la solucióón en núúmeros enteros x, y de la ecuación indeterminada

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = M, \tag{0.29}$$

donde a, b, c, m son núumeros enteros cualesquiera; para la segunda, las soluciones en numeros enteros x, y, de

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dxz + 2eyz + fz^2 = M, \tag{0.30}$$

donde a, b, c, d, e, f, m son números enteros cualesquiera, constituyen el tema de la investigación.

Discusióón

Lo poco que se ha dicho acerca de las formas de segundo grado debe ser considerado solamente como los primeros inicios de la teoría de números. Si bien muchos matemáticos (Euler, Lagrange, Legendre) trabajaron en las formas cuadráticas, solamente lo hicieron partiendo desde casos particulares, con la publicación de la Disquisitiones Arithmeticae fue dada una nueva dirección a la aritmética superior y mas aun a la teoría de números, debido a que dicha teoría en los siglos XVII y XVIII se componía de una serie de resultados específicos y aislados entre si. solo fue hasta la realización de esta obra que Gauss pudo crear una consistencia y formar una base para esta teoría.
La conexióón de Gauss acerca de la teoríía de formas es muy similar a lo trabajado por Lagrange, incluso el quinto capitulo del famoso trabajo realizado por Gauss, el cual concierne a las formas de segundo grado que tiene como titulo "De Formis Qquatinibusque Indeterminantis Secundi Gradus", Gauss realiza su introduccióón al capitulo

con exactamente con las mismas palabras que Lagrange uso para su investigación en su obra Recherches d' Arithmetique.

Referencias

[1] L.Lagrange, *Recherches d'arithmetique*. Nouveaux méémoires de l'Acadéémie royale des sciences et belles-lettres de Berlin . (1773):265-312.

[2] C.Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*. Leipzig (1801):163-190.

[3] T.Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* The Period 1861 to 1880. Macmillan, London. Reprint edition: 1960, Dover, New York. (1771-1830):63-90.