

PANAMÁ 4 DE SEPTIEMBRE DE 2018

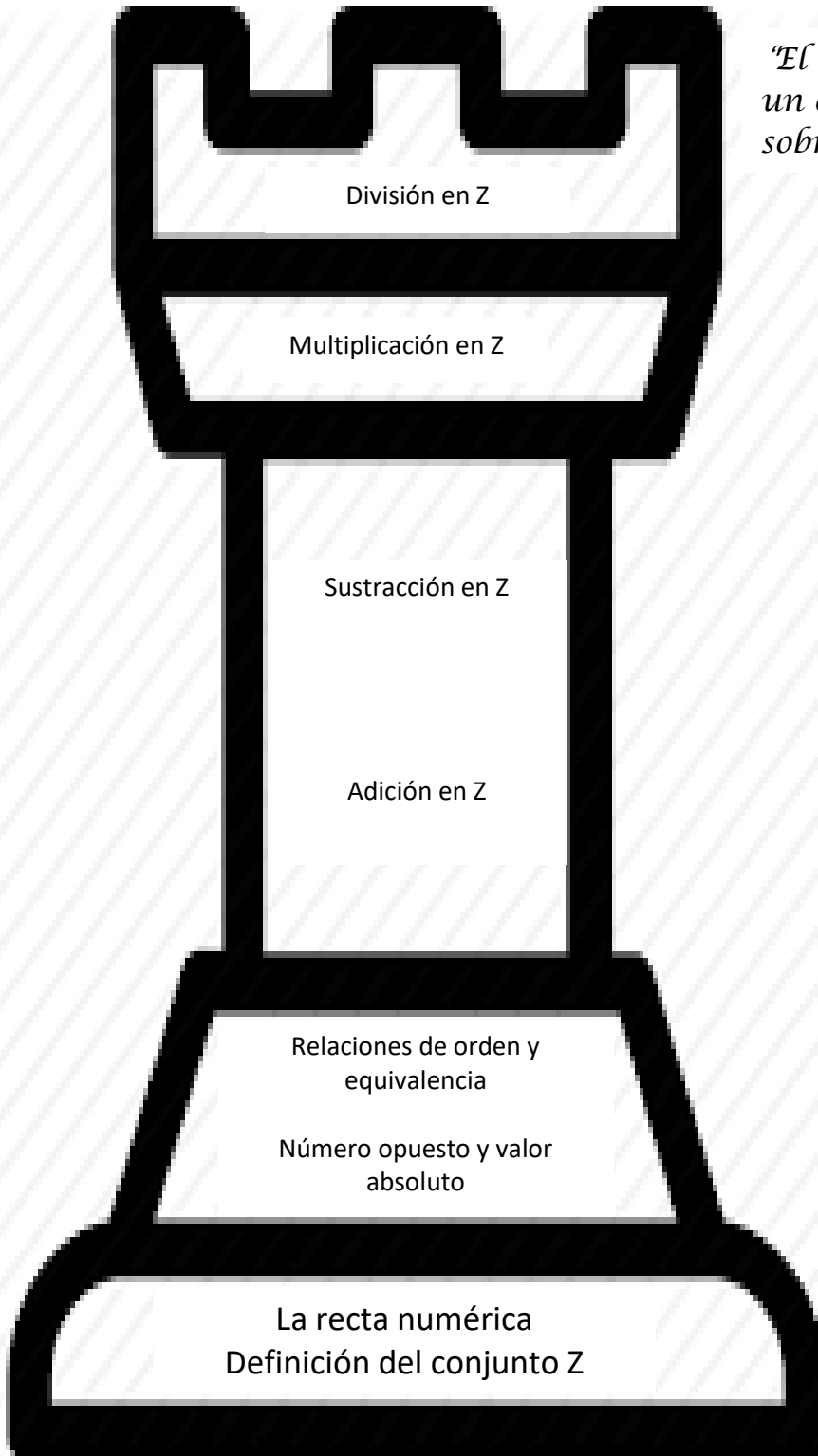
CARLOS BERNAL  
[matematicascb@hotmail.com](mailto:matematicascb@hotmail.com)

## INTRODUCCIÓN

El conjunto de los números enteros se representa por la letra  $Z$  donde:

$$Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Una de las razones de la necesidad de trabajar con estos números es que en  $\mathbf{N}$  no se puede restar (en general). Por consiguiente los números enteros son una generalización del conjunto de números naturales que incluye números negativos (resultados de restar a un número natural otro mayor), incluyendo el cero. Además los números enteros surgen de la necesidad de representar cantidades con relaciones opuestas como el ganar y el perder dinero (ganar B/. 1000 se representa por +100 y a su vez una deuda de B/. 500 por -500). Análogamente representamos con números + y - cantidades opuestas como las temperaturas frías y calientes, altitudes sobre y bajo el nivel del mar, sentidos opuestos como subir y bajar, etc. En fin los números enteros al igual que los signos + y - son tan parte de nuestro entorno que aparecen en las pilas que los discentes colocan en sus juguetes y hasta en los detalles de la factura que nos hace llegar la compañía que nos brinda el servicio eléctrico. Estas y otras situaciones de aplicación se pueden utilizar para motivar el estudio del conjunto numérico. Otras de las bondades del tema son sus conexiones intra-matemáticas y con otras materias; como por ejemplo en los conceptos trigonométricos como los ángulos positivos y negativos, el plano cartesiano para la localización de puntos que no es más que dos rectas numéricas una horizontal y otra vertical que tienen en común la posición cero. Con relación al álgebra existe un paralelo entre las operaciones básicas con números enteros y las operaciones básicas con términos semejantes. En la física se aplican en magnitudes vectoriales como la velocidad y desplazamiento. En la contabilidad se aplican en los conceptos de balance como el de pasivo y activo. La secuencia didáctica pretende que los estudiantes valoren la importancia de este conjunto de números como base fundamental para una comunicación eficaz en los diferentes contextos laborales y profesionales que el hombre ejerce. Sin la existencia estos números; no sabríamos precisar que significaría la expresión  $5^{\circ} C$  ¿es una  $1^{\circ}$  sobre cero? ¿es una  $1^{\circ}$  bajo cero? Pero con la aplicación de los signos + y - podemos precisarlo a través de una escritura simplificada y eficaz.



*“El desarrollo de la matemática es un edificio que se va construyendo sobre las bases anteriores”*

ACTIVIDAD DE AFIANZAMIENTO 1

I- Escriba el número entero que corresponda a cada situación:

- a) Año en que el Señor Jesús \_\_\_\_\_
- b)  $3^{\circ} C$  bajo cero \_\_\_\_\_
- c) Adeudar B/. 3000 \_\_\_\_\_
- d) Trecientos años AC \_\_\_\_\_
- e) Después de 3 horas \_\_\_\_\_
- f) Ganar B/. 50 \_\_\_\_\_
- g) Cinco pasos a la izquierda \_\_\_\_\_
- h) Un pie sobre el nivel del mar \_\_\_\_\_
- i) Setecientos años DC \_\_\_\_\_
- j) Antes de 2 horas \_\_\_\_\_

II- Traduce al lenguaje natural las siguientes expresiones:

- a) Año -100 \_\_\_\_\_
- b) - B/. 500 \_\_\_\_\_
- c)  $+32^{\circ}C$  \_\_\_\_\_
- d) -3 pies nivel del mar \_\_\_\_\_
- e) +8 pasos \_\_\_\_\_
- f) -1 h \_\_\_\_\_
- g) +B/. 350 \_\_\_\_\_
- h) -5 pasos \_\_\_\_\_

III- Escriba el opuesto de cada uno de los siguientes números:

a)  $Op(-10) = \underline{\hspace{2cm}}$

d)  $Op(+40) = \underline{\hspace{2cm}}$

b)  $-(+5) = \underline{\hspace{2cm}}$

e)  $-(32) = \underline{\hspace{2cm}}$

c)  $-(-14) = \underline{\hspace{2cm}}$

IV- Escriba el valor absoluto de cada uno de los siguientes números:

a)  $|-14| = \underline{\hspace{2cm}}$

d)  $|-20| = \underline{\hspace{2cm}}$

b)  $|+33| = \underline{\hspace{2cm}}$

e)  $|+8| = \underline{\hspace{2cm}}$

c)  $|-17| = \underline{\hspace{2cm}}$

V- Compara y utiliza los símbolos ( $<$ ,  $>$ ,  $=$ ) correctamente:

a)  $5 \quad 7$

e)  $|-5| \quad 5$

i)  $op(-7) \quad -(-7)$

b)  $-8 \quad -2$

f)  $op(-9) \quad -3$

j)  $|-18| \quad op(-22)$

c)  $|-16| \quad 10$

g)  $|-30| \quad |30|$

k)  $|-25| \quad -(-25)$

d)  $0 \quad -12$

h)  $6 \quad 0$

l)  $|-14| \quad op(-14)$

VI- Ordenar según la indicación:

**De mayor a menor**  $19, -7, -1, 0, 13, 6$  \_\_\_\_\_

**De menor a mayor**  $-26, -10, 24, 0, 3, -11$  \_\_\_\_\_

### Actividad de afianzamiento 2

I- Escriba tres elementos más en cada una de las siguientes series numéricas:

a) 0, 1, -1, 2, -2, , , , ...

e) 8, 7, 5, 2, -2, , , , ...

b) 6, 4, 2, 0, -2, , , , ...

f) -18, -16, -12, -6, , , , ...

c) 20, 15, 10, 5, 0, , , , ...

g) 10, 7, 1, -8, , , , ...

d) -21, -20, -18, -15, -11, , , , ...

h) 16, 12, 8, 4, 0, , , , ...

II- Problemas interesantes:

a) Pitágoras nació el año 582 a de C y gozó de 75 años de vida. ¿En que año murió?

b) Hace una hora el termómetro en un laboratorio marcaba  $-2^{\circ}\text{C}$  y ahora marca  $2^{\circ}\text{C}$ . La temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?

c) Un buzo que hace trabajos en una obra submarina se encuentra en la plataforma base a 6m sobre el nivel del mar y realiza los desplazamientos siguientes:

- 1) Baja 15 metros para dejar material
- 2) Baja 10 metros más para hacer una soldadura
- 3) Sube 7 metros para reparar una tubería.
- 4) Finalmente, vuelve a subir a la plataforma.

¿Cuántos metros ha subido en su último desplazamiento hasta la plataforma?

d) Se cree que Arquímedes inventó el tornillo. Después de 2146 años se inventó el ordenador, en 1946. ¿En qué año inventó Arquímedes el tornillo?

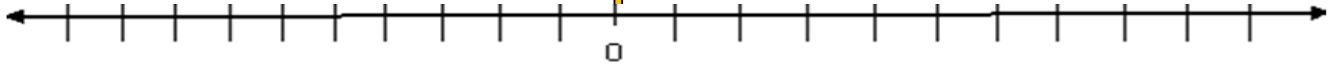
## Saltando sobre la recta numérica



Determinemos la posición final considerando la posición del cero, como nuestra posición de inicio, realizando un salto por cada unidad en el sentido indicado:



Esta paleta de papel con  
diseño de grillo, se utiliza  
para ilustrar la técnica en la  
pizarra.



- a) 3 u a la derecha más 4 u a la derecha ¿posición final? \_\_\_\_\_
- b) 7 u a la derecha más 9 u a la izquierda ¿posición final? \_\_\_\_\_
- c) 5 u a la izquierda más 3 u a la izquierda ¿posición final? \_\_\_\_\_
- d) 6 u a la izquierda más 10 u a la derecha ¿posición final? \_\_\_\_\_
- b) 8 u a la izquierda más 2 u a la derecha ¿posición final? \_\_\_\_\_


## Conclusiones

De las conclusiones se pretende  
determinar la propiedad de los signos  
de la adición de enteros.

Otras alternativas para la enseñanza de la adición:

Ahora representemos una unidad positiva por  $\square = 1$   
Y una unidad negativa por  $\blacksquare = -1$


Luego  $3 + 5 = ?$



¿Cuántos cuadritos blancos hay?

Por lo tanto  $3 + 5 = 8$

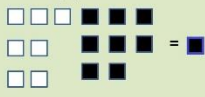
Siguiente ejemplo:  
 $-4 + (-3) = ?$



¿Cuántos cuadritos negros hay?

Por lo tanto  $-4 + (-3) = -7$

Ejemplo nº 3  
 $7 + (-8) = ?$

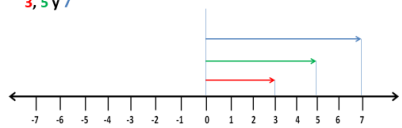


Recuerda que cada cuadro blanco es 1 y cada cuadro negro -1  
Y como  $1 - 1 = 0$  entonces vamos apartando cada pareja de cuadro blanco con negro que podamos formar. La respuesta se obtendrá de la cantidad de cuadros del mismo color que quedaron sin formar pareja.

$7 + (-8) = -1$

¿Podemos representar un número entero gráficamente?

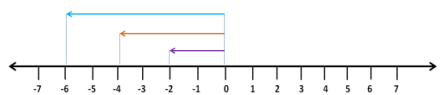
Claro que sí representemos sobre la recta numérica el 3, 5 y 7



Los números positivos se orientan hacia la derecha

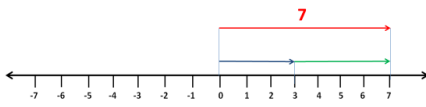
Análogamente los números negativos se orientan hacia la izquierda

Por ejemplo -2, -4, -6



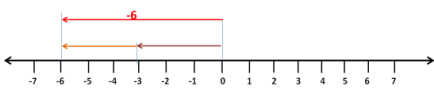
Ahora ¿podemos representar gráficamente la adición  $3 + 4$ ?

Claro que sí



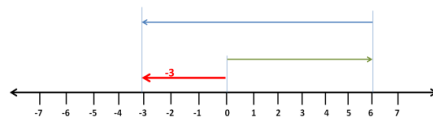
Como vez  $3 + 4 = 7$

Ahora representemos gráficamente  $-3 + (-3)$



Como vez  $-3 + (-3) = -6$

¿Cómo se podría representar  $6 + (-9)$ ?



Como vez  $6 + (-9) = -3$



ACTIVIDAD DE AFIANZAMIENTO 3

I- Resuelve:

a)  $9 + 7 =$

h)  $-30 + 36 =$

n)  $7 + 14 - 5 - 15 =$

b)  $15 - 14 =$

i)  $-40 + 25 =$

ñ)  $15 - 9 + 6 - 18 =$

c)  $13 - 16 =$

j)  $55 - 46 =$

o)  $20 - 9 - 10 - 7 =$

d)  $18 + (-22) =$

k)  $62 - 70 =$

p)  $-100 + 30 + 50 + 40 =$

e)  $-6 - 6 =$

l)  $56 + (-40) =$

q)  $25 - 60 + 13 + 27 =$

f)  $-7 + (-5) =$

ll)  $44 + (-54) =$

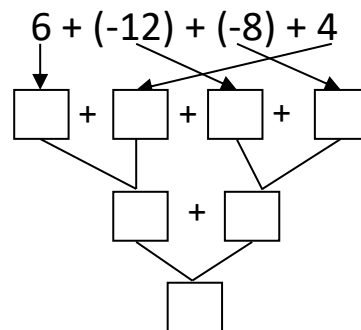
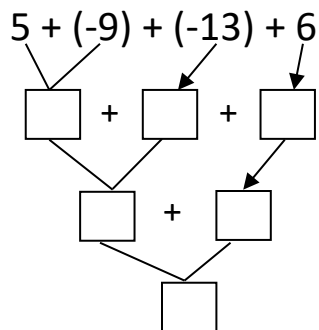
r)  $-14 + 68 - 20 - 43 =$

g)  $9a + 10a + 12a =$

m)  $-60d - 35d + 21d + 18d =$

s)  $8m + 2n + 6m + 7n =$

II- Siguiendo indicaciones escribe en cada cuadro el número que corresponda:



III- Completa la siguiente información

✓ Si me dan 6 y me dan 7, gano 13  $\rightarrow 6 + 7 =$  \_\_\_\_\_

✓ Si me dan 3 y me quitan 8, pierdo \_\_\_\_\_  $\rightarrow 3 - 8 =$  \_\_\_\_\_

✓ Si me quitan 4 y me dan 6, \_\_\_\_\_  $\rightarrow$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

✓ Si me quitan 5 y me quitan 4, \_\_\_\_\_  $\rightarrow$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

IV- Resuelve eliminando paréntesis aplicando número opuesto:

a)  $(+9) - (+15)$

d)  $-(+15) - (+30)$

b)  $(+16) - (-14)$

e)  $+(-11) + (+18)$

c)  $(-18) - (-20)$

f)  $400 - (190 + 250 - 10)$

g)  $-(20 + 5 - 13) + (-17 + 9 - 12)$

V- Problema interesante:

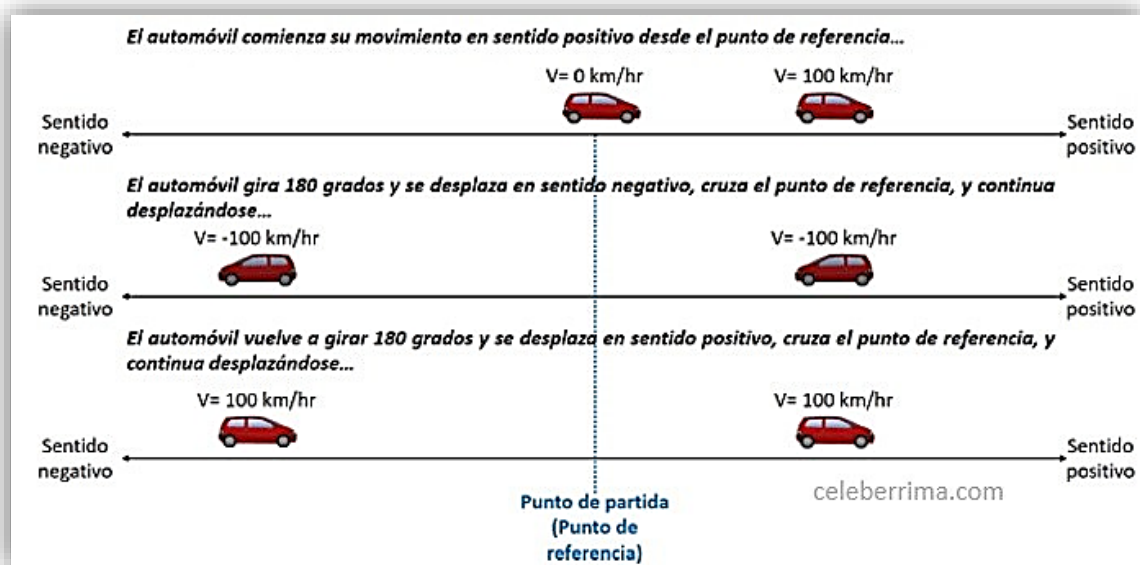
El nivel del agua de una presa ha disminuido 8 cm diarios durante 6 días. A causa de las intensas lluvias caídas los 3 días siguientes ha subido el nivel 7 cm diarios. ¿Cuál ha sido el desnivel total del agua de la presa?

Para la siguiente actividad, aplicamos los siguientes conceptos físicos:

### Qué significa una velocidad negativa

Si una partícula se desplaza en una trayectoria se considera este movimiento en uno u otro de dos sentidos. Uno de los sentidos se considera positivo y el otro negativo. El signo de la **velocidad** indica el sentido en el que desplaza una partícula según un **eje de referencia**.

Si el **signo de la velocidad es positivo**, el desplazamiento es en el sentido creciente o positivo; y si el **signo de la velocidad es negativo**, el desplazamiento es en el sentido decreciente o negativo. Por **ejemplo**, consideremos un automóvil que se desplaza en línea recta, y el punto de referencia es su **posición inicial**. El automóvil tendrá una velocidad positiva conforme se aleja del punto de partida. Pero si en algún momento comienza a acercarse al punto de partida, entonces, el automóvil tendrá una velocidad negativa.



<https://www.celeberrima.com/que-significa-una-velocidad-negativa/>

En aquellos casos en los que la posición inicial es cero ( $x_0 = 0$ ), la **distancia recorrida** y la **posición coinciden**, y su valor es:

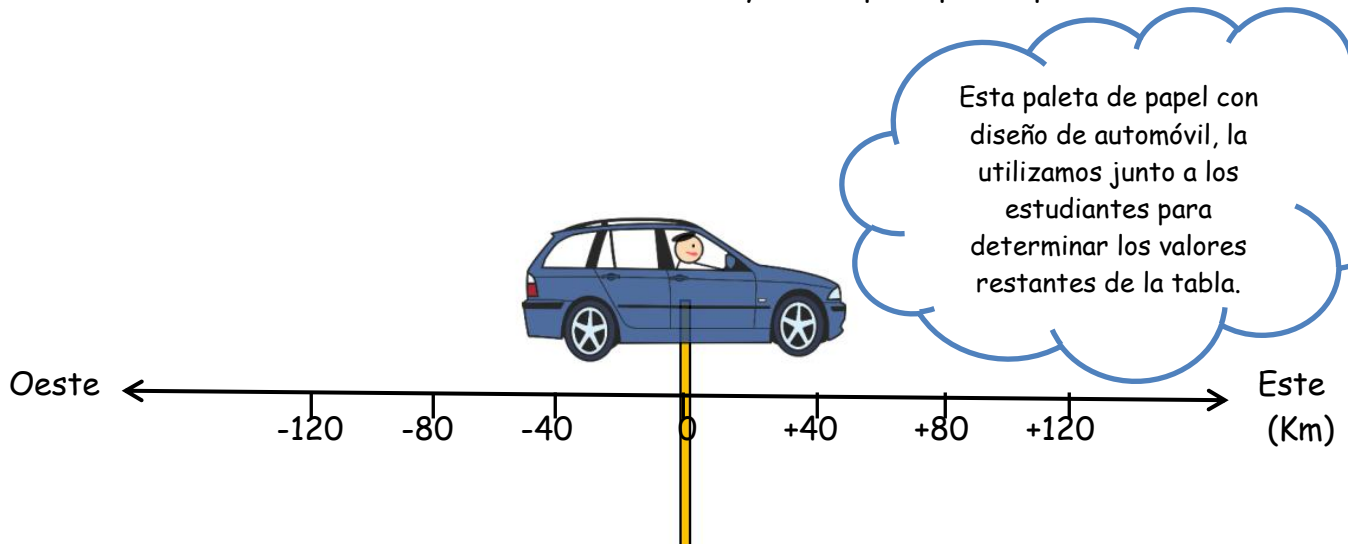
$$s = v \cdot t$$

<https://www.fisicalab.com/apartado/mru#contenidos>

# Desplazándose

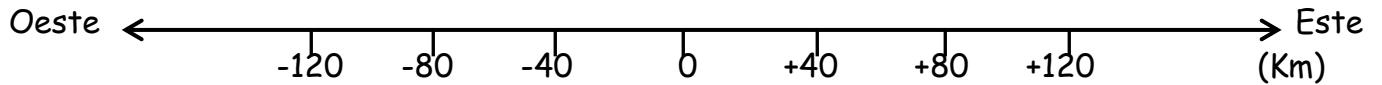
Consideremos las siguientes situaciones:

A- Un auto se mueve del oeste al este a 40 Km/h y ahora pasa por el punto cero.



Tiempo	¿Dónde está el auto?	Velocidad por tiempo = Posición
Ahora ( )	_____ ( )	(+40) ( ) = ( )
Después de 1 hora ( )	_____ ( )	(+40) ( ) = ( )
Después de 2 horas ( )	_____ ( )	(+40) ( ) = ( )
Ante de 1 hora ( )	_____ ( )	(+40) ( ) = ( )
Ante de 2 horas ( )	_____ ( )	(+40) ( ) = ( )

B- El auto se mueve del este al oeste a 40 Km/h y ahora pasa por el punto cero.



Tiempo	¿Dónde está el auto?	Velocidad por tiempo = Posición
Ahora ( )	_____ ( )	$(-40)( ) = ( )$
Después de 1 hora ( )	_____ ( )	$(-40)( ) = ( )$
Después de 2 horas ( )	_____ ( )	$(-40)( ) = ( )$
Ante de 1 hora ( )	_____ ( )	$(-40)( ) = ( )$
Ante de 2 horas ( )	_____ ( )	$(-40)( ) = ( )$

Conclusión

En la conclusión se pretende determinar la ley de los signos.

### ACTIVIDAD DE AFINZAMIENTO 4

I- Resuelva aplicando la ley de los signos:

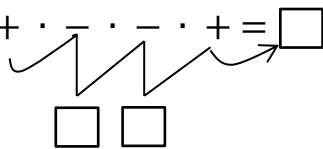
a)  $+$  ·  $+$  =

b)  $+$  ·  $-$  =

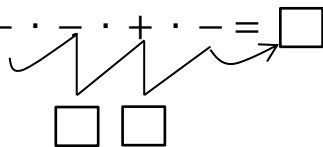
c)  $-$  ·  $+$  =

d)  $-$  ·  $-$  =

e)  $+$  ·  $-$  ·  $-$  ·  $+$  =



f)  $-$  ·  $-$  ·  $+$  ·  $-$  =



II- Resuelva las siguientes operaciones:

a.  $(+2)(+5) =$

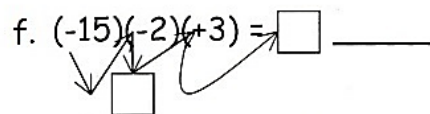
b.  $(-3)(+4) =$

c.  $(-6)(-7) =$

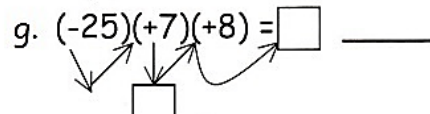
d.  $(+2)(-10) =$

e.  $(-9)(+9) =$

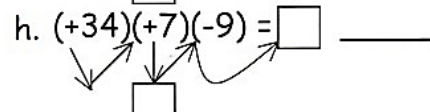
f.  $(-15)(-2)(+3) =$   \_\_\_\_\_



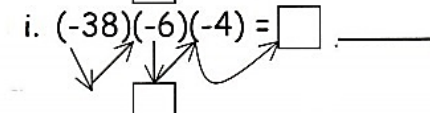
g.  $(-25)(+7)(+8) =$   \_\_\_\_\_



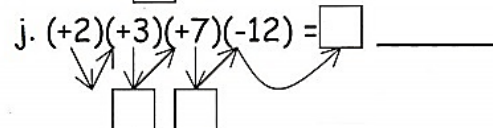
h.  $(+34)(+7)(-9) =$   \_\_\_\_\_



i.  $(-38)(-6)(-4) =$   \_\_\_\_\_



j.  $(+2)(+3)(+7)(-12) =$   \_\_\_\_\_



k)  $(52 - 81) \cdot (-326)$

m)  $-(35 - 42) + [(-7) \cdot (-3)]$

l)  $(-3) \cdot (-18 + 23) \cdot (-1 - 2)$

n)  $(100 - 80 - 45) \cdot [(-2) \cdot 3]$

ll)  $(36 + 5 - 50) \cdot [-14 - (-16)]$

ñ)  $[40 - (25+9)] \cdot (100 - 46 - 64)$

III- Problema interesante:

Una máquina de hacer pozos perfora 15 m al día. Si ha tardado 8 días en perforar un pozo de petróleo, ¿qué profundidad tiene el pozo?

## División en Z

Entre la división y la multiplicación de números naturales existe la siguiente relación:

$$6 \div 2 = 3 \quad \text{si y solo si} \quad 2 \times 3 = 6$$

$$40 \div 5 = 8 \quad \text{si y solo si} \quad 5 \times 8 = 40$$

$$63 \div 7 = 9 \quad \text{si y solo si} \quad 7 \times 9 = 63$$

En general  $a \div b = c$  si y solo si  $b \times c = a$

Entre la división y la multiplicación de números enteros existe la misma relación.

Completa la siguiente información:

$$(+12) \div (+4) = ( \quad ) \quad \text{si y solo si} \quad (+4)( \quad ) = (+12)$$

$$(+15) \div (-3) = ( \quad ) \quad \text{si y solo si} \quad (-3)( \quad ) = (+15)$$

$$(-28) \div (+7) = ( \quad ) \quad \text{si y solo si} \quad (+7)( \quad ) = (-28)$$

$$(-30) \div (-6) = ( \quad ) \quad \text{si y solo si} \quad (-6)( \quad ) = (-30)$$

### Conclusiones

+	Entre	+	
+	Entre	-	
-	Entre	+	
-	Entre	-	



### ACTIVIDAD DE AFIANZAMIENTO 5

I- Resuelva las siguientes operaciones:

a. $(+10) \div (+2) =$	g. $[(47) \cdot (-9)] - [(-486) \div 18]$
b. $(+35) \div (-7) =$	
c. $(-49) \div (-7) =$	h. $-[-(+40) - (-35)] \cdot [90 - 45 + 30 - 100]$
d. $(-90) \div (+10) =$	
e. $[-(+100) + (-140)] \div [50 - 38 - 14]$	i. $[300 - 150 + 120 - 230] \cdot [(-2\ 940) \div 12]$
f. $[(378) \cdot (-12)] \div [6 - (-8)]$	j. $[(-1\ 920) \cdot (-4)] \div [-70 - (-40)]$

II- Problemas interesantes:

g) Una persona compró 3 550 naranjas, 2 456 mandarinas, 5 470 limones y 2 795 toronjas. ¿Cuántas frutas compró la persona cuántas le faltan por comprar si desea adquirir 18 000 frutas?

h) Una mueblería vende 15 estufas a B/. 184, 23 lavadoras a B/. 372 y 37 neveras a B/. 468. ¿Cuál es la venta total de la mueblería?

i) Dos pintores ganan 448 balboas, si uno trabajó 9 días y el otro 7, ¿Cuánto recibió cada uno si ganan lo mismo por día?

## Referencias:

AULA ABIERTA DE MATEMÁTICAS. Disponible en <https://matematicasiesoja.wordpress.com/>

BERNAL, C. *Unidad didáctica Introducción a los Números enteros*. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1791/>

CURRÍCULUMENLÍNEA. Ministerio de Educación Gobierno de Chile. Disponible en <https://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-channel.html>

KHAN ACADEMY. Disponible en <https://es.khanacademy.org/>

ROS, M. y DE LA MATA P. (1988). *Base 7 Matemáticas*. Madrid: Bruño.

IMAGEN GRILLO. Disponible en <https://cdn5.dibujos.net/dibujos/pintados/201803/grillo-feliz-animales-insectos-11254961.jpg>

IMAGEN AUTO. Disponible en [https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/02/10/14/car-303174\\_960\\_720.png](https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/02/10/14/car-303174_960_720.png)