suma+ 82
Secciones
Julio 2016
pp. 91-107

# Me quiere, no me quiere

## La ecuación de una flor

José Luis Muñoz Casado



Durante varios años he tenido la suerte de trabajar con Antonio Pérez Sanz en el IES Salvador Dalí, un maestro al que siempre merece la pena escuchar y del cual aprendí y aprendo mucho en esto de enseñar matemáticas.

Allá por el año 2006 Antonio trabajó con sus alumnos en una ecuación muy particular $r=a+b\cos(k\theta)$. Ecuación escrita en coordenadas polares y que representa a una familia de curvas llamadas *Concoides de Rosetón*.

Al hilo de la forma polar de un número complejo que vemos en bachillerato esta curva se presta mucho a la investigación, a tocar y a descubrir regularidades. Y no solo por nuestros alumnos. Muchos de nosotros quizás nos preguntemos: ¿Cómo será la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva? ¿Qué curva tendrá la derivada ? ¿Será otra flor? ¿Cual será su área? ¿Cual será su longitud?

Como dice el poeta Jesús Lizano en su poesía *Las personas curvas:*

A mí me gustan las personas curvas,
las ideas curvas,
los caminos curvos,
porque el mundo es curvo,
y la tierra es curva
y el movimiento es curvo.
[...]



Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2016 y aceptado en mayo de 2016

## Coordenadas polares en GeoGebra

Quizás no sea necesario pero nunca viene mal recordar esos apuntes amarillentos de la facultad donde estaban las coordenadas polares y cómo trabajar con ellas.

En el plano existen diferentes sistemas de referencia para identificar un punto. Un sistema de referencia está formado por un punto que llamaremos origen y un sistema de coordenadas que nos permite identificar ese punto con respecto a nuestro origen.

### *El plano polar*

Generalmente en el plano trabajamos con coordenadas cartesianas en un sistema de referencia definido por $\{O:(\vec{u},\vec{v})\}$ (figura 1). $O$ es un punto del plano y $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores con direcciones distintas.

Dependiendo de la elección tendremos un sistema u otro. De todos es conocido el sistema $\{(0,0):\vec{u}=(1,0),\ \vec{v}=(0,1)\}$ llamado *sistema ortonormal.*

Este sistema es especialmente ventajoso para describir muchas curvas en el plano y nos sirve para relacionar las curvas con álgebra. Así pues de esta forma es muy fácil expresar la ecuación de, por ejemplo, una circunferencia de centro el origen y radio $r$: $x^2+y^2=r^2$.

Pero no es la única forma de poder representar un punto en el plano. Usando $\{O:\{r,\theta\}\}$ donde $|r|$ es la distancia de un punto cualquiera al origen y $\theta$ el ángulo de inclinación con respecto a una semirrecta que parte del origen $O$, que llamaremos eje polar medido en el sentido contrario a las agujas del reloj (figura 2).

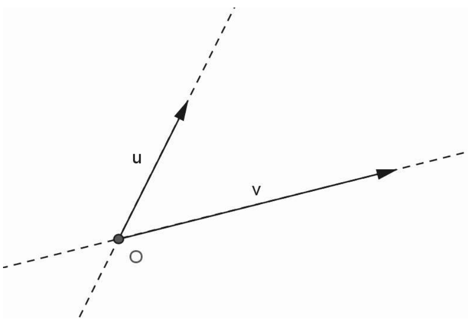


Figura 1. Sistema de referencia

Conviene puntualizar algunos ajustes necesarios para la correcta comprensión de esta nueva forma de identificar puntos en el plano.

- El origen no tiene coordenadas polares.
- Pueden aparecer coordenadas donde $r<0$, por ejemplo para $\theta=3\pi/4$ el valor de $r$ es $-\sqrt{2}/2$. Por tanto, hay que señalar que los pares $(r,\theta)$ y $(-r,\theta+\pi)$ representan el mismo punto.

La relación entre ambos sistemas es la siguiente:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{x}{y} \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

GeoGebra permite trabajar con ambos sistemas de referencia.

Para introducir un punto en coordenadas polares simplemente tendremos que escribir en la barra de entrada con el formato $(r;\theta)$ por ejemplo, **(4; 30°)** (figuras 2 y 3).

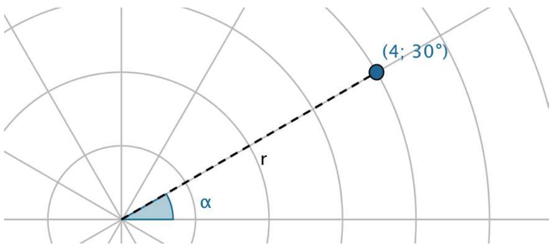


Figura 2. Coordenadas polares

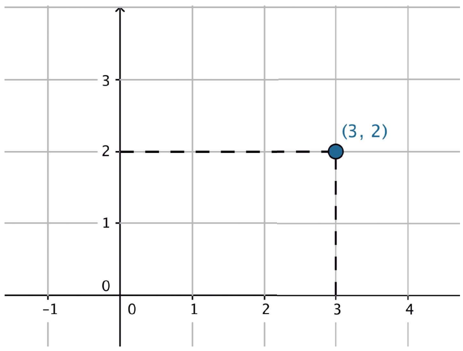


Figura 3. Coordenadas cartesianas

Con esta sencilla introducción y con la ayuda de un deslizador de tipo ángulo podemos describir muchas curvas.

## Guía de construcción

- Creamos un deslizador de tipo ángulo. Valor mínimo 1°, valor máximo 360° e incremento 1°.
- Escribimos en la barra de entrada: (1; α).
- Activamos el rastro del punto A.
- Animamos el deslizador.

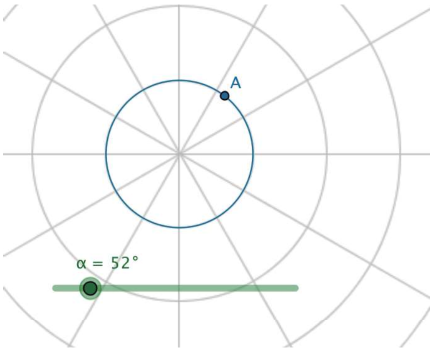



Figura 4

Con esta técnica *dibujamos* la curva. Recordando algunas curvas…

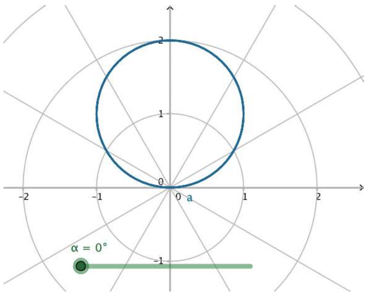



Figura 5. Circunferencia $r=2\,\mathrm{sen}(\alpha)$
[Barra de entrada: (2 sen(α); α)]

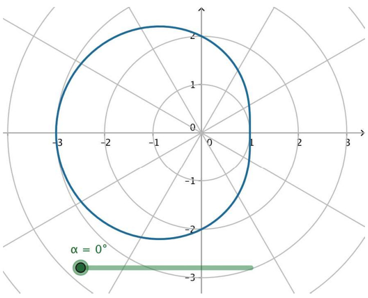



Figura 6. Limaçon de Pascal $r=a+b\cos(\alpha)$, para $a=-2$, $b=-1$
[Barra de entrada: ($a+b\cos(\alpha)$; α)]

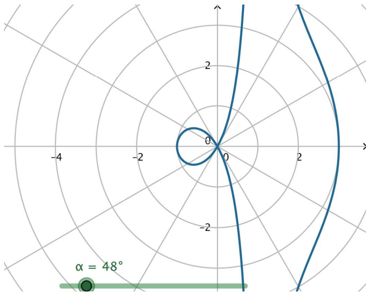



Figura 7. Concoide de Nicomedes $r=\dfrac{a}{\cos(\alpha)}+b$, $a=1$, $b=2$
[Barra de entrada: $(\dfrac{a}{\cos(\alpha)}+2;\alpha)$ ]

### *Visor de coordenadas polares*

Pero quizás queramos conservar la curva, pues hasta ahora lo único que hemos hecho ha sido mover un punto y dejar su rastro. Veamos la técnica. GeoGebra no cuenta con una herramienta específica para representar curvas en coordenadas polares.

Usaremos el comando: Curva[<Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]

Realmente lo que haremos será escribir la curva $r=\rho(\theta)$ en su forma paramétrica:

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos(\theta) \\ y=\rho(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

## Guía de construcción

- Escribimos f(t)= 2 cos(t)en la barra de entrada (cualquier expresión en t es válida). A continuación ocultamos la función.
- Añadimos una casilla de entrada con el botón a = 1. En objeto vinculado seleccionaremos la función que hemos creado antes. Y en rótulo podemos poner ρ(t)= (figura 8).
- Escribimos en la barra de entrada: p=1 y q=1. Serán los extremos de nuestro intervalo.
- Añadimos dos casillas de entrada, una asociada al valor p y otra al valor q. En rótulo


Figura 8

escribimos t_{min} para p y t_{máx} para q. Por defecto, las casillas aparecen con un tamaño de 20 caracteres, podemos cambiarlo en la pestaña estilo de las propiedades de la casilla de control.

- Añadimos un pequeño texto después de la casilla de control con el texto π (figura 9).
- Ya estamos preparados para crear nuestro visor de curvas polares.
- Escribimos en la barra de entrada: Curva[f(t) cos(t), f(t) sen(t), t, p pi, q pi ].

Con estos sencillos pasos, ahora nos aparecerá la curva como tal. Es más, podemos cambiar de curva sin tener que volver a escribir todo, simplemente poniendo nuestra expresión en la casilla de entrada ρ(t)=.

Jugando otro poco podemos añadir un punto en nuestra curva escribiendo en la barra de entrada Punto[c]. Esta simple construcción nos permitirá ver, experimentar y descubrir curvas en coordenadas polares.

Mejorando la construcción para intentar facilitar al alumno su uso podemos llegar a conseguir la siguiente configuración. En *GeoGebraTube*, dentro de mi perfil, puedes encontrar el fichero (figura 10).

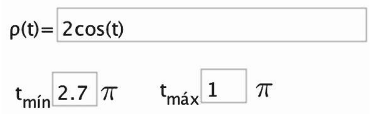



Figura 9

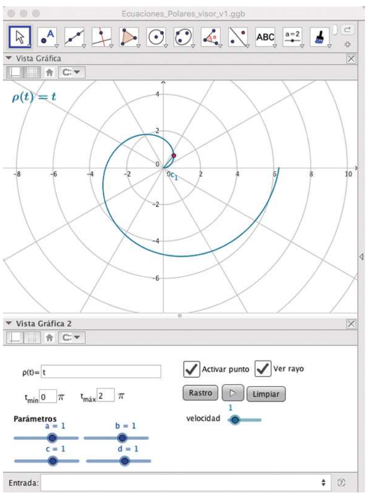



Figura 10. Visor ampliado (disponible en GeoGebraTube)



## Actividades

- ¿Qué curva sale con la función $\rho = k$, con $k \in \mathbb{R}^+$?
- ¿Cómo influyen los valores de $t_{mín}$ y $t_{máx}$? ¿Qué sucede si $t_{máx} > 2\pi$?
- ¿Qué ecuación pondrías para centrar una circunferencia de radio 1 en (1,0), (–1,0) y en (0,–1)?
- ¿Qué sucederá si en la casilla de entrada pongo una función lineal, por ejemplo, $t$? ¿Tiene nombre esa curva? Fíjate en la amplitud entre las vueltas (quizás necesites poner más de una vuelta en $t_{máx}$).
- Experimenta con las expresiones algebraicas de funciones que ya conoces: $a \cdot t + g$, $a \cdot t^2$, $1/t$, $\sqrt{t}, \ldots$
- Representa las siguientes curvas:

$$\rho(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$
$$\rho(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{4}\right)$$
$$\rho(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$
$$\rho(t) = \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}^3\left(\frac{5t}{2}\right)$$
$$\rho(t) = t\operatorname{sen}(t)$$
$$\rho(t) = 1 + 4\cos(t)$$

De todas las curvas que podemos dibujar nosotros nos vamos a fijar en una.

## La ecuación $\rho(\alpha) = a + b\cos(k\alpha)$

Una vez familiarizado con la representación de curvas dadas en su expresión polar, podemos centrarnos en un clase particular de curvas. Con las guías de construcción anteriores tenemos nuestro visor de polares que nos permitirá investigar sobre esta ecuación.

Escribamos en nuestra casilla de control ρ(t)= la expresión a + b cos(k t) y ajustamos $t_{mín}$=0 y $t_{máx}$= 2.

Ahora es cuando nos dedicamos a jugar con los valores de los parámetros. Para que el juego sea divertido conviene llevar un orden, por ejemplo, fijemos los parámetros b y k a uno y movamos solamente el parámetro a. Y dentro de los valores de a conviene observar los siguientes intervalos: $(-\infty,-1)$, $[-1,0)$, $[0,1)$ y $[1,\infty)$. En cada uno de ellos la función muestra una curva diferente (figuras de la 11 a la 14).

Realizamos el mismo estudio con el parámetro b. Fijamos a=1 y k=1 (figuras de la 15 a la 18).

Ahora el parámetro variable es k y fijamos a=1, b=1. La primera diferencia que observamos es que aquí sí influye si $k$ es un número racional o no. Exploremos primero con $k$ un número entero (figuras 19 y 20).

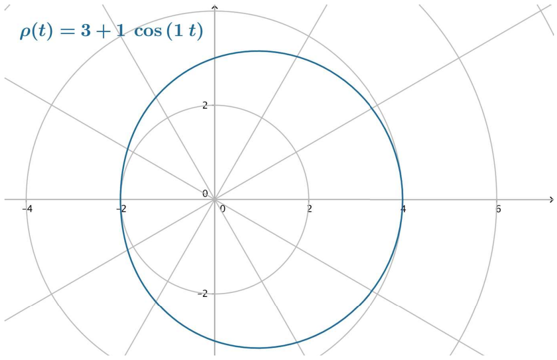



Figura 14. $a \in [1,\infty)$

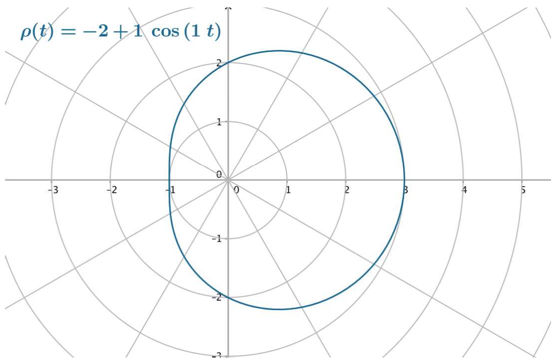



Figura 11. $a \in (-\infty,-1)$

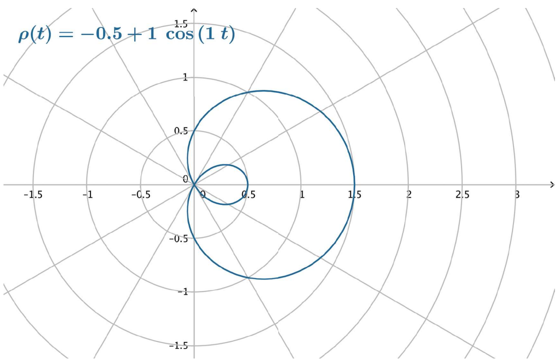



Figura 12. $a \in [-1,0)$

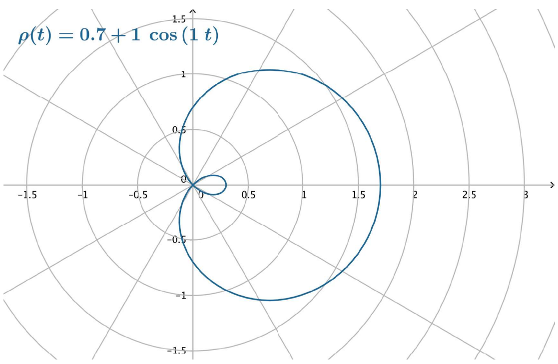



Figura 13. $a \in [0,1)$

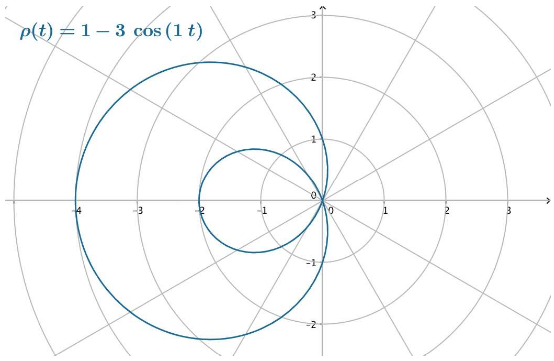



Figura 15. $b \in (-\infty,-1)$

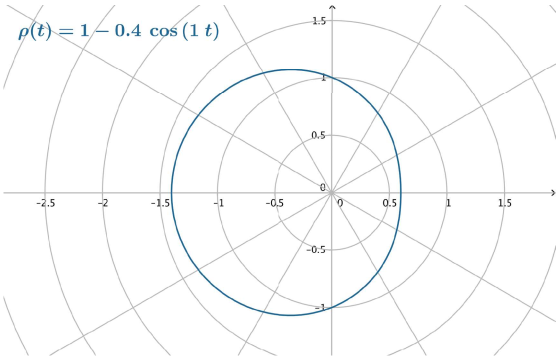



Figura 16. $b \in [-1,0)$

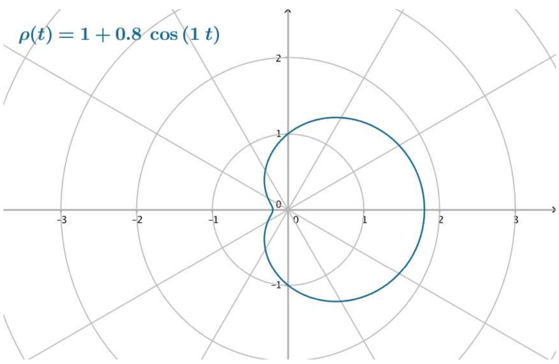



Figura 17. $b \in [0,1)$

Con una simple observación vemos que el número de pétalos de nuestra flor lo determina el parámetro $k$, siendo $a$, $b$ y $k$ un valor entero donde $t \in [0, 2\pi]$.

Si activamos en nuestro visor el punto P, el rayo y el rastro podemos colorear nuestra flor (figura 21).

La interpretación de $a$ y $b$ cambia cuando consideramos $k > 1$. Además la relación entre ambos parámetros también influirá en la curva. Consideremos tres posibilidades: $0 < a = b$, $0 < a < b$ y $0 < b < a$.

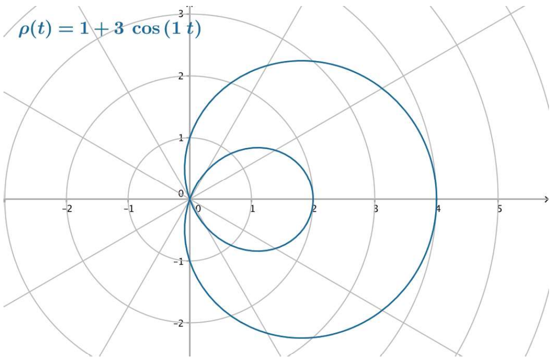



Figura 18. $b \in [1, \infty)$

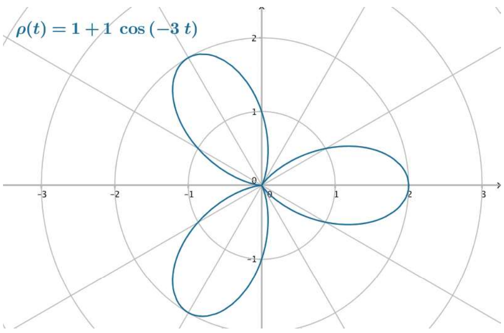



Figura 19. $k = -3$

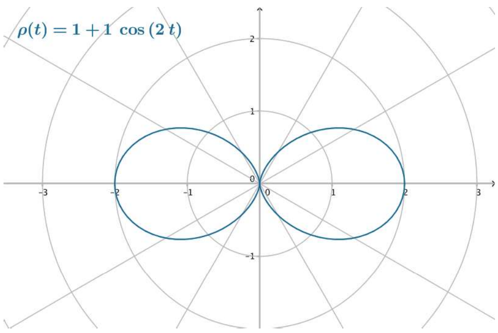



Figura 20. $k = 2$

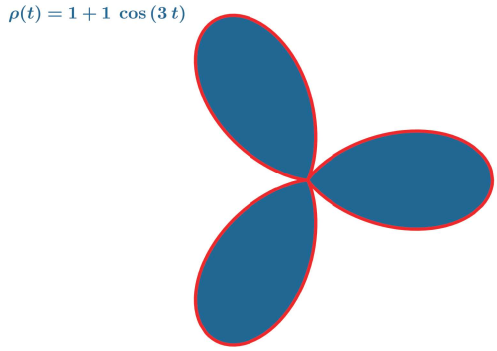



Figura 21. Flor de tres pétalos con el rastro activado

## a = b

$k$ ($k$ entero mayor que uno) marca el número de pétalos de nuestra flor. Estudiemos cómo se comportan $a$ y $b$ en el caso de $k > 1$. En principio consideraremos que a y b son números enteros.

Observamos que simplemente cambia el tamaño de la flor (figuras 22, 23 y 24).

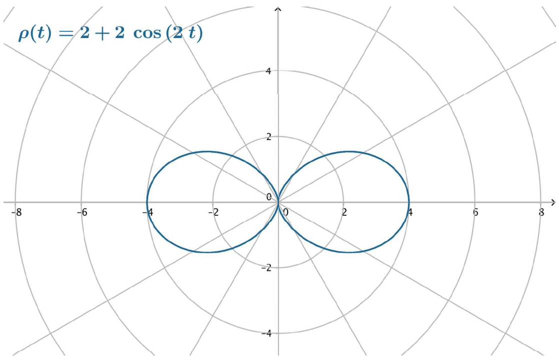



Figura 22

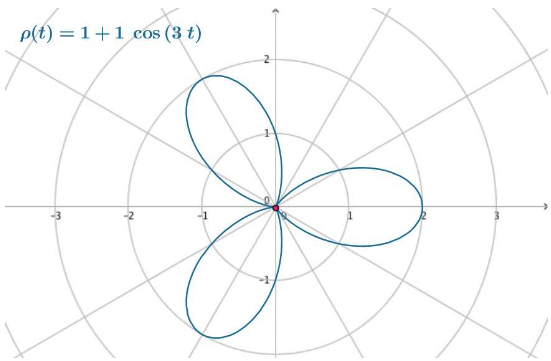



Figura 23

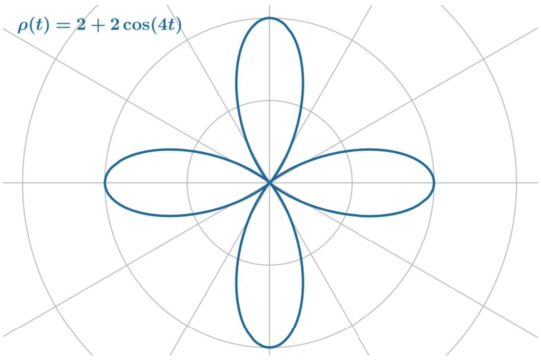



Figura 24

## a < b

En general cuando $a < b$ la curva presenta dos conjuntos de pétalos, unos grandes y otros pequeños. Observando la gráfica vemos que los pétalos pequeños tienen longitud $b - a$ y los pétalos grandes $b + a$. El número de pétalos coincide con el valor de $k$.

Con nuestro visor también podemos ver cómo influye el valor de $a$ en nuestra curva.

Y aún hay más, porque vemos que cuando $k$ es par los pétalos pequeños están entre los pétalos grandes y cuando $k$ es impar los pétalos pequeños están dentro de los grandes (figuras 25 y 26).

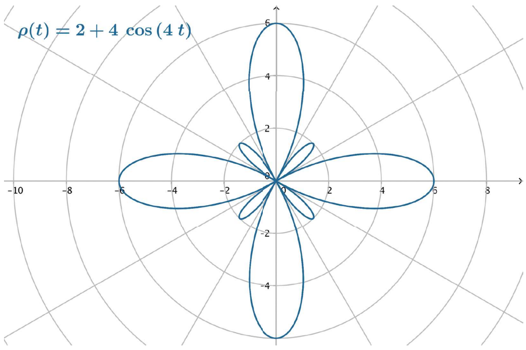



Figura 25

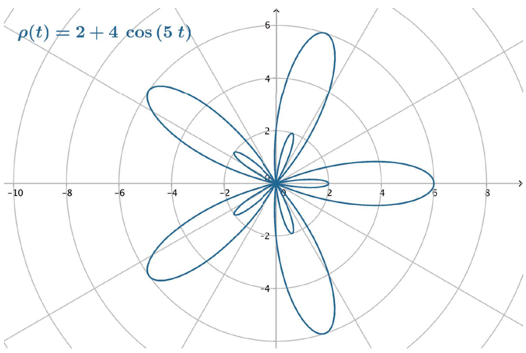



Figura 26

## a > b

Cuando exploramos este caso se observa que los pétalos no pasan por el origen.

Un poco más de observación nos muestra que la parte más alejada de la función será $a + b$ y la más cercana será $a - b$ .

Fijado el valor de a podemos mover el deslizador b. Descubrimos que el parámetro b controla la abertura de los pétalos (figuras de la 27 a la 30).

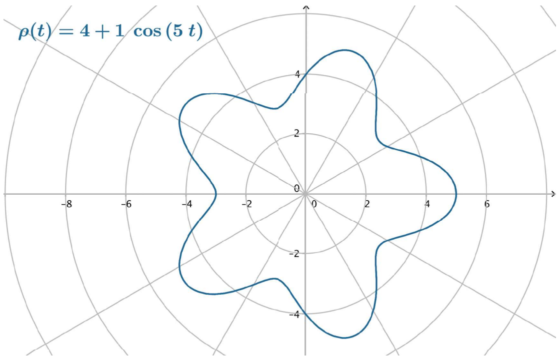



Figura 27

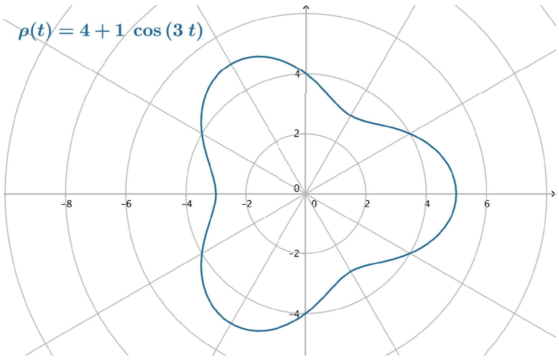



Figura 28

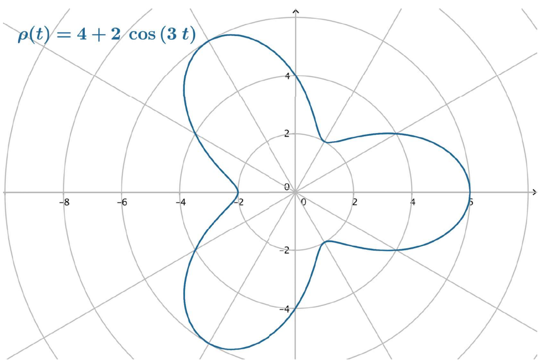



Figura 29

Hasta ahora el valor de $k$ ha sido un entero positivo, ¿Qué sucederá si $k$ no es entero? ¿Y si $k$ se encuentra entre 0 y 1?

Una simple exploración nos muestra que entre 0 y 1 nuestra flor no se cierra (figura 31). Tomemos por ejemplo

$$\rho(t) = 2 + 2\cos\left(\frac{11}{5}t\right)$$

Con $k \in \mathbb{Q}$ necesitaremos dar más de una vuelta para cerrar nuestros pétalos ya que $\rho(0) \neq \rho(2\pi)$. El número de vueltas que necesitaríamos lo determina, claro está, $k$. Supongamos $k = p/q$ con mcd$(p, q) = 1$. Si representamos la curva en un intervalo $[0, t_1]$

$$\rho(0) = \rho(t_1) \Rightarrow a + b = a + b\cos\left(\frac{pt_1}{q}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{pt_1}{q}\right) = 1 \Rightarrow pt_1 = 2\pi q$$

Observamos entonces que nuestra flor tendrá $p$ pétalos y necesitaremos el intervalo $[0, 2q\pi]$ para representar la curva entera.

En nuestro ejemplo, cambiando $t_{mín} = 0$ y $t_{máx} = 10$ nuestra flor tendrá 11 pétalos (figura 32).

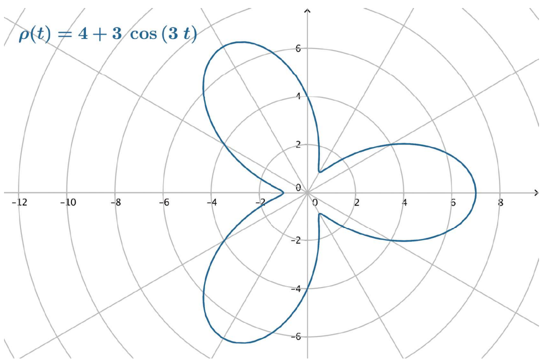



Figura 30

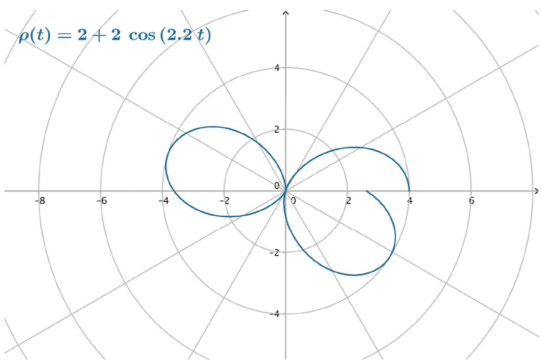



Figura 31

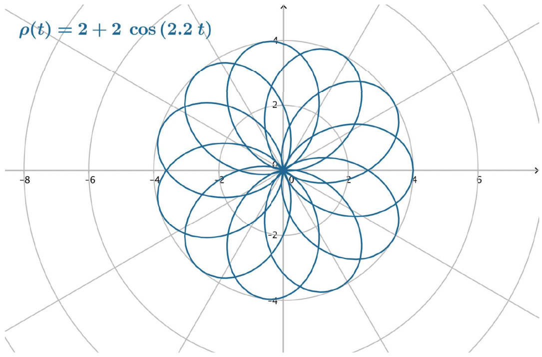



Figura 32

## Análisis

Desde un punto de vista analítico también son un buen ejemplo para practicar con ellas. Tomemos por ejemplo la flor $\rho(t) = 2 + 4\cos(3t)$ cuya representación en $[0, 2\pi]$ se ve en la figura 33.

### *Crecimiento y decrecimiento*

Cuando hemos analizado cómo afectan los parámetros $a$ y $b$ en la generación de la curva mencionamos que el tamaño de los pétalos pequeños era $b - a$ y el de los grandes $b + a$ cuando $a < b$ y $a - b$ y $b + a$ cuando $a > b$. Es fácil comprobar analíticamente esa afirmación.

Puesto que $r = \rho(t)$ es la distancia de un punto $P$ de la curva al origen, podemos estudiar esa función y ver cómo varía la distancia en función del ángulo.

Su derivada será $\rho'(t) = -12\,\mathrm{sen}(3t)$. Y por tanto se anula en $t = k\pi/3$, $k =$ 0, 1, 2, 3, 4, 5. Veamos qué aspecto tendrá la función en esos puntos (figura 33).

$$\rho''(t) = -36\cos(3t)$$
$$\rho''(0) = -36 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$
$$\rho''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 36 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$
$$\rho''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -36 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$
$$\rho''\left(\frac{3\pi}{3}\right) = 36 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$
$$\rho''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -36 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$
$$\rho''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 36 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

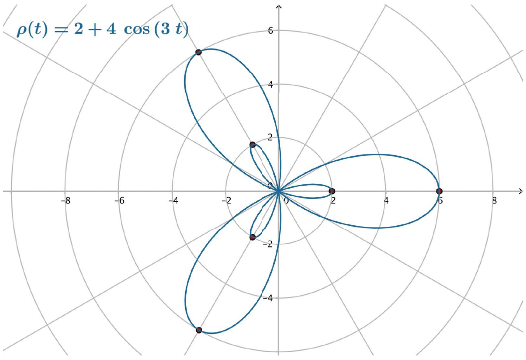



Figura 33

También podemos intentar calcular la pendiente de la recta tangente en un punto. En una función $f(x)$ la pendiente viene dada por la expresión $f'(x)$ pero ¿qué sucede en $\rho(t)$? Uno puede pensar que la pendiente de la recta tangente será $\rho'(t)$ pero un simple ejemplo, $\rho(t)=1$, nos muestra que nuestro razonamiento es erróneo ya que $\rho(t)=1$ representa una circunferencia y no en todos los puntos la recta tangente tiene pendiente nula, $\rho'(t)=0$.

¿Cómo calcular la pendiente de la recta tangente en un punto?

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y = \rho(\theta)\,\text{sen}(\theta) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d\rho}{d\theta}\text{sen}(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta)}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos(\theta) - \rho(\theta)\,\text{sen}(\theta)}$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es:

$$m = \frac{\rho'(\theta)\,\text{sen}(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta)}{\rho'(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\,\text{sen}(\theta)}$$

Por ejemplo, en nuestra flor, la pendiente de la recta tangente en $\pi/6$ será

$$\frac{1}{107}\left(\sqrt{3}\cdot 37 - 24\right)$$

y por tanto nuestra recta tangente

$$y - 1 = \frac{1}{107}\left(\sqrt{3}\cdot 37 - 24\right)\left(x - \sqrt{3}\right).$$

## *Longitud de la curva*

La longitud de un segmento cuyos extremos son los puntos $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ viene dada por el Teorema de Pitágoras

$$\sqrt{\left(b_1^2 - a_1^2\right) + \left(b_2^2 - a_2^2\right)}$$

Aproximamos la longitud de nuestra flor mediante la longitud de un línea poligonal cuyos puntos están en la flor. La suma de las longitudes de todos estos segmentos nos aproximará la longitud de la curva (figura 34).

Como todos esperábamos podemos hacer tan pequeña como queramos la longitud de cada uno de estos segmentos. De hecho su cuadrado es, por el teorema de Pitágoras $x'^2(\theta) + y'^2(\theta)$, donde

$$x'(\theta) = \rho'(\theta)\cos\theta - \rho\,\text{sen}\theta$$

$$y'(\theta) = \rho'(\theta)\,\text{sen}\theta + \rho\cos\theta$$

Llegados a este punto podemos activar la vista Cálculo Simbólico CAS en el menú Vistas y trabajar con el cálculo simbólico que GeoGebra nos ofrece.

En la figura 35 podemos ver los pasos para calcular lo escrito más arriba, obteniendo:

$$x'^2(\theta) + y'^2(\theta) = \rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)$$

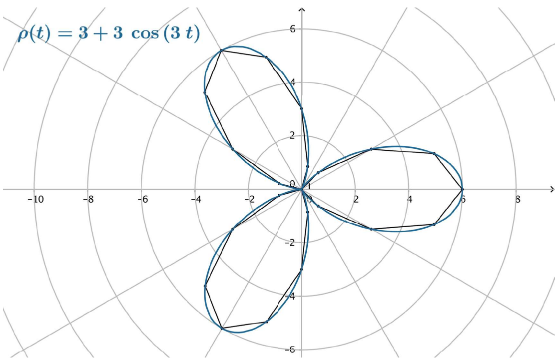



Figura 34

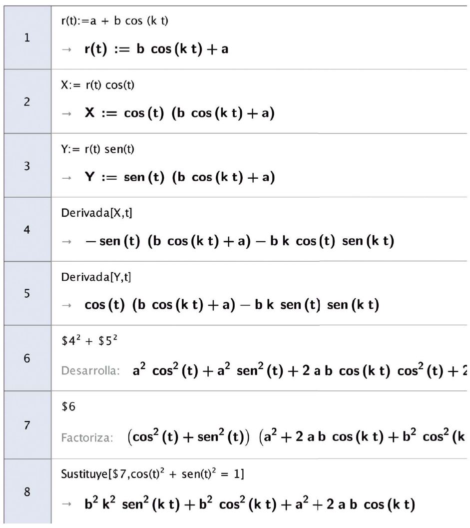



Figura 35

Sumando todos estos infinitos trocitos tenemos nuestra longitud:

$$L=\int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta \text{ con } a\leq\theta\leq b$$

Así la longitud de nuestra flor $\rho(\theta)=a+ + b\cos(k\theta)$, $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$, viene dada por la expresión:

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{a^2+2ab\cos(k\theta)+b^2k^2\,\mathrm{sen}^2(k\theta)+b^2\cos^2(k\theta)}d\theta$$

Por ejemplo, $\rho(t)=3+3\cos(3t)$, entre 0 y $2\pi$ (figura 36). Aquí podemos acudir al rescate de la vista Cálculo Simbólico CAS y los comandos TrigSimplifica y TrigCombina, conviene revisar los resultados porque en algunos casos se puede simplificar aún más (figura 37).

En línea 8 podemos ver la expresión $\rho(\theta)+\rho'^2(\theta)$ con $\rho(\theta)=a+b\cos(k\theta)$, $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$.

Escribiendo en una nueva línea: Sustituye[$8,{a = 3, b = 3, k = 3}], sustituimos en la expresión 8 a por 3, b por 3 y k por 3.

Ahora simplemente escribimos: Integral [sqrt(($9)),t,0,2 pi].

El resultado es

$$-\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{4}\ln\left(-\sqrt{2}\cdot 408+577\right)+36.$$

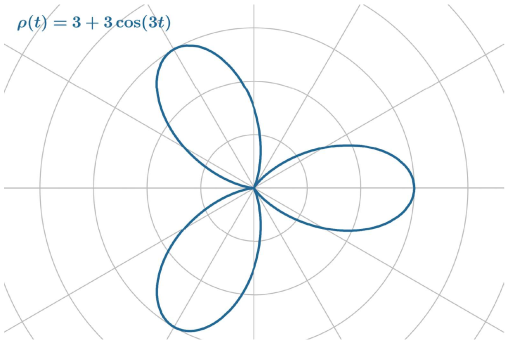



Figura 36

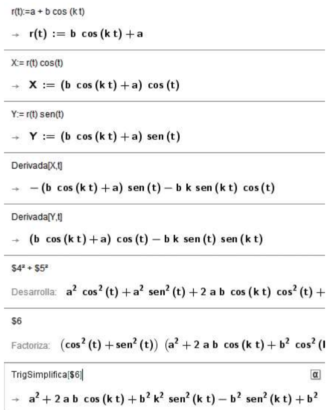



Figura 37

## *Área*

Para calcular el área que encierra una flor necesitaremos recurrir a la fórmula del área de un sector circular.

$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$

donde $r$ es el radio y $\theta$ el ángulo central del sector expresado en radianes. La idea para calcular el área de una curva expresada en coordenadas polares es muy parecida a las sumas de Riemann, salvo que aquí usaremos sectores circulares como método de aproximación.

Si tenemos una curva polar expresada como $r=\rho(t)$ y los rayos $\theta=a$ y $\theta=b$ donde $\rho(t)$ es una función continua y positiva y además $0<b-a\leq 2\pi$ podemos aproximar su área como la suma de sectores circulares de amplitud cada vez más pequeña (figuras 38, 39 y 40).

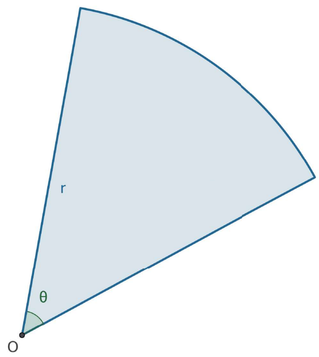



Figura 38

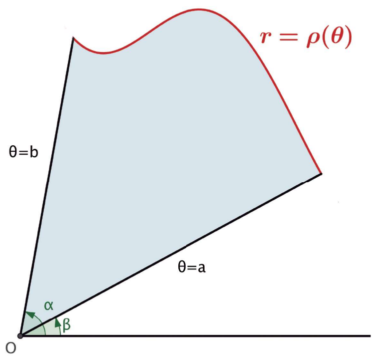



Figura 39

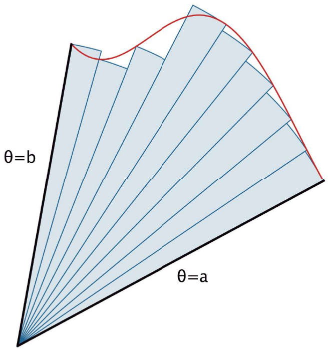



Figura 40

Así,

$$A=\int_a^b \frac{1}{2}\left(\rho(\theta)\right)^2 d\theta$$

Particularizando para nuestras flores $\rho(\theta)=a+$ $+\,b\cos(k\theta)$ tendremos:

$$\int_c^d\left(\frac{1}{2}a^2+ab\cos(k\theta)+\frac{1}{2}b^2\cos^2(k\theta)\right)d\theta$$

Por ejemplo, podemos calcular el área de una flor de cinco pétalos, $\rho(t)=1+\cos(5t)$ (figura 41).

Una vez más podemos recurrir al CAS (figura 42). El área de nuestra flor es $3\pi/2$.

Como se ha podido observar, trabajar con polares puede ser otra posibilidad más para practicar y aprender otros conceptos alejados de la visión cartesiana pero no por ello menos válidos. Con los conocimientos arriba escritos es posible plantear a los alumnos cuestiones encontrar la ecuación de una margarita o de una rosa, la longitud y el área de un pétalo, etc. (figuras 43, 44 y 45)

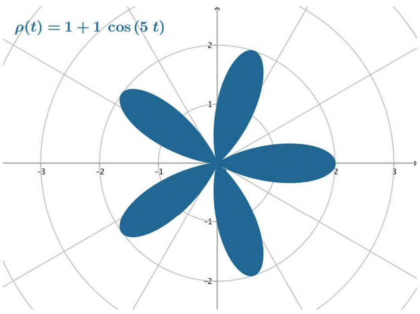



Figura 41

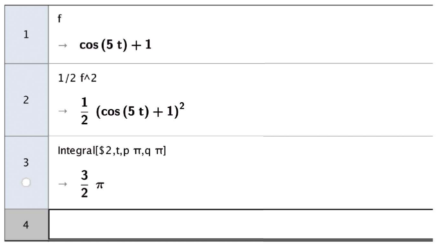



Figura 42

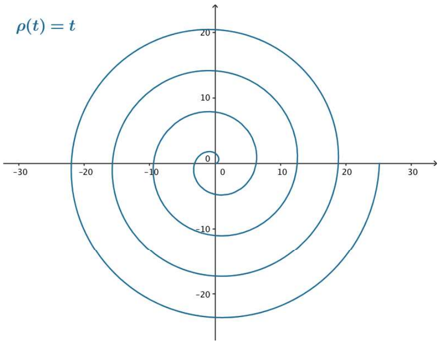



Figura 43

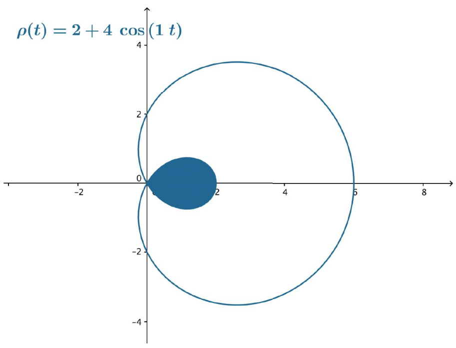



Figura 44

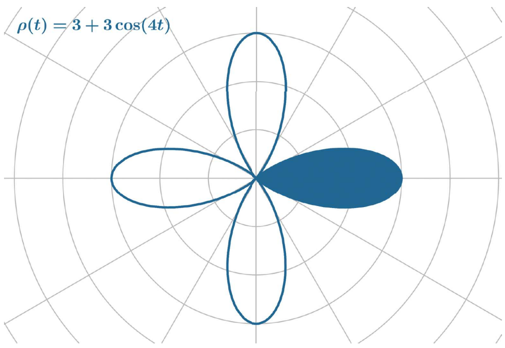
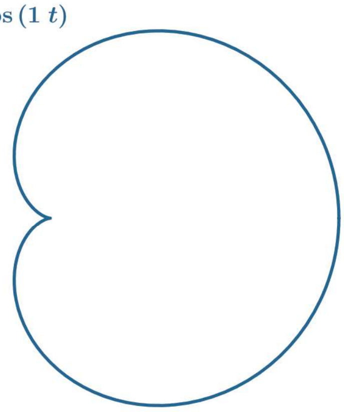



Figura 45

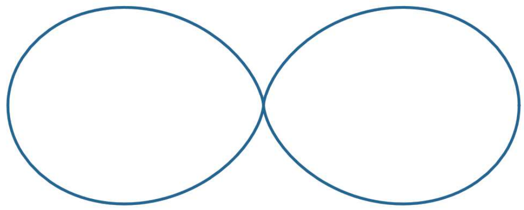
Por último, es inevitable no jugar y obtener un repertorio bonito e interesante de flores. Aquí va el mío.

$\rho(t) = 2 + 2\ \cos(1\ t)$



$a = 2 \quad b = 2 \quad k = 1 \quad [0\pi, 2\pi]$

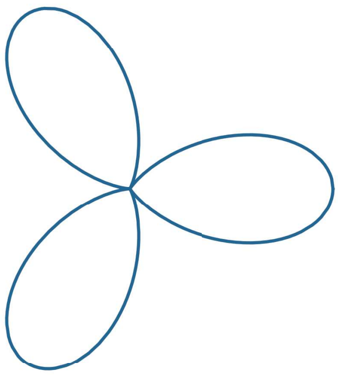
$\rho(t) = 2 + 2\ \cos(2\ t)$



$a = 2 \quad b = 2 \quad k = 2 \quad [0\pi, 2\pi]$

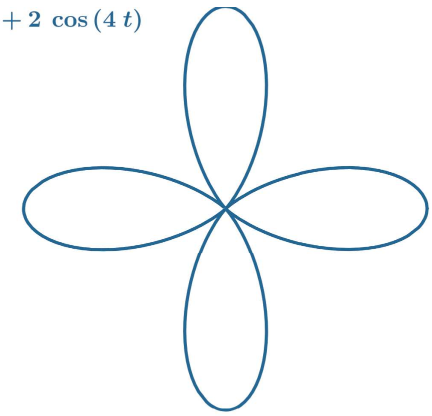


$\rho(t) = 2 + 2\ \cos(3\ t)$



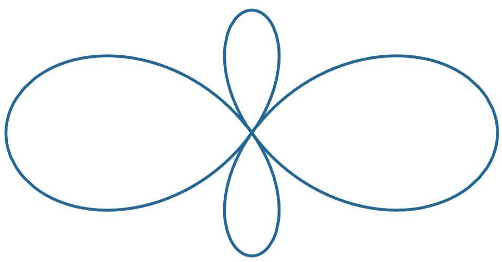
$a = 2 \quad b = 2 \quad k = 3 \quad [0\pi, 2\pi]$

$\rho(t) = 2 + 2\ \cos(4\ t)$



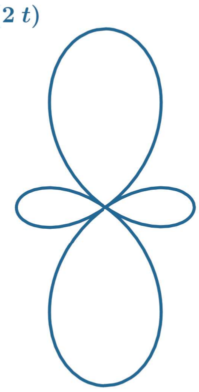
$a = 2 \quad b = 2 \quad k = 4 \quad [0\pi, 2\pi]$

$\rho(t) = 1 + 3\ \cos(2\ t)$



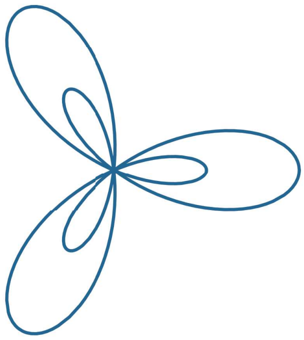
$a = 1 \quad b = 3 \quad k = 2 \quad [0\pi, 2\pi]$

$\rho(t) = -1 + 3\ \cos(2\ t)$



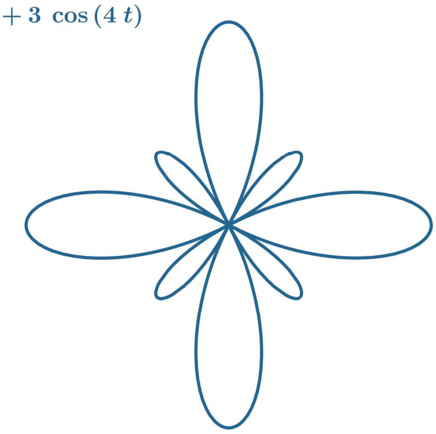
$a = -1 \quad b = 3 \quad k = 2 \quad [0\pi, 2\pi]$

$\rho(t) = 1 + 3\ \cos(3\,t)$



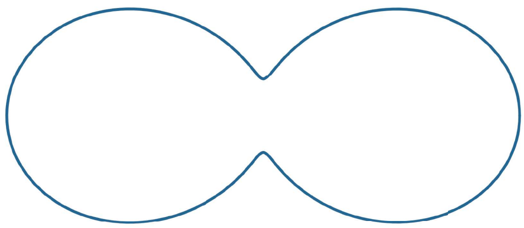
$a = 1 \qquad b = 3 \qquad k = 3 \qquad [0\pi, 2\pi]$

$\rho(t) = 1 + 3\ \cos(4\,t)$



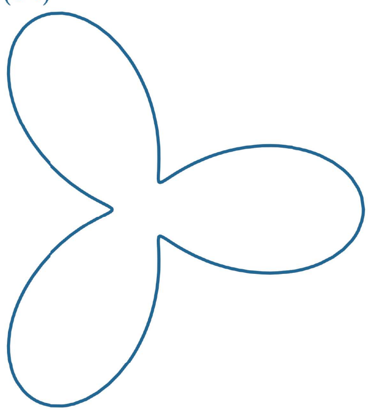
$a = 1 \qquad b = 3 \qquad k = 4 \qquad [0\pi, 2\pi]$

$\rho(t) = 4 + 3\ \cos(2\,t)$



$a = 4 \qquad b = 3 \qquad k = 2 \qquad [0\pi, 2\pi]$

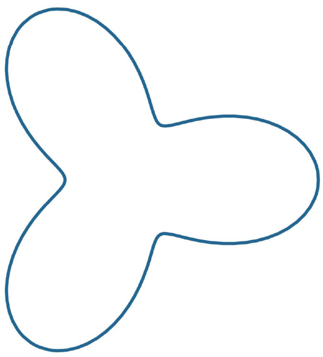
$\rho(t) = 4 + 3\ \cos(3\,t)$



$a = 4 \qquad b = 3 \qquad k = 3 \qquad [0\pi, 2\pi]$

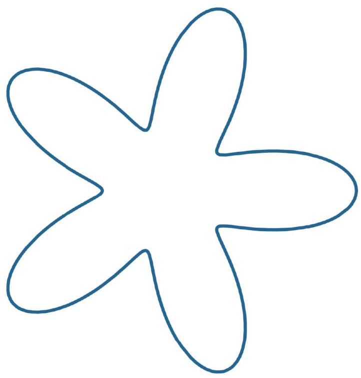


$\rho(t) = 4 + 2\ \cos(3\,t)$



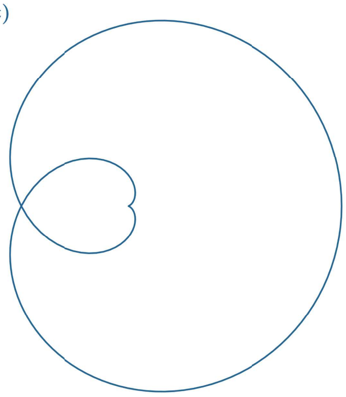
$a = 4 \qquad b = 2 \qquad k = 3 \qquad [0\pi, 2\pi]$

$\rho(t) = 4 + 2\ \cos(5\,t)$

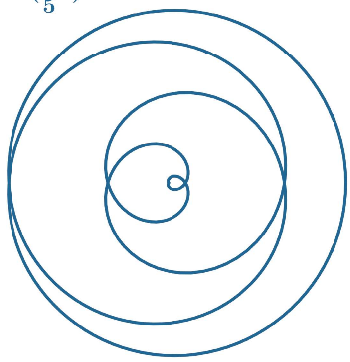


$a = 4 \qquad b = 2 \qquad k = 5 \qquad [0\pi, 2\pi]$

$\rho(t) = 5 + 5\ \cos(0.5\ t)$



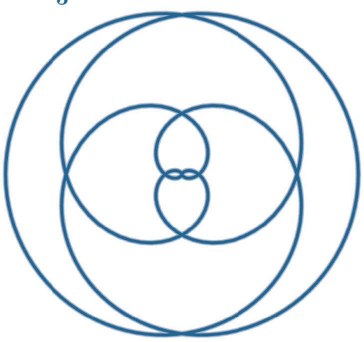
$\rho(t) = 5 + 5\cos(\frac{1}{5}\,t)$



$a = 5$ $b = 5$ $k = \frac{1}{5}$ $[0\pi, 10\pi]$

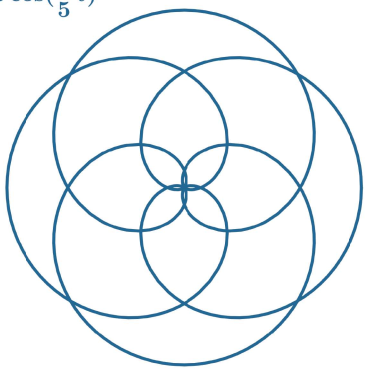


$\rho(t) = 5 + 5\cos(\frac{2}{5}\,t)$



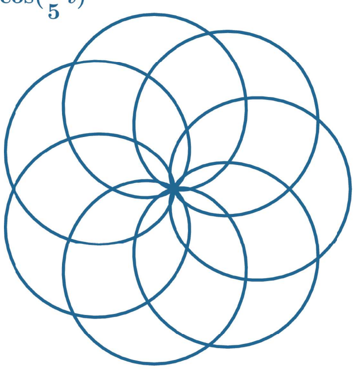
$a = 5$ $b = 5$ $k = \frac{2}{5}$ $[0\pi, 10\pi]$

$\rho(t) = 5 + 5\cos(\frac{4}{5}\,t)$



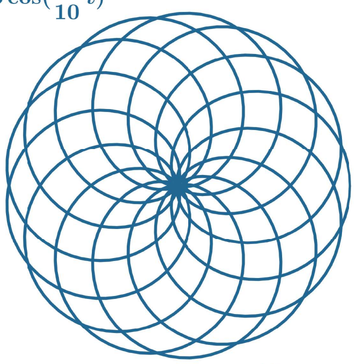
$a = 5$ $b = 5$ $k = \frac{4}{5}$ $[0\pi, 10\pi]$

$\rho(t) = 5 + 5\cos(\frac{7}{5}\,t)$



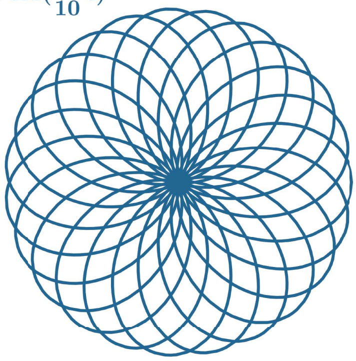
$a = 5$ $b = 5$ $k = \frac{7}{5}$ $[0\pi, 20\pi]$

$\rho(t) = 5 + 5\cos(\frac{13}{10}\,t)$



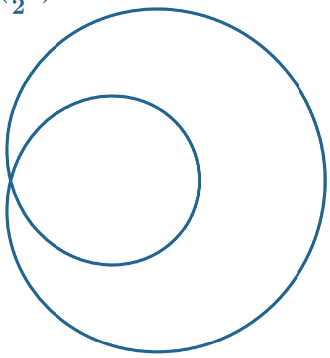
$a = 5$ $b = 5$ $k = \frac{13}{10}$ $[0\pi, 20\pi]$

$\rho(t) = 5 + 5\cos(\frac{23}{10}t)$



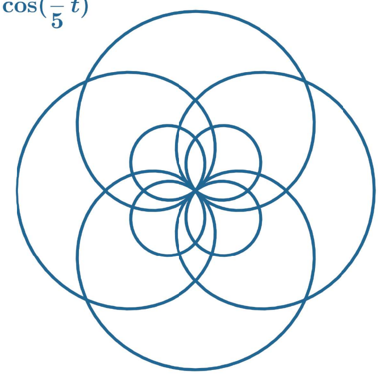
$a = 5 \qquad b = 5 \qquad k = \frac{23}{10} \qquad [0\pi, 20\pi]$

$\rho(t) = 4 + 2\cos(\frac{1}{2}t)$



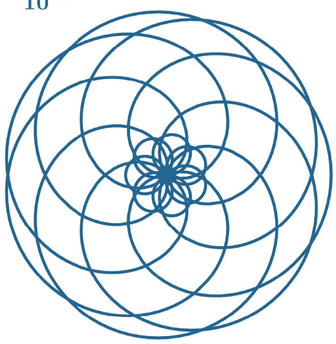
$a = 4 \qquad b = 2 \qquad k = \frac{1}{2} \qquad [0\pi, 4\pi]$

$\rho(t) = 2 + 5\cos(\frac{4}{5}t)$



$a = 2 \qquad b = 5 \qquad k = \frac{4}{5} \qquad [0\pi, 10\pi]$

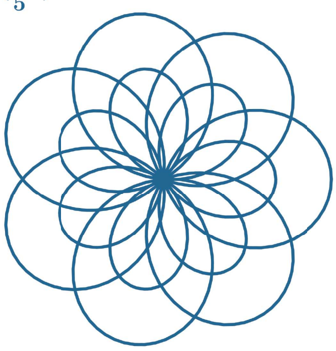
$\rho(t) = 3 + 5\cos(\frac{7}{10}t)$



$a = 3 \qquad b = 5 \qquad k = \frac{7}{10} \qquad [0\pi, 20\pi]$

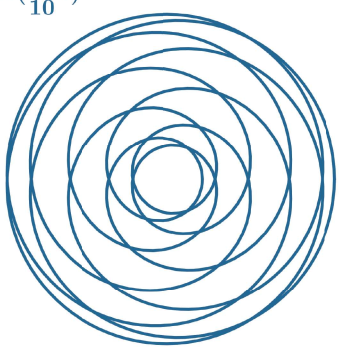


$\rho(t) = 1 + 5\cos(\frac{7}{5}t)$



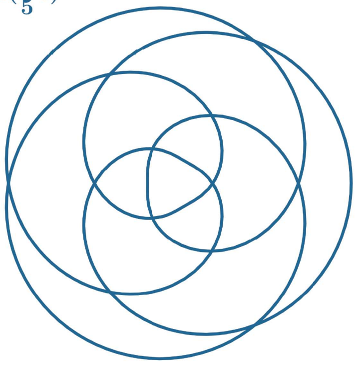
$a = 1 \qquad b = 5 \qquad k = \frac{7}{5} \qquad [0\pi, 10\pi]$

$\rho(t) = 3 + 2\cos(\frac{3}{10}t)$



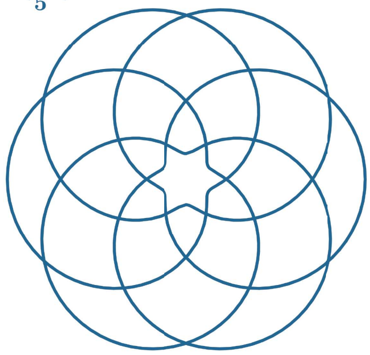
$a = 3 \qquad b = 2 \qquad k = \frac{3}{10} \qquad [0\pi, 20\pi]$

$\rho(t) = 4 + 3\cos(\frac{3}{5}\,t)$



$a = 4 \qquad b = 3 \qquad k = \frac{3}{5} \qquad [0\pi, 10\pi]$

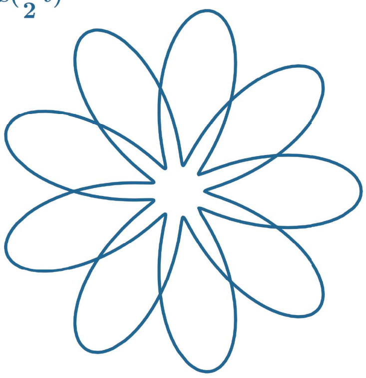
$\rho(t) = 4 + 3\cos(\frac{6}{5}\,t)$



$a = 4 \qquad b = 3 \qquad k = \frac{6}{5} \qquad [0\pi, 10\pi]$

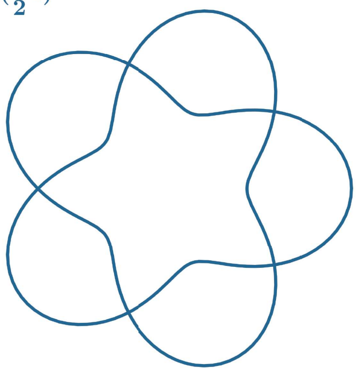


$\rho(t) = 4 + 3\cos(\frac{9}{2}\,t)$



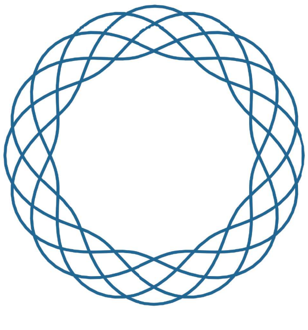
$a = 4 \qquad b = 3 \qquad k = \frac{9}{2} \qquad [0\pi, 4\pi]$

$\rho(t) = 5 + 2\cos(\frac{5}{2}\,t)$



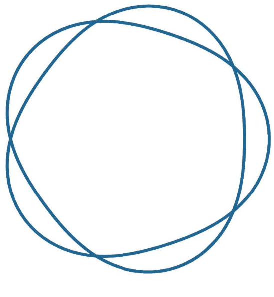
$a = 5 \qquad b = 2 \qquad k = \frac{5}{2} \qquad [0\pi, 4\pi]$

$\rho(t) = 5 + 1\cos(\frac{16}{5}\,t)$



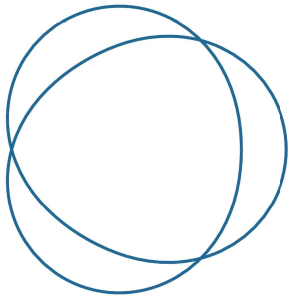
$a = 5 \qquad b = 1 \qquad k = \frac{16}{5} \qquad [0\pi, 10\pi]$

$\rho(t) = 5 + \frac{1}{2}\cos(\frac{5}{2}\,t)$



$a = 5 \qquad b = 0.5 \qquad k = \frac{5}{2} \qquad [0\pi, 10\pi]$

$$\rho(t) = 5 + \frac{9}{10}\cos(\frac{3}{2}t)$$



$a = 5$ $\quad b = 0.9$ $\quad k = \frac{3}{2}$ $\quad [0\pi, 4\pi]$

## Referencias bibliográficas



PÉREZ, A. (2005), «Las ecuaciones de las flores», *Sigma*, n.º 26, 137-148.

— (2006), «Mi biblioteca particular», *Suma,* n.º 51, 107-122.

LARSON, R., y B. EDWARS, (2010). Cálculo 2 , McGraw-Hill, México.

ÁLVAREZ, J. M. (2006), *Curvas con historia*, Nivola, Madrid.

JOSÉ LUIS MUÑOZ CASADO
*IES Gran Capitán*
<creogebra@revistasuma.es>