SUMA+ 83
SECCIONES
Noviembre 2016
pp. 103-110

Un mundo imaginario
Potencias de un número complejo

JOSÉ LUIS MUÑOZ CASADO

Una de las cosas que GeoGebra realiza de forma impecable es la exploración de propiedades numéricas, algebraicas, estadísticas, geométricas, etc. GeoGebra nos permite tratar multitud de casos con unos pocos clics de ratón. Esta manipulación nos permitirá, como paso previo a la generalización, descubrir propiedades y regularidades que quizás, a simple vista, son difíciles de imaginar.

Las diferentes vistas disponibles y la interacción entre ellas nos abren la puerta a la exploración de muy diversas partes de las Matemáticas.

Una de esas puertas nos puede introducir en los números complejos. Más allá de los elementos básicos, a saber, suma, producto, interpretación geométrica, etc., la actividad que presentamos permite la investigación de algunas propiedades que se presentan al realizar potencias de exponente natural de números complejos y su conexión con elementos básicos de la geometría como son los polígonos.

Como siempre realizaremos una pequeña construcción que será nuestro tablero de exploración.

Números complejos

Un número complejo se define de la forma $z = a + bi$ con a, $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. Geogebra per-

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2016 y aceptado en septiembre de 2016

mite la representación de complejos sin más que escribir en la barra de entrada $a+bi$, por ejemplo, $3+4i$. Las útimas versiones de GeoGebra ya reconocen directamente la expresión $3+4i$, no obstante, para introducir la unidad imaginaria pulsamos la combinación de teclas Alt+i (Windows), ctrl+i (Mac) o seleccionamos en la caja de símbolos que se encuentra a la derecha de la barra de entrada la unidad imaginaria.

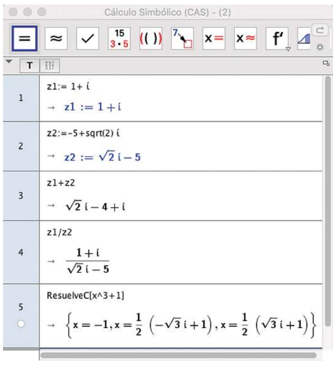


Figura 1. Operar con números complejos en la vista CAS

También es posible trabajar las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división con sus símbolos habituales +, –, · y / en la vista CAS.

También disponemos de las funciones elementales con números complejos:

	Comando	*Función*
Parte real (z_1)	x(z_1)	real(z_1)
Parte imaginaria (z_1)	y(z_1)	imaginaria(z_1)
Módulo (z_1)	Longitud[z_1]	abs(z_1)
Argumento (z_1)	Ángulo[z_1]	arg(z_1)
Conjugado (z_1)	Refleja[z_1, EjeX]	conjugado(z_1)

Y los comandos:

— Acomplejo[<vector>] que transforma un vector o un punto en un número complejo expresado algebraicamente.

— Apunto[<punto>] que crea el punto que corresponde al número complejo dado, es decir, el afijo.

— Apolar[<número complejo>] que tiene por resultado el par *(módulo; argumento)*, es decir, la expresión trigonométrica del complejo dado.

— Aexponencial[<número complejo>] que tiene por resultado, en formato exponencial, el número complejo indicado (o lista de dos números).

Potencias de números complejos

Una vez introducido nuestro número complejo podemos experimentar con sus potencias naturales, es decir, z_1^n, $n \in \mathbb{N}$.

Guía de construcción
— Escribimos en la barra de entrada: 1 + i (aparecerá el nombre z_1)
— Creamos un deslizador de tipo entero con los parámetros por defecto. Por defecto lo llama n.
— Usamos el comando secuencia para crear las potencias naturales de z_1. Escribimos en la barra de entrada: potencias=Secuencia[z_1^k,k,1,n]

Con esta sencilla construcción, que ampliaremos a lo largo del artículo, ya podemos observar qué sucede con las potencias de exponente natural de un número complejo.

Si activamos la vista algebraica, veremos una lista con las potencias del número complejo (figura 2).

En la vista gráfica veremos los puntos correspondientes y ahí es donde empieza nuestra investigación. Si movemos el punto z_1 observaremos cómo varían las potencias (figura 3).

De forma casi automática tanto a profesores como a alumnos nos asalta la pregunta ¿qué patrón siguen las sucesivas potencias?

Rápidamente sacamos una conclusión, la *figura* que describen los puntos depende de al menos el módulo del número complejo.

En este punto vamos a unir con segmentos las potencias consecutivas, es decir, los segmentos, $\overline{z_1 z_1^2}$, $\overline{z_1^2 z_1^3}$, $\overline{z_1^3 z_1^4}$,… $\overline{z_1^{n-1} z_1^n}$ y también representaremos la circunferencia unidad en un intento de ver qué sucede.

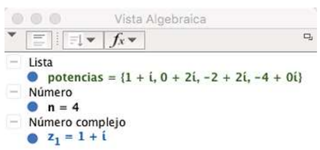


Figura 2

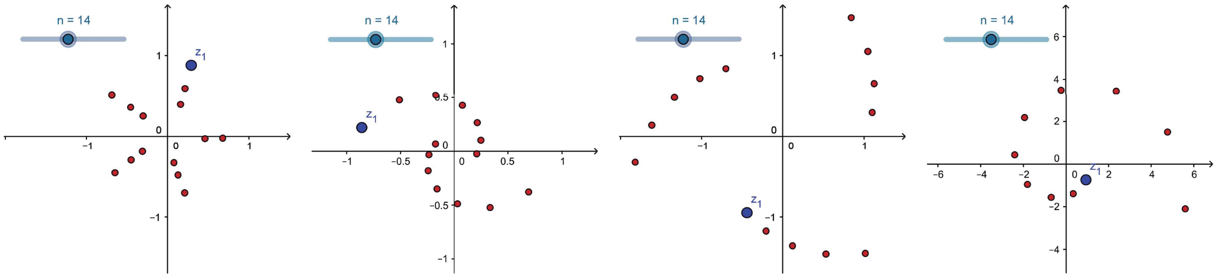


Figura 3

Guía de construcción

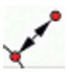
— En el fichero anterior, escribimos en la barra de entrada:
- Circunferencia[(0,0),1]
- linea= Poligonal[potencias]

— Añadimos una casilla de control para ocultar/mostrar la línea poligonal creada en la guía anterior.

Con estas herramientas podemos estudiar qué sucede distinguiendo tres casos.

Módulo $z_1 = 1$

Con el botón



Limita/Libera punto podemos forzar a que nuestro número complejo esté en la circunferencia unidad, pulsamos el botón, marcamos nuestro número complejo y a continuación la circunferencia unidad.

Situemos el deslizador en el valor 10 y movamos nuestro número complejo por la circunferencia unidad. Observemos qué sucede.

Conforme el argumento del número complejo aumenta, las potencias se *estiran*, y en una determinada posición el argumento de las potencias supera 2π comenzando a dar vueltas alrededor del punto $(0, 0)$ (figura 4).

Podemos realizar el proceso anterior animando z_1.

También observamos que en determinadas posiciones las potencias desaparecen.

En realidad, lo que estamos observando son las potencias de *i*.

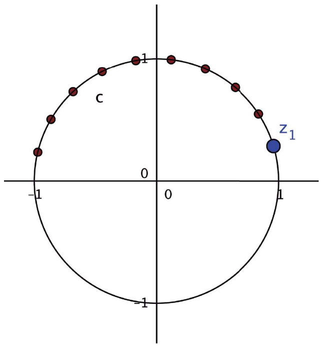


Figura 4. $\{z_1, z_1^2, ..., z_1^{10}\}$

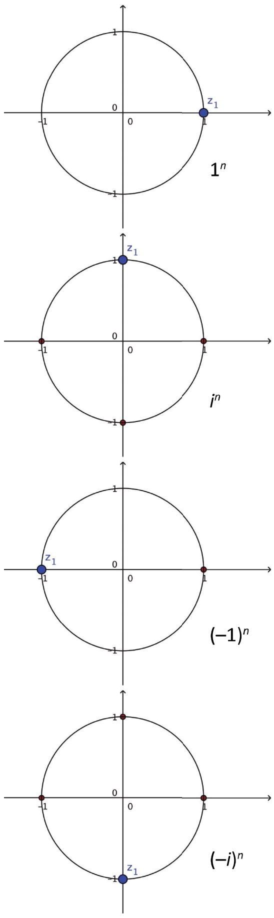


Figura 5

Actividades

— ¿Qué sucede con todas las potencias $\{z_1, z_1^2, z_1^3, ..., z_1^9, z_1^{10}\}$ al colocar z_1 en los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$?

— ¿Qué números complejos representan los puntos anteriores?

— Si $z_1 = i$, ¿qué elementos forman el conjunto $\{z_1, z_1^2, z_1^3, ..., z_1^n\}$?

Jugando con nuestra construcción y observando la línea poligonal que hemos representado surge la pregunta ¿cuándo será una poligonal cerrada? ¿cuándo formará un polígono regular? ¿cuándo no?

Polígonos regulares

Antes de seguir añadimos alguna funcionalidad más a nuestro fichero GeoGebra.

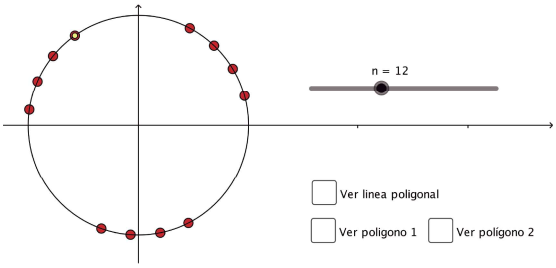


Figura 7

Guía de construcción

— En el fichero anterior. Escribimos en la barra de entrada:

- poligono1= polígono[potencias]

  Este comando generará un polígono con los vértices $\{z_1, z_1^2, z_1^3, \dots, z_1^n\}$ respetando el orden establecido por el índice de la potencia. Observaremos al mover el número complejo que aparecen los denominados polígonos cruzados, que son polígonos no convexos. Este hecho se produce porque para determinados $z=1_\alpha$ los afijos de los números complejos de módulo 1 y argumento α, 2α, … , $n\alpha$, así ordenados, no ocupan posiciones consecutivas sobre la circunferencia unidad (figura 6).

  Para evitar eso podemos añadir a nuestro fichero lo siguiente:

— Escribimos en la barra de entrada:

- argumentos=Ordena[Zip[arg(k), k, potencias]]
- potencias2=Zip[cos(k) + ί sen(k), k, argumentos]
- poligono2=Polígono[potencias2]

—Añadimos dos casillas de control para mostrar el polígono1 o el polígono2 (figura 7).

La primera sería restringir el argumento de las diferentes potencias de forma que $n\cdot\alpha\in[0,2\pi]$. Veamos.

Si expresamos z en su forma polar, $z=1_\alpha$ con $\alpha\in[0,2\pi)$, entonces $z^n=1_{n\cdot\alpha}$. La pregunta se reduce a averiguar cuando $n\cdot\alpha=2\pi+\alpha$.

Supongamos $\alpha=(p/q)\pi, p,q\in\mathbb{N}$ y $\mathrm{mcd}(p,q)=1$. Entonces $n\cdot(p/q)\pi=2\pi+(p/q)\pi$.

Simplificando, obtenemos: $pn=2q+p$ y por tanto, $n=2\cdot(p/q)+1$, de lo que podemos deducir que p tiene que dividir a $2q$, lo cual implica que p es 1 o 2 ya que $\mathrm{mcd}(p,q)=1$.

Solo para aquellos números complejos cuyo argumento sea π/q con $q>1$ o $2\pi/q$ con $q>1$, $q\in\mathbb{N}$ se podrá encontrar un exponente n que cumpla que $z=z^n$ y, por tanto, el conjunto $\{z, z^2, z^3, \dots, z^{n-1}\}$ es el de los vértices de un polígono regular.

Por ejemplo, si $z=1_{2\pi/9}$ tenemos el número complejo $z^n=1_{2n\pi/9}$. Entonces, $2n\pi/9=2\pi+2\pi/9$ obteniendo $n=10$.

Por tanto, $z=z^{10}$ y podemos construir el polígono regular formado por los puntos $\{z, z^2, z^3, \dots, z^9\}$ (figura 8).

Esta construcción da mucho juego, y nos ayudará a dar respuesta a algunas de las preguntas realizadas anteriormente.

Fijado un número complejo z en la circunferencia unidad ¿cuál será el menor número natural para el que el conjunto $\{z, z^2, z^3, \dots, z^{n-1}\}$ sea el de los vértices de un polígono regular? Podemos contestar de dos formas distintas.

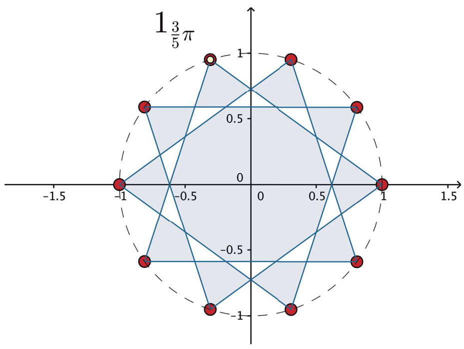


Figura 6. $\{z_1, z_1^2, \dots, z_1^{10}\}$

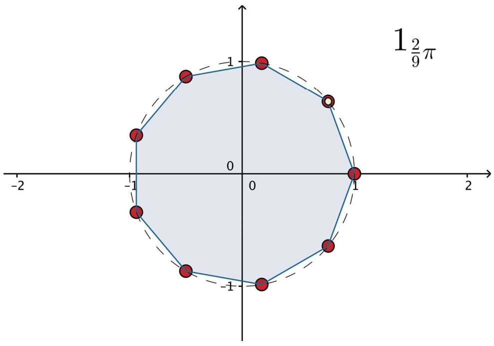


Figura 8

La segunda forma sería explorar el caso $n \cdot \alpha \in [0, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{N}$. Veamos.

Si tomamos el conjunto $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}\}$ de puntos, volvemos a explorar la opción $n \cdot \alpha = 2k\pi + \alpha$.

Si tomamos como antes $\alpha = (p/q)\pi$, $p, q \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$. Sustituyendo: $n \cdot (p/q)\pi = 2k\pi + (p/q)\pi$ que podemos simplificar en: $np\pi = 2qk\pi + p\pi$. Esto nos lleva a resolver la ecuación $np - 2qk = p$, que siempre tiene solución ya que $\operatorname{mcd}(p, 2q) \mid p$.

Por ejemplo, si fijamos el argumento $\alpha = (7/12)\pi$ para z_1, siguiendo el razonamiento anterior debemos resolver: $7n - 24k = 7$, es decir, $7(n-1) = 24k$. Esto equivale, puesto que $\operatorname{mcd}(7, 24) = 1$, a que k sea múltiplo de 7 y $n-1$ múltiplo de 24, es decir, a que exista un número entero positivo t tal que $n - 1 = 24t$ y $k = 7t$, o sea, $n = 1 + 24t$ y $k = 7t$. El menor valor de t es 1, lo que nos proporciona el menor valor de n, que es 25. Por tanto, el conjunto $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^{24}\}$ formará un polígono regular (figura 9).

También podemos plantear la cuestión opuesta. Fijado un número natural n, ¿qué número complejo z cumplirá que el conjunto $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^n\}$ sea el de los vértices de un polígono regular?

En este caso, tendremos que encontrar $\alpha \in [0, 2\pi)$, tal que $z^{n+1} = z$, y si llamamos α al argumento de z, debe ser $(n+1) \cdot \alpha = 2\pi + \alpha$ y por tanto $\alpha = 2\pi/n$ con $n > 2$ resultado por todos conocido.

Jugando un poco con la animación del número complejo observamos que para el mismo número de potencias aparecen diferentes polígonos. Si fijamos $n = 10$, por los cálculos anteriores vemos que $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9\}$ forman un polígono regular cuando z es $1_{\pi/5}$ pero al animar z vemos las figuras 10, 11 y 12

La explicación viene en la unicidad de los vértices, en todos los casos anteriores, en el conjunto $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9\}$ hay vértices repetidos como consecuencia de levantar la restricción $z^{10} = z$.

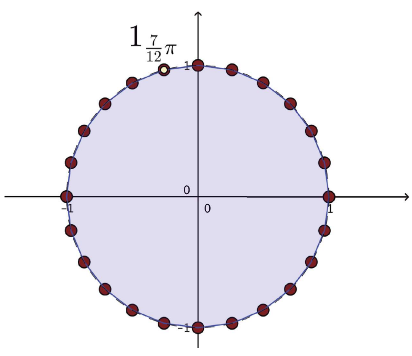


Figura 9

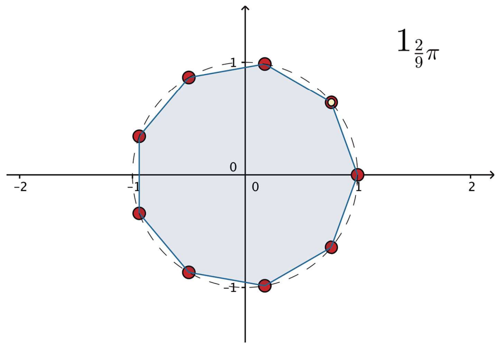


Figura 10

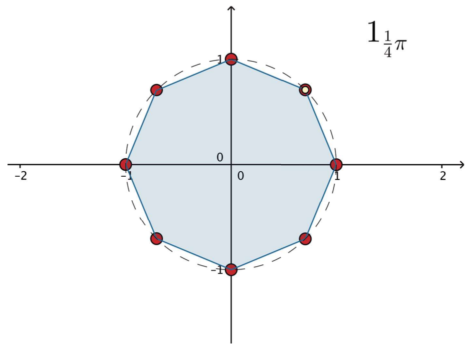


Figura 11

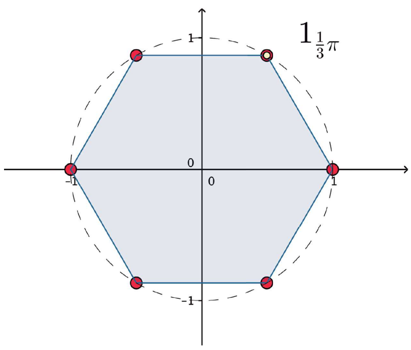


Figura 12

Actividad

¿Cuántos polígonos regulares se pueden obtener con las diez primeras potencias de un número complejo z_1?

Ya vimos en el apartado anterior que al animar el número complejo alrededor de la circunferencia unidad salen multitud de *figuras*. Una de ellas son los denominados polígonos cruzados. Perteneciente a esa categoría están los polígonos regulares estrellados. Por lo visto anteriormente una forma de construir polígonos regulares es tomar un número complejo $z=1_\alpha$ con $\alpha=2\pi/n$, n un número natural mayor que 2, entonces los puntos $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}\}$ serán los vértices de un polígono regular de n lados.

Pero podemos extender la idea tomando como argumento del número complejo z el valor $\alpha=2\pi/m$, con m un número racional mayor que 2. Supongamos que $m=n/d$ con n y d números naturales primos entre sí. Entonces los vértices del polígono se obtienen como potencias sucesivas del número complejo z de módulo 1 y argumento $2\pi d/n$. En este caso los lados del polígono así formado encierran d veces al centro de la circunferencia unidad, es decir, el conjunto $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^{n-1}\}$ dará d vueltas alrededor del $(0,0)$.

Cuando $d=1$ resulta que $n=m$ y obtenemos un polígono regular de m lados, pero cuando $d>1$ los lados se cortan unos con otros y los puntos de corte no cuentan como vértices. Como d puede ser cualquier número natural positivo primo con respecto a n y menor que $n/2$, hay un polígono regular que corresponde a cada racional $m>2$.

Cuando m es 5, obtenemos el pentágono regular si $d=1$ y el pentágono regular estrellado si $d=2$.

El estudio matemático más antiguo sobre estas figuras se debe a Thomas Bradwardine (1290-1349). Kepler (1571-1630) también los estudió y el matemático suizo L. Schläfli (1814-1895) fue el que introdujo la notación $\{n/d\}$.

El número complejo que genera el polígono regular estrellado $\{5/2\}$ será $1_{4\pi/5}$ y los vértices serán $\{1_{4\pi/5}, 1_{8\pi/5}, 1_{12\pi/5}, 1_{16\pi/5}, 1_{4\pi}\}$ (figura 13).

De igual forma podemos obtener los polígonos regulares estrellados, $\{7/2\}$, $\{7/3\}$, $\{8/3\}$, $\{12/5\}$, etc. (figuras de la 14 a la 17).

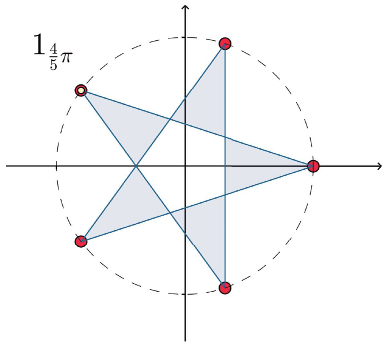


Figura 13. Estrellado {5/2}

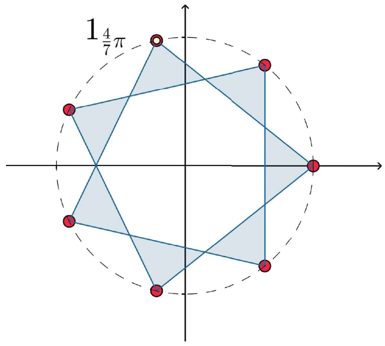


Figura 14. Estrellado {7/2}

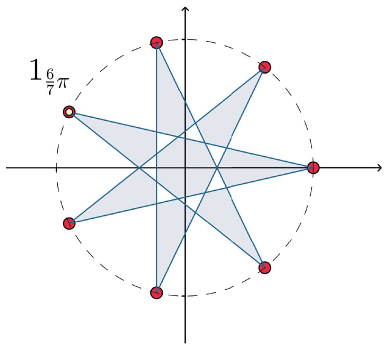


Figura 15. Estrellado {7/3}

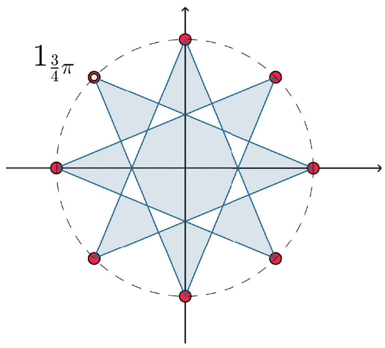


Figura 16. Estrellado {8/3}

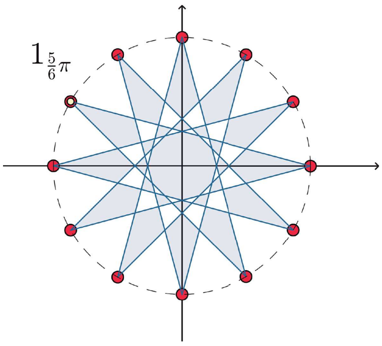
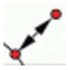


Figura 17. Estrellado {12/5}

Módulo $z_1 > 1$

Aquí las cosas cambian radicalmente, los módulos de las sucesivas potencias crecen, alejándose cada vez más del origen. Aún así podemos ver algún patrón interesante.

De nuevo, con el botón



Limita/Libera punto podemos liberar a z_1 de la circunferencia unidad, pulsamos el botón y marcamos nuestro número complejo. Nuestra construcción aún nos sirve para explorar aunque quizás nuestros polígonos ahora carezcan de sentido (figura 18).

Un primera exploración sistemática consistiría en situar z_1 en la parte positiva del eje X. El argumento de las diferentes potencias es 0 y $\{z_1, z_1^2, z_1^3, \dots, z_1^n\}$ representa un conjunto de números reales que además están en progresión geométrica de razón z_1.

Si ahora situamos z_1 en la parte positiva del eje Y observamos que la línea poligonal parece formar una especie de *espiral cuadrada infinita*. Esto es debido a que $z = r_{\pi/2}$ y las sucesivas potencias me darán el conjunto $\{r_{\pi/2}, r^2_{\pi}, r^3_{3\pi/2}, r^4_{2\pi}, \dots, r^n_{n\pi/2}\}$ (figura 19).

El trabajo previo realizado con los números complejos de módulo 1 nos puede ayudar a comprender lo que sucede. El conjunto de los argumentos de las potencias $\{z_1, z_1^2, z_1^3, \dots, z_1^n\}$ es el mismo que antes y las *extrañas* configuraciones vienen dadas por el aumento del módulo.

Si superponemos las potencias de módulo 1 y módulo >1 lo podremos ver (figura 20).

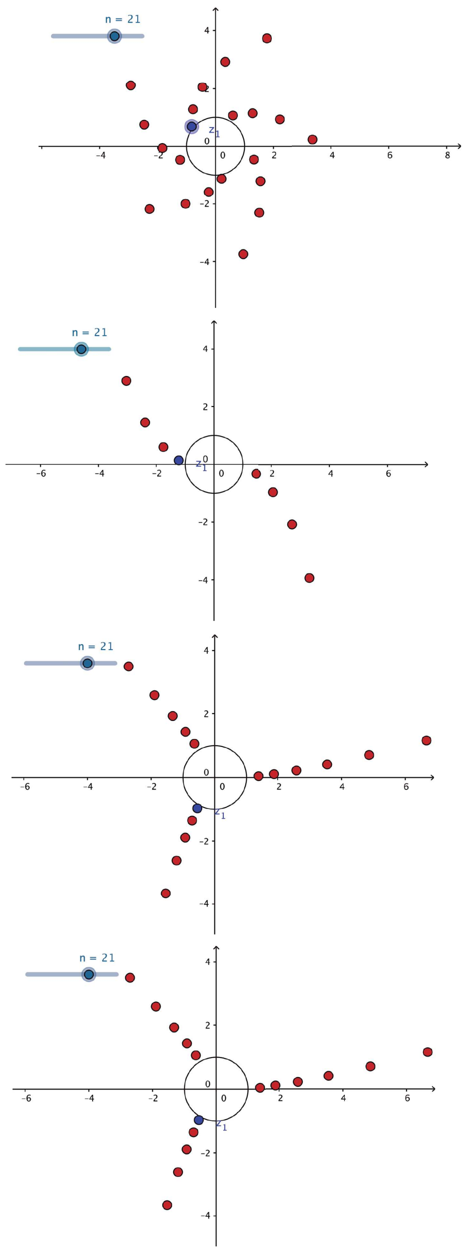


Figura 18

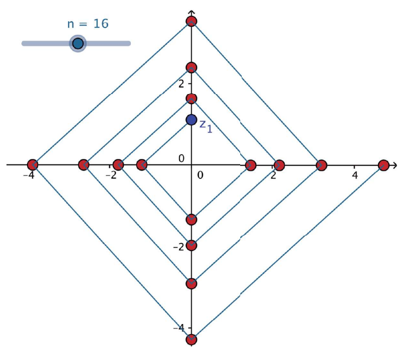


Figura 19

Actividades

- Fijar un número complejo de módulo mayor que 1. Puedes poner el número complejo en una circunferencia de radio *r*.
- Reproducir los ejemplos del apartado anterior.
- Observa los polígonos regulares del apartado anterior e intenta dar una explicación a su equivalente en módulo mayor que 1.

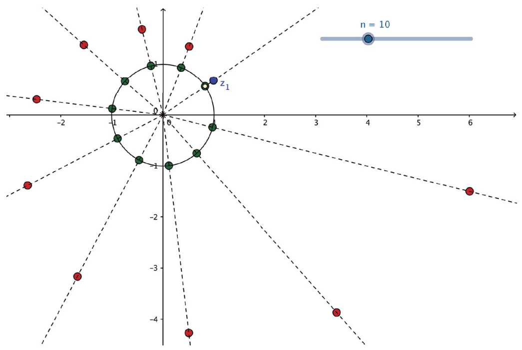


Figura 20. Potencias de z_1 con módulo 1 y z_2 con módulo 1,2

Módulo $z_1 < 1$

Ahora los módulos decrecen, acercándose al origen. Dejamos al lector algunas imágenes sugerentes con la advertencia de que en el libro *Creogebra* de <geogebratube.org> podrá encontrar alguna que otra sorpresa (figura 21).

Por último, podemos ver la relación existente entre tres números complejos de igual argumento y módulo 1, mayor que 1 y menor que 1 respectivamente (figura 22).

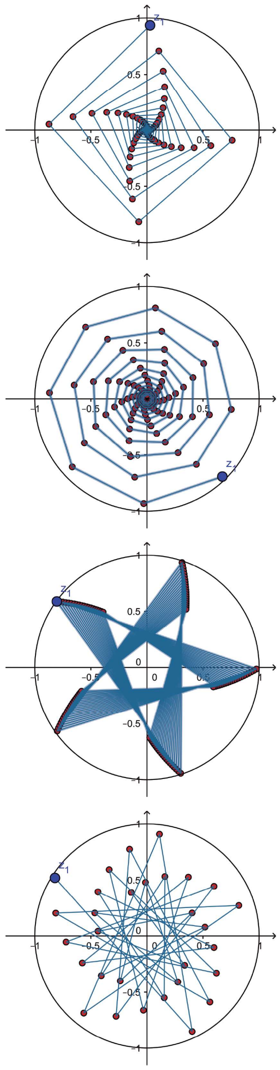


Figura 21

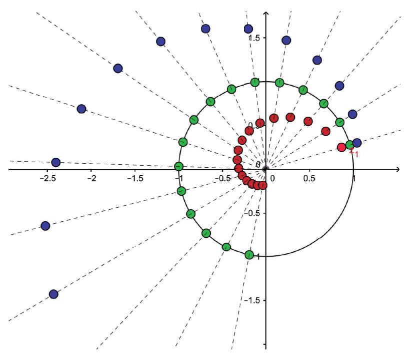


Figura 22. Potencias de tres números complejos de igual argumento y distinto módulo

Referencias bibliográficas

Bujalance, E., J. A. Bujalance, A. F. Costa y E. Martínez (1997), *Elementos de Matemática Discreta*, Sanz y Torres, Madrid.

Coxeter, H.S.M. (1971), *Fundamentos de Geometría. Limusa,* México.

Raboso, D. (2014), «Cómo ser una espiral y no morir en el intento», *La Gaceta de la RSME,* vol. 17, n.º 4, 727-741.

Rivero, F. (2001), *Una introducción a los números complejos,* Openlibra, Venezuela.

José Luis Muñoz Casado
IES Salvador Dalí
<creogebra@revistasuma.es>