



# Seminario federal sobre resolución de problemas

JUANA M.<sup>a</sup> NAVAS PLEGUEZUELOS

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, consideró oportuna la organización de un seminario sobre *Resolución de problemas matemáticos* que se celebró en Madrid y Castro Urdiales, durante los días 21 y 22 de enero, 12, 13 y 14 de mayo de 2017, respectivamente.

El trabajo de este seminario se organizó en dos fases: un encuentro en Madrid donde se establecieron las pautas para el trabajo a realizar a través de la plataforma Moodle de la FESPM y posteriormente, se celebraron unas jornadas presenciales para exponer los materiales elaborados, debatir las propuestas realizadas en la fase previa y elaborar las conclusiones del trabajo.

Además de analizar el carácter fundamental de la educación matemática como objetivo docente, los participantes en el seminario reflexionaron sobre el papel que se le otorga en los nuevos currículos a la resolución de problemas y abordaron la necesidad de desarrollar estrategias para profundizar en la resolución de problemas dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de revelar la resolución de problemas como parte fundamental de la educación matemática, elaborando un bloque específico.

La visión que tienen los profesionales de la matemática y de la educación matemática, miembros de la FESPM, sobre los distintos aspectos abordados en el seminario es lo que pretende transmitir este documento. En el mismo, se hacen recomendaciones para las Administraciones Educativas, para el profesorado y para otros estamentos sociales involucrados en la educación. Las personas participantes en este seminario hicieron propuestas de actuación futura a los órganos de gobierno de la Federación con respecto a la resolución de problemas, que se exponen a continuación.

## Conferencias del Seminario

### Luis Puig. La resolución de problemas entre la teoría y la práctica

Con los diferentes problemas expuestos a lo largo de la conferencia, se examinó el esquema del proceso de resolución de un problema según Polya: Comprender el problema, elaborar el plan, y ejecutarlo, dentro de esta ejecución puede incluir el uso de herramientas heurísticas, la gestión del proceso, *looking back* o mirar hacia atrás, y la revisión-extensión.

En particular, los ejemplos sirvieron para mostrar el uso de la herramienta heurística «considerar un caso (particular)», que consiste en:

1. Transformar el problema originalmente planteado en otro problema en el que se pregunta lo mismo, pero ahora solo sobre un elemento del conjunto del que hablaba el problema original.
2. Resolver el nuevo problema. Una vez resuelto, se tiene su resultado y su solución: Llamamos «resultado» a lo que contesta a la pregunta del problema y «solución» al conjunto de pasos que conducen desde los datos al resultado.
3. Se analiza la solución para ver si es posible llevarse la solución al problema original.
4. Si la solución no sirve para el problema original, se toma el resultado como una conjetura para el problema original, con

lo que el problema original se transforma en un nuevo problema.

5. Se resuelve el nuevo problema de demostrar.

En la fase de revisión-extensión, no se trata de revisar para comprobar la corrección de lo que se ha hecho, ni de generalizar, sino de buscar problemas similares cuya solución pueda encasarse usando la solución del problema recién resuelto, usando parte de la solución, o usando una variante de la solución. La revisión con vistas a la extensión consiste fundamentalmente en el análisis de la solución. Esta fase es crucial.

Los problemas propuestos fueron de un alto interés para todos los asistentes al seminario.

### Jordi Deulofeu. Sobre la resolución de problemas: contenido propio y método para aprender matemáticas

En esta conferencia se señalaron dos puntos clave: la planificación de la enseñanza y la gestión de la misma.

En relación con el diseño de tareas, los problemas propuestos deben proporcionar oportunidades de aprendizaje reales. El trabajo con problemas en el aula debería proporcionar oportunidades para:

- Ayudar a construir los conceptos más relevantes, las relaciones entre dichos conceptos y las distintas formas de representación de los mismos.
- Desarrollar y aplicar los procedimientos y las técnicas necesarios para resolver los problemas propuestos.
- Conocer y aprender a utilizar las herramientas heurísticas, tanto las de carácter general, que difícilmente pueden enseñarse de manera explícita, como las heurísticas específicas que pueden ser objeto de enseñanza.

Los problemas deberían ser la fuente principal para la elaboración de actividades de aula.

Determinar qué es un «buen» problema, como actividad de aprendizaje es difícil, pero algunas características que debería cumplir son:

- Que permita experimentar y/o construir y/o argumentar.
- Que admita diferentes niveles de resolución.
- Que se pueda enmarcar en una situación más amplia.
- Que posibilite la discusión y la reelaboración.
- Que se relacione con conceptos y técnicas curriculares.

Muchas de estas características dependen no solo de la situación/problema, sino de su formulación y presentación.

En cuanto a la gestión de la clase, la actitud del profesor debe ser la de crear un ambiente de resolución de problemas (de interrogación, de discusión, de colaboración) y proporcionar las ayudas necesarias para que los alumnos puedan avanzar en su proceso de resolución.

Son posibles y deseables distintas organizaciones que van del trabajo individual a las discusiones con el grupo clase, pasando por el trabajo en parejas y en pequeños grupos. Cada una de estas formas de trabajo aporta elementos importantes y a menudo complementarios, desde el fomento de la autonomía y la toma de decisiones fundamentadas, hasta la incentivación de las distintas interacciones que promueven la argumentación y la comunicación y, en definitiva, la construcción de conocimiento.

## Grupos de trabajo del Seminario

El seminario se organizó en torno a dos temas, cada uno de los cuales se trató en sendos grupos de trabajo, que fueron los siguientes:

### *Grupo I. Estrategias para profundizar en la resolución de problemas dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Coordinado por Julio Rodríguez Taboda)*

En este grupo se hizo una propuesta de bloque curricular de resolución de problemas, que po-

dría quedar formulado con los siguientes apartados:

- Objetivos
- Contenidos de Educación Primaria y de Educación Secundaria
- Metodología
- Evaluación

Los objetivos planteados son:

1. Elaborar, desarrollar y utilizar razonamientos y técnicas heurísticas como herramientas para la resolución de problemas.
2. Llegar a ser consciente de los procesos de razonamiento que se desarrollan al resolver problemas mediante la heurística y saber gestionar dichos procesos.
3. Considerar que la resolución de un problema no finaliza cuando se obtiene la solución, sino tras la fase de revisión y extensión del proceso realizado.
4. Adoptar una postura crítica ante los mensajes, informaciones y situaciones diversas, aplicando el estilo heurístico de resolución de problemas para analizarlos, confrontarlos, sacar conclusiones y tomar las decisiones más adecuadas.
5. Generar y elaborar ideas, planes y todo tipo de recursos personales para la resolución de problemas, practicando y reflexionando sobre distintas técnicas que ayuden a desarrollar la creatividad.
6. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática: recogida, exploración y clasificación ordenada de la información, cuestionamiento y crítica constante, flexibilidad y apertura para aceptar otras ideas debidamente argumentadas y capacidad de comunicar resultados y procesos.
7. Conocer y valorar las propias habilidades y aptitudes para la resolución de problemas afrontando y superando los bloqueos propios del proceso de resolución.

Los *contenidos* se organizan en torno a los niveles educativos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria, indicando en el primer caso los tipos de problemas que se pueden utilizar para desarrollar los objetivos planteados.

En lo referente a la *metodología*, se ha demostrado que empezar por enseñar conceptos y técnicas primero, y luego plantear problemas para aplicar los conocimientos supuestamente adquiridos no es, habitualmente, el mejor camino para ayudar al alumnado a construir las matemáticas. Se parte de que hay problemas especialmente adecuados para hacer emerger la necesidad de nuevos conceptos y técnicas y se establecen las premisas de preparación de la tarea, la actuación durante la realización de la misma, además de hacer notar que es importante que, antes de finalizar la actividad y, dependiendo de la diversidad de la clase, al menos todos los grupos /estudiantes hayan alcanzado algún éxito en el problema, para que ayude a aumentar su autoestima y su predisposición para un nuevo problema.

En este apartado metodológico se establece también la Base de Orientación (BO), que es una secuencia ordenada de acciones, fundamentada en los requerimientos de la tarea a realizar y en las necesidades del alumnado, que lleva a resolver un problema (dominios en la resolución de problemas y las dimensiones de cada dominio), que queda reflejado en la tabla 1.

En el apartado de la *evaluación* se señala que la evaluación de los aprendizajes es una tarea compleja y las matemáticas no escapan de esta dificultad. Si consideramos que una parte fundamental de las matemáticas la constituyen los

procesos, y entre ellos la resolución de problemas, evaluar su adquisición, en el sentido de obtener información sobre su desarrollo por parte de los alumnos, es una tarea bastante compleja.

En primer lugar, hay que plantearse qué tipo de evaluación queremos realizar. Podemos considerar dos tipos de evaluación: la que tiene una función certificativa (evaluación de tipo calificativo, habitualmente al final del proceso) y la que tiene una función formativa (sus acciones y sus resultados tienen como objetivo participar en el proceso de aprendizaje). Hay todavía un tercer tipo, la evaluación formadora, que, aun formando parte de la anterior, tiene como finalidad específica promover que los alumnos se apropien de los objetivos de aprendizaje y de los criterios de evaluación, y que anticipen y planifiquen sus acciones. Contribuye a la autorregulación de los aprendizajes, para avanzar en la autonomía de los alumnos, algo fundamental para resolver problemas.

En conjunto, podemos diferenciar entre evaluación inicial, final o durante el proceso (según el momento en que se realice) y evaluación calificativa, formativa y formadora (según la finalidad). En resolución de problemas, esta diversidad de tipos de evaluación es importante, dada la complejidad del proceso que queremos evaluar.

La tarea fundamental para evaluar la resolución de problemas es el establecimiento de criterios (y niveles) para caracterizar qué significa sa-

Dominios	Dimensiones
Comprendo el problema	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Distingo las preguntas que he de responder y entiendo todo aquello que se me pide que haga.</li> <li>2. Distingo los datos y me aseguro de que los entiendo.</li> <li>3. Expreso el problema para entenderlo mejor haciendo un dibujo, esquema, diagrama... (lo que me parezca más adecuado) y hago pruebas si me es necesario.</li> </ol>
<i>Para cada pregunta formulada</i>	
Tengo un plan de acción	<ol style="list-style-type: none"> <li>4. Pienso alguna estrategia de resolución a partir de la representación y las pruebas o ejemplos que he hecho, y trato de aplicarlo.</li> <li>5. Encuentro los datos y los razonamientos y/o algoritmos que necesito para aplicar la estrategia.</li> <li>6. Aplico la estrategia y la escribo de manera que se entienda todo aquello que he pensado.</li> </ol>
Reviso mi tarea	<ol style="list-style-type: none"> <li>7. Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite).</li> <li>8. Una vez resuelto: <ul style="list-style-type: none"> <li>— investigo si hay otras soluciones y las encuentro. Si solo hay una, razono por qué no hay más.</li> <li>— razono si se podría hacer de otras maneras.</li> </ul> </li> <li>9. Releo lo que he hecho, y me aseguro de que lo explico todo, que respondo de manera razonada y que se entiende. Relaciono, si hace falta, con el resto de preguntas y tareas solicitadas.</li> </ol>

Tabla 1

ber resolver problemas (hasta cierto nivel). En este sentido, la evaluación debe permitir obtener la información necesaria para determinar el nivel de adquisición del proceso de resolución de problemas, pero al mismo tiempo debe ser una herramienta que contribuya a la mejora del aprendizaje de los alumnos. Es importante que se utilicen varios instrumentos de evaluación durante el proceso de aprendizaje como parte importante del mismo.

La utilización de cualquier instrumento de evaluación debe ir acompañado de una devolución de la actividad realizada por el alumno, complementada con tareas de mejora o de ampliación.

Uno de los instrumentos útiles para aplicar criterios concretos sobre la resolución de problemas son las rúbricas. Se establece una lista de acciones que conformarían una rúbrica general, de la que seleccionamos aquellas acciones de la rúbrica general, y los niveles correspondientes, que mejor se corresponden con la resolución de un determinado problema, para elaborar la rúbrica aplicable.

También es importante implicar al alumnado en la evaluación, haciéndolo partícipe de dicho proceso. Esto significa desarrollar tareas donde se expliciten los aprendizajes al inicio de un tema, tareas de revisión de las producciones de los compañeros, con la correspondiente devolución de las mismas, así como tareas de autoevaluación.

Por último, otros instrumentos que se pueden utilizar son las bases de orientación (BO) referidas anteriormente.

## ***Grupo II. Recursos para la resolución de problemas (Coordinado por Rafael Martínez Calafat y Antoni Vila Corts)***

En este grupo se comenzó por buscar el significado de *recursos* (RAE):

Conjunto de elementos disponibles para resolver una necesidad o llevar a cabo una empresa.

Se partió de la premisa de que «el valor de un recurso no es intrínseco; el valor se lo da el pro-

fesorado». Consecuentemente, llegamos a una nueva premisa: la naturaleza del problema tampoco es intrínseca. Sin embargo, posiblemente hay propuestas de problemas que se prestan más que otras a convertirse finalmente en «buenos problemas», y propuestas que difícilmente podrán acabar siendo «buenos problemas».

Así pues, en este marco, todas las fases de toma de decisiones, de planificación de intenciones, de gestión del aula..., son de importancia capital, muy por encima del recurso/problema/actividad considerado únicamente en su formulación.

Hay tres niveles de reflexión a tener en cuenta cuando se habla de «recursos para la resolución de problemas»: la selección de los problemas, la organización de la tarea asociada y los recursos externos al resolutor que implicaremos en ella y el papel del profesorado.

En el primer nivel de reflexiones, con relación a la selección/reformulación/creación de problemas singulares o de colecciones de problemas, se han abordado preguntas como:

¿Qué características intrínsecas hay que exigir a un problema para que más fácilmente pueda llegar a ser un «buen problema»?

Debe ser accesible, que no cree frustración, que se mueva en contextos próximos o que en caso contrario sea lo suficientemente atractivo como para llamar la atención del alumnado resolutor, que admita un tratamiento parcial o un primer abordaje asequibles, aunque en cualquier caso debiera ser percibido como un reto, que su resolución le produzca algún tipo de satisfacción.

¿Qué criterios genéricos pueden ser útiles para conseguir «enriquecer» una propuesta de problema?

Se consideró que «siempre» puede enriquecerse un problema, cambiando el momento en el que es propuesto, enriqueciendo el contexto de la situación, variando el formato del enunciado...

¿Qué características debiera tener una colección de problemas?

Hubo consenso en considerar que un «listado de problemas» es útil en el mejor de los casos a su autor. Y establecer categorías en función de

contenidos matemáticos puede pervertir la propia idea de problema. Se partió de la idea de que una colección de problemas, en sí misma, tan solo tiene un valor informativo de un análisis que algún experto o algún compañero/a ha realizado; en ningún caso cabe suponer que es útil para una aplicación automática a un aula distinta de la que proviene; requerirá siempre de un segundo análisis: el de aquel que quiere utilizarla.

En cualquier caso, una colección de problemas, para ser útil en el sentido anterior, debiera contener para cada problema una doble «ficha de análisis»: por una parte, un análisis didáctico, y por otra parte, un análisis matemático.

¿Es posible ejemplificar colecciones de problemas, o problemas singulares, que puedan considerarse «de referencia»?

En los términos anteriores, se sugiere a la FESPM que inicie un «banco de problemas de referencia», editado o en versión web; pero en cualquier caso con criterios de organización y de búsqueda posterior que sean realmente funcionales.

En el segundo nivel de reflexiones, la organización de la tarea y los recursos externos al resolutor que lo ayudan en el proceso, se distinguieron esencialmente cuatro categorías de recursos, definidas principalmente por su función:

- Recursos o herramientas que ayudan al alumno en alguna fase de su proceso de resolución.
- Recursos o herramientas que juegan el papel de motor o activador en la creación de ambientes de resolución de problemas, incluyendo la activación de los aspectos emocionales positivos.
- Contextos, actividades o recursos externos al recinto-aula que también pueden jugar el papel de motor en la creación de ambientes de RP.
- Estrategias o decisiones (ajenas al resolutor) que lo ayudan en el proceso de resolución: trabajo cooperativo, análisis de resoluciones, elaboración de protocolos...

También se han abordado preguntas como:

¿Disponer de material manipulativo o tecnológico ayuda de forma intrínseca (por sí solo) en

el proceso de resolución? ¿y en la creación de ambientes de RP? ¿Hay «riesgos»?

Hubo absoluto consenso a considerar que se trata de recursos imprescindibles en el aula de matemáticas, y por supuesto en la resolución de problemas, teniendo en cuenta que, cuando hablamos de recursos manipulativos y recursos tecnológicos y digitales, lo hacemos en su sentido más amplio.

Se perciben ciertos riesgos como pensar que, con la motivación subyacente en la utilización de este tipo de recursos, ya se crea un mayor y más eficaz ambiente de resolución de problemas o que por sí solos, estos recursos cambiarán la capacidad del alumnado resolutor. Otra cuestión es considerar que la resolución de problemas se trata de recursos.

Por lo tanto, la pregunta correcta sería ¿qué uso de los recursos manipulativos y tecnológicos es conveniente hacer, si realmente queremos crear estos ambientes de resolución de problemas en las clases de matemáticas?

¿Hay momentos, situaciones, fases... óptimos en el proceso de resolución de los alumnos, para facilitar el acceso a materiales manipulativos?

Se pueden mencionar numerosos ejemplos de problemas en los que la fase de exploración, de inmersión, de particularización, de experimentación, de conjeturación - verificación... son enormemente más ricas con la utilización de recursos tecnológicos y/o manipulativos. De forma «en cierta manera simétrica», en la fase de reflexión, de revisión, de generalización..., su utilización abre vías de gran recorrido. Otra ventaja residiría en la mayor capacidad para crear entornos de RP que se adapten a los distintos niveles y ritmos del alumnado.

¿El laboratorio de matemáticas es realmente un recurso útil para crear un ambiente de resolución de problemas?

Por supuesto es llevar al grado máximo el papel de los recursos antes mencionados. Y más si el laboratorio de matemáticas integra no solo la disponibilidad de materiales manipulativos muy diversos, sino también la de recursos digitales. En este caso el laboratorio podría convertirse en un motor de impulso para la ya sobradamente mencionada creación de ambiente de RP.

Sin embargo, los riesgos son mayores: hay que evitar convertir en anecdótica la presencia del alumnado en esos laboratorios, no debería reducirse su papel al de mera motivación, deberían tomarse las medidas adecuadas para evitar la fractura entre las matemáticas de dentro y fuera del laboratorio y por supuesto requiere una coordinación y un volumen de trabajo muy grande en el equipo de profesorado.

¿Son útiles y convenientes las plantillas de pautas y recomendaciones?

Sin duda tienen su utilidad en los primeros cursos de primaria; sin embargo, en cursos superiores se percibe el claro riesgo de que esas pautas puedan llegar indirectamente o involuntariamente a inculcar creencias en el alumnado de que los problemas pueden convertirse en no-problemas, incluso a pensar en que eso es lo deseable. Las bases de orientación podrían ser el recurso que cumpliera ese cometido, ya que por su naturaleza más reflexiva es muy difícil que pueda incurrir en los riesgos antes mencionados.

¿Qué tipos de contextos, actividades o recursos externos al recinto-aula también pueden jugar el papel de motor en la creación de ambientes de RP?

Los más conocidos son los concursos de resolución de problemas, aunque su imagen tiene una cierta connotación de elitista, y sin duda competitiva. Sin embargo, hay estrategias docentes que pueden convertirlos en un elemento motivador. Se han citado también ejemplos de actividades externas, convertidas en recursos motor de resolución de problemas como los paseos matemáticos, certámenes como el VIDEOMAT ...

¿Qué tipos de decisiones pueden convertirse en recursos que potencien el trabajo de resolución de problemas?

Sin duda, el papel asumido por el profesorado en su conjunto es vital; pero en este apartado distinguimos tres decisiones cuyas pueden ser consideradas claramente como recursos, de hecho se valora la conveniencia de que en la medida de lo posible se presenten como una sola: el trabajo en grupo, las valoraciones de trabajos ajenos y la elaboración de protocolos.

En el tercer nivel de reflexiones, el papel del profesorado, se considera importante centrar el debate en torno a dos ejes de reflexión:

1. Cómo mantener vivo el ambiente de resolución de problemas en el aula
2. Cómo mostrarse como modelo de conducta metacognitiva.

Se abordaron las siguientes preguntas:

¿Orientar o conducir por un camino?, ¿dudar, reflexionar, explorar, experimentar, conjeturar... , o bien informar?

Por supuesto orientar, se trata simplemente de recomendaciones. En general, se acepta que el papel del profesor durante el proceso ha de ser flexible y adaptarse a las características del grupo... pero la intervención del profesor/a ha de notarse lo mínimo posible. Debemos dar oportunidad al descubrimiento por parte de las propias alumnas/os, y sería conveniente hallar estrategias que favoreciesen las puestas en común, en el gran grupo, con relación a la observación y análisis de distintas resoluciones de un mismo problema. Sin embargo, en esta fase final, el papel del profesorado ha de ser más intervencionista, ya que es indispensable para institucionalizar el aprendizaje.

¿Preguntar, incitar, cuestionar para hacer reflexionar o aportar respuestas? ¿Animar y propiciar o exigir?

Por supuesto las primeras opciones en cada caso, en general. Es necesaria una importante actitud «receptora» y de autoaprendizaje por parte del profesorado, para ir adquiriendo estas destrezas dirigidas a acompañar al alumnado en el proceso de resolución. Es muy importante dar tiempo para la resolución, no exigir prisas. El modelo propuesto contempla la resolución en grupo tras una inmersión individual.

Por otra parte, se ha coincidido en valorar el reconocimiento de la «tarea bien hecha» por parte del alumnado, no obviando que como seres humanos funcionamos a menudo motivados por este reconocimiento.

¿Y con relación al alumnado menos capacitado?

Este modelo de creación de ambientes de resolución de problemas, y jugando el profesorado

un papel como el descrito, debería permitir por una parte la creación y trabajo con propuestas comunes diversificando los niveles de dificultad y profundidad de las soluciones esperadas. El aprendizaje a través de la resolución de problemas quizás debiera ser el modelo habitual con el alumnado menos capacitado; quizás más que con el alumnado más interesado y más capacitado.

Y para finalizar, un aspecto muy importante: el profesor/a debería ser un buen resolutor de problemas, un buen «analista» de las propuestas existentes y un buen generador de nuevos problemas.

Con esta última reflexión cerraríamos este triángulo de tres niveles de reflexiones: los problemas (obtenidos externamente o generados

por el propio profesorado) deben haber sido analizados previamente, viendo los diferentes caminos (árbol de resolución) que los alumnos pueden transitar para llegar a resolverlos. Y nuevamente aquí cabe mencionar la idea del banco de problemas como una herramienta fundamental que cada profesor, o grupo de profesores, ha de crear y mantener actualizado.

*¿Puede la federación plantear un banco de problemas? ¿Cómo se podría articular partiendo de las colecciones que ya existen? Hay que asignar roles, tareas, plazos... ¿quién?, ¿qué?, ¿cuándo?...*

*Nota.* Para ver las conclusiones completas de los grupos acceder a <<http://www.fespm.es/-Seminarios->>.

JUANA M.<sup>a</sup> NAVAS PLEGUEZUELOS  
IES Pedro Jiménez Montoya, Baza (Granada)  
<juaninavas@gmail.com>