

SENTIDO Y ELABORACIÓN DEL COMPONENTE DE COMPETENCIA DE LOS MODELOS TEÓRICOS LOCALES EN LA INVESTIGACIÓN DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS ESPECÍFICOS

Luis Puig, Universitat de València

Resumen

El marco teórico y metodológico para la investigación en matemática educativa que Filloy denominó hace años “de los Modelos Teóricos Locales” tiene como uno de sus componentes la descripción de la competencia en el dominio cuya enseñanza y aprendizaje va a ser investigado. Expondremos en este trabajo cuál es el sentido en que se usa en él el término “competencia” y cómo está relacionado con los componentes de actuación y de enseñanza del modelo, y analizaremos ejemplos de la elaboración de modelos de competencia en investigaciones realizadas por nuestro grupo. Esto nos conducirá al examen de la relación entre la competencia en un dominio matemático y el análisis fenomenológico.

Abstract

One of the components of the methodological and theoretical framework that Filloy named “Local Theoretical Models” is the description of the competence in the domain the teaching and learning of which is going to be researched. In this paper we will show in which sense is used the term “competence” in this framework, and the relation among the component of competence and the components of performance and teaching of the model. We will analyze some examples of the construction of competence models in some investigations made by our research group. This will lead us to examine the relationship between the competence in a mathematical domain and the phenomenological analysis of this mathematical domain.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, como consecuencia de iniciativas desarrolladas en el marco político europeo para el establecimiento de un programa de trabajo para la Unión Europea en el ámbito de la educación o como consecuencia de las evaluaciones desarrolladas en el marco del programa PISA, el término “competencia”, que aparece como una característica esencial tanto de esas iniciativas educativas europeas, como de PISA, es motivo de múltiples seminarios, artículos y manifiestos, uno de cuyos ejemplos es el seminario al que dirijo esta comunicación. En ella, voy a hablar del sentido en el que venimos usando ese término desde hace ya años en los trabajos de investigación en que participo, y sólo en contraste con esto de la actualidad del término y sus implicaciones para la investigación en didáctica de las matemáticas o de las consecuencias de su adopción en la organización del currículo de matemáticas.

El sentido en que lo usamos lo hemos heredado de Eugenio Filloy y lo hemos perfilado junto a él. Eugenio Filloy comenzó a desarrollar, en la década de los ochenta del siglo pasado, un marco teórico y metodológico para la investigación en Matemática

Educativa, que está ya presente implícitamente en los trabajos centrados en torno a la tesis doctoral de Teresa Rojano (Filloy and Rojano, 1984; Rojano, 1985), que se formula explícitamente por primera vez en el manuscrito inédito Filloy (1988), que se presenta en español en la revista *Enseñanza de las Ciencias* en la parte escrita por Filloy de Kieran y Filloy (1989) y en inglés ante la comunidad PME en Filloy (1990), y del que la presentación más detallada publicada es Filloy y cols. (1999).

En ese marco teórico y metodológico desempeña un papel central la idea de que lo que se elabora tanto para organizar una investigación, como para organizar los resultados de una investigación, es un Modelo Teórico Local (MTL). El carácter local viene dado por el hecho de que el modelo se elabora para dar cuenta de los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos y sólo se pretende que el modelo sea adecuado para los fenómenos observados. El carácter de modelo viene dado, entre otras cosas, por el hecho de que no se hace la afirmación fuerte de que las cosas son tal y como las caracteriza el modelo, sino sólo que, si las cosas fueran como las caracteriza el modelo, los fenómenos se producirían como se han descrito. El modelo tiene pues carácter descriptivo, explicativo y predictivo, pero no excluye que los mismos fenómenos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera (mediante otro modelo). En esto se diferencia la pretensión de la elaboración del modelo de la que suele acompañar la elaboración de una teoría, que implica la exclusión de cualquier otra teoría que se avance para explicar los mismos hechos, a la que se combatirá como errónea.

Los MTL los elaboramos para dar cuenta pues de fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje, pero además concebimos las situaciones de enseñanza y aprendizaje como situaciones de comunicación y de producción de sentido. Este punto de vista semiótico, así como el hecho de que en toda situación de enseñanza y aprendizaje de matemáticas sea preciso tener presente, como sus tres personajes fundamentales, al profesor, el alumno y las matemáticas, conduce a considerar cuatro componentes de los MTL: un componente de competencia, un componente de actuación (o de los procesos cognitivos), un componente de enseñanza y un componente de comunicación. En nuestros trabajos, a esos cuatro componentes de los MTL, para no llamarlos con la expresión larga “el componente de competencia del modelo teórico local”, por ejemplo, los llamamos el modelo de competencia, el modelo de actuación (o de los procesos cognitivos), el modelo de enseñanza y el modelo de comunicación. En lo que sigue expondré pues el sentido en que usamos el término “competencia” en nuestra expresión “modelo de competencia”, así como algunos ejemplos de la elaboración y el uso de tales “modelos de competencia”.

“COMPETENCIA” EN EL PAR COMPETENCIA / ACTUACIÓN

Si, como ya hemos dicho, consideramos los procesos de enseñanza y aprendizaje como procesos de comunicación y producción de sentido, no resultará extraño que traigamos a colación el uso que al término “competencia” (“competence”, en inglés) se le ha dado en estudios lingüísticos y semióticos. En su libro de 1965 *Aspects of the Theory of Syntax*, Noam Chomsky puso el énfasis en que, si se quiere caracterizar la estructura de la lengua o, incluso, lo que un hablante sabe de la lengua, su competencia lingüística, no sirve el estudio de cualquier colección de producciones verbales y escritas de los hablantes, que será pobre como fuente de datos, en la medida en que las producciones de los hablantes están siempre afectadas por circunstancias gramaticalmente

irrelevantes, como las limitaciones de la memoria a corto plazo, las distracciones, o el hecho de si se han consumido o no sustancias estupefacientes, por ejemplo.

La competencia, lingüística en este caso, se presenta así en oposición a las actuaciones (“performances”, en inglés) concretas en que esa competencia se actualiza, y Chomsky afirma con contundencia que la “teoría lingüística se interesa principalmente por un hablante-oyente ideal [...] que conoce su lengua perfectamente [...] y que no se ve afectado por condiciones gramaticalmente irrelevantes [...] al aplicar su conocimiento de esta lengua en actuaciones concretas” (Chomsky, 1965, p. 3). En ese sentido, la competencia es lo que explica y predice la conducta del sujeto ideal. Si en vez de referirnos a la competencia lingüística, queremos referirnos a la competencia matemática, la competencia explica y predice la conducta del sujeto epistémico, el sujeto ideal que conoce el conjunto de las matemáticas socialmente establecidas en un momento histórico determinado.

La competencia en Chomsky es por tanto una capacidad ideal, que describe la potencialidad de una lengua, y Chomsky propone describirla mediante la elaboración de una gramática, que él llama “generativa”. Una gramática generativa tiene que proporcionar un conjunto de reglas estructurales que permitan determinar la forma y el significado del conjunto potencialmente infinito de todas las expresiones posibles que puede generar el hablante ideal. Así, una gramática generativa es para Chomsky una teoría de la competencia lingüística en la medida en que, al describir la competencia del hablante ideal, permite dar cuenta de todas sus actuaciones posibles, y, por tanto, predecirlas. Ahora bien, como las actuaciones de los hablantes reales están condicionadas por otras circunstancias que no son gramaticalmente relevantes, Chomsky propone elaborar también teorías de la actuación (lingüística) de los hablantes reales. La relación entre unas y otras teorías ha de tomar en consideración, según Chomsky, que la “información sobre la competencia del hablante-oyente [...] no está presente para la observación directa ni se puede extraer de los datos por procedimientos inductivos” (Chomsky, 1965, p. 18). Sin embargo, sí que puede obtenerse mediante el procedimiento que Peirce llamó “abducción”, es decir, la inferencia de que se da un caso al suponer una regla para la que lo observado resulta de ese caso, dirección en la que el mismo Chomsky llama a investigar en su libro de 1968 *Language and Mind*.

El mecanismo de la abducción, al que Peirce en otras ocasiones llama “retroducción” o incluso “hipótesis”, es el centro de la lógica de la invención de Peirce y se opone tanto a la inducción como a la deducción. Además, está ligado a una cierta manera de concebir qué es el aprendizaje, en el sentido de que sólo puede hablarse de auténtico aprendizaje cuando media un proceso de abducción. En palabras del propio Peirce “La abducción es el proceso de formar una hipótesis explicativa. Es la única operación lógica que introduce alguna idea nueva, ya que la inducción no hace más que determinar un valor y la deducción se limita a desarrollar las consecuencias necesarias de una pura hipótesis. [...] si hemos de llegar a aprender algo alguna vez o hemos de entender acaso los fenómenos, ha de ser mediante la abducción como esto se consiga” (Peirce, C. P. 5.171). Esa noción de lo aprendido como el resultado de un proceso de abducción implica que el que aprende ha tenido que formular una regla para dar cuenta de lo observado, ha tenido que hacer una hipótesis que concierne a la gramática.

Umberto Eco, en su texto “Cuernos, cascos, zapatos: Algunas hipótesis sobre tres tipos de abducción” (Eco, 1989), es más minucioso y distingue entre tres tipos de abducción y aún introduce un cuarto tipo al que llama meta-abducción. En el primero, la abducción hipercodificada, la regla se presenta de forma automática, y, por tanto, el aprendizaje no implica más que el reconocimiento de que lo observado responde a una regla que

pertenece a un código que se conoce; en el segundo, la abducción hipocodificada, “la regla debe seleccionarse entre una serie de reglas equiprobables puestas a nuestra disposición por el conocimiento corriente del mundo (o enciclopedia semiótica)” (Eco, 1989, p. 276); en el tercero, la abducción creativa, la regla ha de ser inventada de la nada. Esta última conlleva, para Eco, un cambio de paradigma. En el terreno del aprendizaje de las matemáticas, en el que está implicado a menudo el aprendizaje de nuevos sistemas de signos, de los que el que aprende desconoce incluso el código, esta abducción creativa se hace necesaria precisamente porque el aprendizaje implica aprendizaje de código, y lo que implica es un cambio en la gramática.

Conviene tener presente, por otro lado, que, en el momento en que Chomsky escribe *Aspects of the Theory of Syntax*, la psicología dominante era la conductista para la que cualquier cosa que no fuera las conductas observables era inexistente, de forma que postular una teoría de la competencia suponía situarse fuera del paradigma conductista dominante. Así, en su libro de 1968 *Language and Mind*, Chomsky subraya que la psicología conductista “no tiene concepto alguno que se corresponda al de competencia, en el sentido en el que la competencia está caracterizada por una gramática generativa. La teoría del aprendizaje [conductista] se ha limitado a sí misma a un concepto limitado y ciertamente inadecuado de lo que es aprendido [...] Lo que es necesario [...] es un concepto de lo que es aprendido –una noción de competencia– que está más allá de los límites de la teoría psicológica conductista” (Chomsky, 1968, p. 22). Chomsky, como Piaget en la psicología o Lévi-Strauss en la antropología, pone el énfasis en la determinación de las estructuras que subyacen a las actuaciones reales, lo que en el caso de Chomsky se realiza mediante la elaboración de una gramática, concebida como una teoría de la competencia.

No voy a entrar aquí en la discusión detallada de los debates que las ideas de Chomsky han producido en el mundo de la lingüística y la semiótica, porque lo pertinente para lo que nos ocupa en este momento es tomar el uso de Chomsky del término competencia en el par competencia / actuación como un antecedente de nuestro uso. Indicaré, sin embargo, al menos que, como señala Eco, ha habido “un debate entre (i) una teoría de los códigos y de la competencia enciclopédica, según la cual una lengua (sistema de códigos interconectados), en un determinado nivel ideal de institucionalización, permite (o debería permitir) prever todas sus posibles actualizaciones discursivas, todos sus usos posibles en contextos específicos, y (ii) una teoría de las reglas de generación e interpretación de las actualizaciones discursivas” (Eco, 1981, p. 24), y que las que Eco llama “teorías de la segunda generación” recurren a la vez al estudio de la lengua como sistema y como estructura no actualizada, y al estudio del discurso, es decir, el estudio de los textos producidos en actualizaciones de esa lengua. Entonces, la hipótesis de trabajo sobre la que se apoya cualquier investigación semiótica, a saber, que cualquier “forma de comunicación funciona como emisión de un mensaje basado en un código subyacente. Es decir, que todo acto de *performance* comunicativa se apoya en una *competence* preexistente¹” (Eco, 1975, p. 11), conduce a trasladar los términos competencia y actuación del terreno de la lingüística al de la semiótica. En particular, nos permite usarlos para tratar la forma en que un lector se enfrenta a un texto y hablar de la competencia del lector (ideal) como el conjunto de las capacidades que le permiten prever todas las actualizaciones discursivas posibles.

Ahora bien, los procesos de comunicación que a nosotros nos interesan son los procesos de enseñanza y aprendizaje. Como he indicado en Puig (2003a), el intercambio de mensajes entre profesor y alumnos “se produce gracias a la lectura / transformación de esa secuencia de textos que llamamos Modelo de Enseñanza. Como consecuencia de esa

lectura / transformación se producen conceptos nuevos a través de la producción de nuevos sentidos y el establecimiento de nuevos significados para el SMS [sistema matemático de signos] (o los SMS) en que se describe y se produce lo enseñado, que incluso conllevan la elaboración de nuevos SMS” (Puig, 2003a, p. 184). Por tanto, a nosotros no nos basta con las teorías que Eco llama de primera generación, ya que no nos interesa sólo el lector ideal que construye o prevé el texto, sino también esos lectores que son los alumnos enfrentados a una situación de enseñanza y aprendizaje, en la que, a menudo, emisor (profesor) y receptor (alumno) no comparten el código en su totalidad, incluso porque es precisamente código lo que se está enseñando y aprendiendo. La caracterización de la competencia, es decir, de las capacidades del lector ideal ha de hacerse mediante una gramática que dé cuenta de sintaxis, semántica y pragmática, pero también ha de tener en cuenta una de las observaciones de Wittgenstein que he glosado en Puig (2003a).

En efecto, Wittgenstein escribió en sus *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* (parte III, 31, pág. 136 de la traducción castellana) que “la demostración cambia la gramática de nuestro lenguaje, cambia nuestros conceptos. Produce nuevas conexiones y crea el concepto de esas conexiones. (No establece que están ahí, sino que no están ahí mientras ella no las produzca.)”. Esta observación de Wittgenstein sobre el efecto de la demostración en la gramática de nuestro lenguaje y en nuestros conceptos, aunque él la hiciera a propósito del trabajo de los matemáticos, se puede parafrasear a propósito de los procesos de enseñanza y aprendizaje escolares, y apunta entonces que el que aprende, como consecuencia de su trabajo con ese conjunto de textos que es un modelo de enseñanza, modifica la gramática de los sistemas matemáticos de signos que conoce y que está poniendo en juego, y eso a pesar de que no esté inventando nuevos conceptos sino re-inventándolos (por usar la expresión de Freudenthal), ya que ese proceso de re-inención tiene un componente gramatical (con respecto a la gramática de los sistemas matemáticos de signos en que se maneja el aprendiz).

La noción de competencia de Chomsky conduce a la elaboración de teorías de la competencia formales, que en su caso adoptan la forma de gramáticas generativas. Las observaciones que hemos introducido sobre las teorías de segunda generación y la complejidad de las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas conducen a la elaboración de modelos (que no teorías) de competencia (para la investigación de procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas) que precisan que se consideren elementos difícilmente describibles formalmente, aunque puedan contener aspectos que sí se traten de esa manera. En cualquier caso, el concepto de competencia (matemática) está vinculado al concepto de actuación (matemática).

Ya hemos indicado que, considerada en el ámbito más general, el del conjunto de las matemáticas, la competencia proporciona una descripción de la conducta del sujeto epistémico de las matemáticas, es decir, ha de explicar y predecir el conjunto potencialmente infinito de todas sus actuaciones. Pero también podemos hablar, y esto es lo más habitual en nuestros trabajos, de la competencia en un dominio más o menos concreto de las matemáticas –ya sea la resolución heurística de problemas, la resolución heurística de problemas de construcción con regla y compás, la resolución algebraica de problemas, la resolución (algebraica) de problemas en el entorno de la hoja de cálculo, o las estructuras conceptuales de razón, proporción y proporcionalidad, casos que trataremos someramente más adelante–, entonces el modelo de competencia ha de proporcionar una descripción de la conducta del sujeto ideal en ese dominio, y, por tanto, ha de explicar y predecir su conjunto de actuaciones posibles en ese dominio.

Las fuentes para la elaboración de tales modelos de competencia, a la manera de las teorías semióticas de segunda generación, podrán encontrarse tanto en el análisis del dominio matemático en cuestión, como en las actuaciones concretas de los sujetos reales en ese dominio, que, por su contraposición con las actuaciones del sujeto ideal predichas por el modelo de competencia, pueden proporcionar nuevos elementos de la competencia, quizá no incorporados al modelo en el análisis del dominio matemático.

Por otro lado, las actuaciones de los sujetos reales también se explican mediante la elaboración de modelos de actuación, que dan cuenta de actuaciones, competentes o no, en el dominio matemático en cuestión, en los que las conductas observadas se describen con respecto a las predichas por el modelo de competencia.

Cuando se trata de un alumno concreto, lo que sería su modelo de actuación local, es decir, el que da cuenta de sus actuaciones observadas, no puede considerarse que da cuenta de su competencia en el dominio en cuestión, ya que sólo da cuenta de lo observado en las circunstancias en que se hayan tomado los datos. Sin embargo, abusando del lenguaje, se habla en ocasiones del “nivel de competencia” de un alumno, comparando sus actuaciones observadas con las actuaciones que predice el modelo de competencia. En la versión castellana del informe PISA 2003 (OCDE, 2005) también se habla de “nivel de competencia”, pero ahí más que de un abuso de lenguaje lo que hay es el colapso de dos conceptos al traducir dos palabras inglesas, “competence” y “proficiency”, por una sola castellana, “competencia”. En el apartado siguiente le dedicaremos un apunte al carácter borroso del término “competencia” en las versiones castellanas de los documentos de PISA 2003.

“COMPETENCIA”, “COMPETENCE” Y OTROS TÉRMINOS ASOCIADOS EN PISA 2003

Rico encuentra “cuatro significados distintos sobre la noción de competencia en el informe PISA” y señala que “ponen de manifiesto la riqueza y diversidad de matices con que se trabaja” (Rico, 2005, p. 38), aunque también avisa de que “diferenciar entre los distintos significados de la noción de competencia es importante a la hora de realizar la lectura e interpretación del Informe PISA 2003” (Rico, 2005, p. 39). A mi entender, conviene efectivamente diferenciar unas cosas y otras, pero no porque sean significados distintos de una misma noción, sino porque son conceptos distintos que se han designado con un mismo término de forma equívoca. En efecto, los cuatro significados que encuentra Rico (2005, pp. 38-39) comienzan por la “competencia como dominio de estudio [...] equivalente a alfabetización matemática”. En segundo lugar, “competencias” aparece en plural “como conjunto de procesos generales que deben ponerse en práctica al resolver problemas matemáticos”. En tercer lugar, al detallar esas competencias, cuya formulación inicial es general, con respecto a “la manera en que distintas competencias se invocan en respuesta a distintos tipos y niveles de demandas cognitivas impuestas por distintos problemas matemáticos” (OECD, 2004b, p. 40), lo que resulta en una gran variedad de competencias, éstas se agrupan en tres niveles de complejidad, con el fin de caracterizar las tareas, agrupaciones que se denominan “de reproducción”, “de conexiones” y “de reflexión” (*reproduction cluster, connections cluster y reflection cluster*, en la versión inglesa del informe). Finalmente, el informe habla de “nivel de competencia” de los alumnos, “que se determina empíricamente y se expresa en una escala” (Rico, 2005, p. 39), indicando para cada nivel las competencias generales (en el segundo sentido del término) que los alumnos habrían de tener y las tareas específicas que deberían ser capaces de realizar.

Ahora bien, si leemos la versión inglesa del informe PISA, en vez de su traducción castellana, nos encontramos con que las cosas no son así, no hay en la versión inglesa un uso equivalente de “competence” con esos cuatro significados. Examinaremos primero los casos en que sí se usa “competence”, que son los casos segundo y tercero de la lista de Rico, para ocuparnos después de los casos último y primero, en los que la versión inglesa no usa “competence”, sino “proficiency” y “literacy”, respectivamente.

En el segundo caso, el término “competencias” (“competencies” en inglés) aparece en el contexto en que se explica que “la evaluación de las matemáticas que hace PISA exige a los alumnos que se enfrenten con problemas matemáticos que están basados en algún contexto del mundo real”, para lo cual los alumnos tendrán que, entre otras cosas, “activar las competencias matemáticas pertinentes para resolver el problema” y embarcarse en un “proceso de matematización” (OECD, 2004b, p. 40).

El informe detalla a continuación cuáles son esas competencias matemáticas propias del proceso de matematización, tal y como este proceso se concibe en la tradición de la escuela holandesa freudenthaliana², a saber, “pensar y razonar; argumentar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representación; y usar el lenguaje y las operaciones simbólicos, formales y técnicos” (OECD, 2004b, p. 40). Esta lista de procesos puede calificarse, sin entrar en contradicción con lo que hemos expuesto en el apartado anterior, como elementos de la competencia matemática o competencias matemáticas, ya que son propios del sujeto epistémico, a condición de que se precisen convenientemente, ya que su formulación es excesivamente general. “Pensar” puede no tener nada que ver con la competencia matemática dependiendo de qué tipo de pensar sea, y lo mismo puede decirse, incluso con mayor motivo de “argumentar” o “plantear y resolver problemas”. Además de precisar esa lista, también es necesario no olvidar que es obviamente parcial, es decir, que no agota el conjunto de competencias que constituyen la competencia matemática, porque sólo se refiere a aquello que es específico del proceso de matematización. Ahora bien, como una lista que agote ese conjunto de competencias es excesiva en número a todos los efectos, en PISA se opta por dividir el conjunto en tres partes, como ya hemos visto: ése es el tercer sentido que señala Rico, para el que la versión inglesa usa también el término “competencies”.

El caso cuarto es de otra naturaleza. En los documentos en inglés del informe PISA, el término “competence” no se usa cuando se habla de lo que se evalúa, ni cuando se habla de los niveles en que se clasifican a los alumnos en función de sus respuestas. Lo que se evalúa es la “performance”, y los niveles que se establecen son de “performance” o de “proficiency”. Así, el capítulo segundo del informe completo de PISA 2003 (OECD, 2004b) se titula “A Profile of Student Performance in Mathematics”, y en él se habla de que “The PISA mathematics assessment sets out to compare levels of student performance in [...] four content areas” (OECD, 2004b, p. 39), y luego, en los apartados dedicados a cada una de las áreas, que también llevan en el título el término “performance” (“Student performance on the mathematics / quantity scale”, etc.), se habla de niveles de “proficiency”, y estos niveles de “proficiency” se describen en función de las “general competencies” que los estudiantes han de tener en cada nivel y las tareas específicas que han de ser capaces de hacer. Sin embargo, en la traducción castellana, los niveles de “proficiency” se convierten en “niveles de competencia”.

Es bien cierto que la palabra inglesa “proficiency”, si se consulta un diccionario inglés-español, admite la traducción “competencia”, pero el texto inglés del informe PISA se ha tomado el buen cuidado de distinguir conceptualmente entre “competence” y “proficiency”, y está por tanto pidiendo a quien lo traduzca a otro idioma que busque la manera de distinguir entre ambos conceptos usando también palabras distintas. En

efecto, cuando se introducen los niveles de “proficiency”, se dice que se han establecido “levels of proficiency on each performance scale” (OECD, 2004b, p. 28) y se explica lo que significan por referencia a las competencias subyacentes: “The grouping into proficiency levels was undertaken on the basis of substantive considerations relating to the nature of the underlying competencies. Proficiency at each of these levels can be understood in relation to descriptions of the kind of mathematical competency that a student needs to attain them” (OECD, 2004b, pp. 44-45). Aquí también la competencia matemática o las competencias matemáticas son potencialidades que se actualizan en las actuaciones de los alumnos y, en la escala que ordena esas actuaciones vistas desde el modelo de competencia, se establecen niveles en esas actuaciones. Si adoptamos la palabra castellana “pericia” para traducir “proficiency”, podemos conservar esa diferencia conceptual entre “competence” y “proficiency”, y decir, como en el texto inglés, que la agrupación de las actuaciones (performances) en niveles de pericia (proficiency) se hizo sobre la base de las competencias (competencies) subyacentes, o que la competencia (competence) se actualiza en un conjunto de actuaciones (performances), que se evalúan y permiten establecer niveles de pericia (proficiency) en las actuaciones (performances).

Usar palabras distintas (o signos distintos, o expresiones distintas) para conceptos distintos es una característica del lenguaje o de los sistemas de signos propios de cualquier disciplina científica o académica, pero lo que importa en este caso no es tanto el uso de una u otra palabra como la diferencia conceptual. Las palabras distintas subrayan la diferencia conceptual, lo que he querido subrayar con estos comentarios es que el uso de la palabra “competencia” en la expresión “nivel de competencia” borra la diferencia. Ahora bien, este borrar la diferencia conceptual no es una singularidad de la versión castellana del informe PISA. Las versiones francesa (OCDE, 2004a) y alemana (OECD, 2004c) usan también un mismo término en lugar de los dos ingleses “competence” y “proficiency”: “proficiency level” aparece en la versión francesa como “échelle de compétence” y en la versión alemana como “Kompetenzstufe”.

En cuanto al primero de los casos de la lista de Rico, ahí sí que la versión castellana es absolutamente singular. Lo que la versión castellana denomina “la competencia matemática” en el original inglés se llama “mathematical literacy”. Es bien cierto que el término inglés “literacy”, literalmente la capacidad de leer y escribir, pero usado en el sentido más amplio de la capacidad que da los conocimientos socialmente requeridos, no tiene equivalente directo en español. Para el que tiene la capacidad de leer y escribir, existe el adjetivo “alfabetizado”, que en realidad es un participio pasado y, por tanto, connota que se ha sido sujeto pasivo de una acción, y, en el sentido más general de “literacy”, el adjetivo “letrado”, que suele usarse con connotaciones irónicas, o el adjetivo “cultivado”. En un primer momento, se optó por traducir “mathematical literacy” por “alfabetización matemática”, que es una acción en vez de una capacidad, pero, como indica Rico, “En los sucesivos documentos se produce un deslizamiento de términos, desde los primeros a los últimos informes, que comienzan por destacar la *Alfabetización* y concluyen con un mayor uso del término *Competencia Matemática*” (Rico, 2006, p. 282). “Competencia” tiene efectivamente la ventaja sobre “alfabetización” de no ser una acción, pero la opción de usar de nuevo el término “competencia” para otro término inglés distinto de “competence”, en este caso “literacy”, borra de nuevo diferencias conceptuales en el texto castellano.

“Mathematical literacy” no se refiere a la competencia matemática, en el sentido de lo que sabe el sujeto epistémico. De hecho, el texto inglés dice que se trata de “un cierto concepto de *mathematical literacy* que tiene que ver con la capacidad de los estudiantes

para analizar, razonar y comunicar efectivamente, al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en una variedad de situaciones, que implican conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos u otros conceptos matemáticos” (OECD, 2004b, p. 37). En este caso, los textos francés y alemán no han coincidido con el castellano en usar también los equivalentes a “competencia”, sino que han optado por “culture mathématique” y “mathematische Grundbildung”, “cultura matemática”, en ambos casos (“fundamental”, en el caso alemán). A mi entender, esta opción por “cultura matemática” recoge bien la idea de una cierta “mathematical literacy” del texto inglés, la propia de las personas “cultivadas” en matemáticas en el sentido indicado por PISA, y hubiera evitado acumular más significados en el término “competencia”.

Por otro lado, conviene señalar también que el término “performance”, que he presentado como pareja de “competence” en la terminología lingüística y semiótica, en la versión castellana del informe PISA aparece traducido como “rendimiento³” y no como “actuación”. No se habla, por tanto, de las “actuaciones de los alumnos”, sino del “rendimiento de los alumnos”. Esta traducción no es inusual en la bibliografía pedagógica y psicológica (como tampoco lo es la traducción “desempeño” en el español mexicano), pero no resulta adecuada para “performance” en el par “competence / performance”, ni tampoco cuando con “performance” nos estamos refiriendo a una actuación concreta de un alumno, a un conjunto de actuaciones de uno o más alumnos, o incluso a un modelo de actuación. “Rendimiento” implica que las actuaciones (“performances”) se evalúan de alguna manera. En la versión francesa del informe PISA (OCDE, 2004a), el término usado es “performance”, ya que “performance” es también una palabra francesa, y en la versión alemana (OECD, 2004c), es “Leistung”, también usado para traducir “performance” en la lingüística y la semiótica.

COMPONENTES DE COMPETENCIA DE MODELOS TEÓRICOS LOCALES

Examinado someramente el concepto de competencia desde el punto de vista lingüístico y semiótico, así como en el marco teórico de los modelos teóricos locales, y contrastado con la aparición del término “competencia” en las distintas versiones del informe PISA, mencionaremos en lo que sigue características particulares de algunos de los modelos de competencia que hemos elaborado para su uso en nuestras investigaciones.

Nuestras investigaciones han versado siempre sobre procesos de enseñanza y aprendizaje en dominios concretos de las matemáticas y hemos procurado tener presente lo que en dichos procesos es característico de que lo que se está enseñando y aprendiendo sea precisamente matemáticas y no otra cosa. En nuestros modelos de competencia no pueden aparecer, por tanto, competencias con enunciados tan generales como los que hemos encontrado en el informe PISA. Así, “plantear y resolver problemas” no ha sido nunca una competencia en ninguno de nuestros trabajos, precisamente porque varios de ellos han versado sobre la enseñanza y el aprendizaje de aspectos de algunos de los mundos⁴ de la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas escolares, de modo que nuestro trabajo consistía, entre otras cosas, en determinar en qué consiste la competencia en resolver problemas, es decir, cuáles son los elementos que la componen. Lo que hemos hecho en todos los casos para elaborar el modelo de competencia, una vez delimitado el mundo de la resolución de problemas que íbamos a estudiar, y la clase de problemas, si era el caso, ha sido describir qué ha de poner en juego un resolutor ideal para resolver los problemas.

Así, en Puig (1996), cuyo capítulo 3 se titula precisamente “El modelo de competencia”, exponemos los resultados de una investigación sobre lo que en ella

llamamos el “estilo heurístico de resolución de problemas”. Para caracterizar la competencia correspondiente a ese estilo heurístico, usamos dos fuentes, que, en cierta manera, tienen que ver con las que Eco señala a propósito de las teorías semióticas de segunda generación. Por un lado, interpretamos el modelo de fases de Polya, sus sugerencias para guiar la resolución y algunas de las entradas de su diccionario de heurística (Polya, 1945) como una descripción de la conducta del resolutor ideal, y, por tanto, elementos del modelo de competencia. Por otro lado, interpretamos los “componentes del conocimiento y la conducta” introducidos por Schoenfeld (1985) para dar cuenta de las conductas observadas en resolutores reales, y en particular las conductas que conducen al fracaso en la resolución, como elementos de un modelo de actuación, e invertimos el sentido de los componentes que en el modelo de Schoenfeld servían para explicar los fracasos, postulándolos como otros elementos de la competencia, que no estaban presentes en los análisis de Polya.

La lista de elementos del modelo de competencia, que en ese libro subrayamos como los centrales del estilo heurístico está formada por destrezas con potencial heurístico, sugerencias heurísticas, herramientas heurísticas, métodos de resolución con contenido heurístico, patrones plausibles, el gestor instruido, y una concepción de la naturaleza de la tarea de resolver problemas según la cual ésta se realiza con fines epistémicos (Puig, 1996, p. 44).

De esa lista, los dos últimos elementos corresponden a lo incorporado por Schoenfeld a lo que nosotros llamamos su modelo de actuación. En ese modelo lo que en realidad se atestigua es cómo la falta de gestión del proceso o la mala gestión del proceso permite explicar la conducta que conduce a resolutores con un buen dominio de otros de los elementos de la competencia a no tener éxito en la resolución. Nuestro “gestor instruido” es la versión competente de esa carencia establecida por Schoenfeld como elemento de explicación de conducta no competente.

Los elementos de nuestro modelo de competencia provienen pues de dos fuentes: una que examina al sujeto ideal y otra a los sujetos reales. El resultado es un conjunto de lo que sabe, sabe hacer, sabe que sabe, sabe que sabe hacer, sabe que ha de hacer, etc. el resolutor ideal, es decir, un conjunto de competencias que tienen que ver con aspectos que en otros trabajos se separan como cognitivos, metacognitivos y creencias, y que nosotros tratamos conjuntamente.

No entraremos en más detalles de la descripción de esos elementos, que, en parte, pueden encontrarse en Puig (1996), sólo señalaré que es necesario, para que el modelo de competencia sea operativo, no limitarse a enumerar una lista como la anterior, sino entrar en los detalles. Así, por ejemplo, la competencia en el uso de herramientas heurísticas consiste en términos generales en saber que su uso transforma el problema, cuál es la relación entre el problema original y el transformado, qué puede usarse de la resolución del transformado para resolver el original y cómo se transforma el problema original como consecuencia de lo que se use de la resolución del transformado. Además, todo eso que está enunciado en términos generales tiene una concreción específica para cada herramienta heurística, y variantes en función de si el problema que se ha de resolver es un problema de encontrar o un problema de demostrar. Por otro lado, el conjunto de características del uso de cada herramienta heurística, los espacios de problemas que generan y las relaciones entre ellos determinan de forma explícita cuáles son las tareas en que ha de estar instruido el gestor para ser de pleno derecho un elemento del modelo de competencia. De modo que los elementos de la competencia no son simplemente una lista, sino que están combinados formando una estructura (éste es

uno de los sentidos que tiene nuestro uso del término “modelo”: un conjunto con estructura).

El modelo de competencia es uno de los componentes del modelo teórico local que se elabora para la investigación y está, por tanto, relacionado con los otros componentes del modelo, en particular con los componentes de actuación y enseñanza. Ya hemos visto que elementos del modelo de actuación pueden ser la fuente de elaboración de elementos del modelo de competencia, pero además las actuaciones de los alumnos en la investigación las analizamos con respecto a la conducta competente y las describimos con las categorías que proporcionan los elementos del modelo de competencia.

El modelo de enseñanza, por su parte, lo elaboramos en la investigación con el fin de que los alumnos acaben siendo competentes en el sentido que define la competencia el modelo de competencia, y lo ponemos a prueba en la investigación examinando las actuaciones de los alumnos tras ser enseñados con tal modelo de enseñanza con respecto al modelo de competencia. Además, en su elaboración tomamos también en consideración lo que nos dice el modelo de actuación sobre cómo se comportan los alumnos.

En Puig (1996) el modelo de competencia corresponde al estilo heurístico de resolución de problemas, cuando no se toma en consideración el contenido concreto de los problemas que se están resolviendo, pero ya en ese trabajo se apunta que hay clases de problemas para las que alguno de los elementos desempeñan un papel crucial en la determinación de la competencia. Es el caso de las clases de problemas para las cuales hay métodos de resolución (con contenido heurístico) establecidos. Entonces puede postularse como resolutor ideal aquél cuya competencia es la que da el método y cuya conducta está por tanto predicha, explicada y descrita por los pasos del método.

En Siñeriz y Puig (2006) está descrito un modelo de competencia de este estilo para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. Los elementos del modelo de competencia recién examinado son pertinentes también para este caso, pero desempeña aquí un papel central uno de esos elementos, a saber, el que se refiere a los métodos de resolución con contenido heurístico. En concreto, las competencias centrales son las que dictan cuatro métodos de resolución: tres que son propios de esa clase de problemas (el método de los dos lugares, el método de la figura auxiliar y el método de la figura semejante) y uno que es de índole más universal, el método de análisis y síntesis, que adopta en esta clase de problemas una versión específica que sirve para organizar el uso de los otros tres métodos. El examen detallado de esos métodos desde el punto de vista de las competencias implicadas en su uso es, en este trabajo, la fuente de elaboración de los elementos cruciales del modelo de competencia.

Por otro lado, para la familia de los problemas aritmético-algebraicos de enunciado verbal, el método de resolución con contenido heurístico que es pertinente analizar para determinar elementos del modelo de competencia es el método cartesiano, que ya habíamos analizado con otros fines en Puig y Cerdán (1989) y habíamos usado para el análisis de la conducta de los resolutores en Puig (1996). Con el fin de perfilar un tal modelo de competencia hemos realizado un análisis histórico del método (Puig, 2003b; Puig and Rojano, 2004), que nos ha conducido a fijar una descripción de sus pasos, que constituyen otros tantos elementos de competencia. Ahora bien, en este caso, el asunto es más complejo por varios motivos. En primer lugar, el método cartesiano determina lo que hay que llamar competencia *algebraica* (en la resolución de esa clase de problemas) y a la naturaleza algebraica del método hemos dedicado una parte importante de nuestros estudios. Esto tiene dos consecuencias: por un lado, introduce la variante, que

hasta ahora no hemos contemplado, de la posibilidad de determinar la competencia en un dominio de más de una manera, porque también se puede hablar de una competencia *aritmética* en la resolución de esa clase de problemas, que estaría modelada por el método de análisis y síntesis, como puede verse en nuestros análisis ya clásicos, que aparecen en Puig y Cerdán (1989, 1990). Lo que se espera del sujeto epistémico de las matemáticas actuales es que despliegue su competencia algebraica para resolver esos problemas, pero no se esperaría eso para el sujeto epistémico de las matemáticas en otros momentos históricos o en otras culturas. Por otro lado, ese modelo de competencia aritmética será pertinente también por la posición relativa de la aritmética y el álgebra, y sus sistemas de signos, a lo largo del currículo escolar, ya que el uso del método cartesiano está ligado al uso del sistema de signos del álgebra, que ha de ser aprendido en un determinado momento del currículo escolar.

Esta característica del método cartesiano nos lleva al segundo motivo de complejidad del asunto: la competencia que define el método cartesiano presupone la competencia en el sistema de signos del álgebra. Es decir, necesitamos también incorporar al modelo de competencia de lo que llamaremos la resolución algebraica de problemas (de esa familia), además de lo que determinan los pasos del método, la competencia en el sistema de signos del álgebra.

En este caso, es posible ser chomskiano y recurrir a la elaboración de una gramática generativa del lenguaje del álgebra, como hizo Kirshner en su tesis doctoral (Kirshner, 1987), en algún sentido continuó Drouhard en la suya (Drouhard, 1992), y han extendido Solares (2002) y Arnau (2004) en los trabajos preparatorios de sus doctorados respectivos en ejecución. En el caso de Arnau, como su trabajo doctoral en curso trata sobre la resolución (algebraica) de problemas con el apoyo como entorno de trabajo de la hoja de cálculo, el modelo de competencia ha de contener elementos más variados.

En efecto, la gramática del sistema de signos del álgebra ha de acompañarse de una descripción del sistema de signos de la hoja de cálculo, que sólo en parte puede hacerse como una gramática generativa por la multiplicidad de formas de escribir las expresiones en la hoja de cálculo. Por otro lado, el método cartesiano define un modelo de competencia que es el que quiere la enseñanza, pero el modelo de enseñanza que se pone en juego en la investigación conlleva la competencia definida por otro método de resolución que utiliza la hoja de cálculo y que se plantea como intermediario en el aprendizaje del método cartesiano. Ese otro método que llamamos “método de la hoja electrónica de cálculo” (MHEC) define un sujeto competente propio del modelo de enseñanza, cuyas competencias tienen el carácter de provisionalidad que les confiere el hecho de que habrán de abandonarse en favor de las competencias propiamente algebraicas, pero que localmente funciona como sujeto ideal.

Todos estos ejemplos de variantes en la forma de elaborar el modelo de competencia provienen de investigaciones en el campo de la resolución de problemas, en el que las competencias que hemos considerado son las que tienen que ver con los procesos y con los sistemas de signos implicados. No hemos considerado en estos casos competencias ligadas a conceptos o estructuras conceptuales. En Fernández Lajusticia y Puig (2002) exponemos la elaboración de elementos de un modelo de competencia de la razón, la proporción y la proporcionalidad, derivado de los análisis de Freudenthal (1983), presentados de manera formal.

Lo que hicimos en ese trabajo, que se usó en la tesis doctoral de Alejandro Fernández Lajusticia, tiene que ver con la concepción de la naturaleza de las matemáticas que

exponemos en Puig (1997) interpretando a nuestra manera ideas de Freudenthal (1983). En efecto, si los conceptos matemáticos se conciben como medios de organización de fenómenos del mundo de nuestra experiencia (entendiendo que el mundo de nuestra experiencia incluye también, por ejemplo, los mundos posibles que crean las propias matemáticas), entonces el sujeto epistémico de las matemáticas tiene las competencias que le permiten organizar los fenómenos de la manera como los conceptos matemáticos los organizan. La elaboración del modelo de competencia de un concepto o estructura conceptual, es decir, la descripción de los poderes del sujeto epistémico, ha de tener por tanto como un componente fundamental el análisis fenomenológico.

Rico (2004) ya señaló hace dos años en un simposio de nuestra sociedad que la concepción de la naturaleza de las matemáticas que subyace al proyecto PISA es de raíz freudenthaliana, y, en particular, que los conceptos y estructuras matemáticas se conciben en él como medios de organización de fenómenos del mundo de nuestra experiencia. En el apartado siguiente apuntamos, para concluir, algunas implicaciones curriculares de esta concepción, que no es de hoy, y su expresión actual en términos de competencias.

“COMPETENCIAS” VS “CONTENIDOS” EN EL DISEÑO Y DESARROLLO DEL CURRÍCULO

En mi texto sobre análisis fenomenológico (Puig, 1997) ya señalé que Freudenthal no desarrolló sus ideas sobre la naturaleza de las matemáticas con él ánimo de elaborar una filosofía de las matemáticas, sino con la intención de ofrecer un fundamento teórico a la investigación y el desarrollo curricular que lideraba, en lo que hoy en día se llama en su honor Instituto Freudenthal. Indiqué allí que “Freudenthal adopta una toma de partido didáctica: el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la constitución de objetos mentales y sólo en segundo lugar la adquisición de conceptos —en segundo lugar tanto temporalmente como en orden de importancia” (Puig, 1997, p. 75). Ahora bien, los objetos mentales buenos que el currículo se propone que los alumnos constituyan como consecuencia de la enseñanza se caracterizan porque organizan fenómenos que los conceptos correspondientes organizan y lo hacen de forma similar (aunque no estén perfilados como conceptos), de manera que son la base sobre la cual los conceptos pueden adquirirse por los alumnos, de forma que éstos aparezcan para ellos íntimamente ligados a la organización de fenómenos del mundo.

Traigo esta cuestión a colación porque desde mi punto de vista la oposición entre contenidos conceptuales y competencias en el terreno curricular es una falacia. Lo que es crucial es la concepción de la naturaleza de las matemáticas subyacente y las consecuencias que de ella se derivan. Si se sostiene una concepción como la expuesta en Puig (1997), que es de la misma familia de raíz freudenthaliana que la que se describe en el marco teórico de PISA (OECD, 2003), lo que el currículo de matemáticas ha de establecer es que se trata de enseñar a organizar campos de fenómenos. Ahora bien, las competencias que permiten organizar los fenómenos no pueden obtenerse de un análisis de los fenómenos, sino de un análisis fenomenológico de los conceptos que los organizan. Lo que el currículo pretende no es enseñar los fenómenos, sino enseñar a organizar los fenómenos; pero además no pretende enseñar a organizar los fenómenos de cualquier manera, sino mediante los medios de organización histórica, social y culturalmente establecidos para organizar esos fenómenos, es decir, mediante los conceptos matemáticos. El currículo no pretende enseñar “espacio y forma”, sino geometría. Eso sí, geometría como conjunto de medios de organización de los

fenómenos del espacio y la forma; y no geometría como conjunto de verdades inmutables sobre objetos ideales.

Oponer competencias a contenidos conceptuales es, en este sentido, una falacia. Ahora bien, para que realmente sea una falacia es necesario que los contenidos matemáticos se conciban como medios de organización de fenómenos. Otras concepciones de la naturaleza de las matemáticas y los correspondientes currículos y prácticas escolares basados en ellas justifican que se plantee tal oposición.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arnau, D. (2004). *El método de la hoja electrónica de cálculo para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. Un estudio con alumnos de primer curso de secundaria* Trabajo de investigación del programa de doctorado del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València
- Chomsky, N. (1965). *Aspects of the Theory of Syntax*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Chomsky, N. (1968). *Language and Mind*. New York: Harcourt Brace & World, Inc.
- de Lange, Jan. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW & OC.
- Drouhard, J.-Ph. (1992). *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. Thèse doctoral, Université Paris 7.
- Eco, U. (1975). *La estructura ausente. Introducción a la semiótica*. Traducción castellana de Francisco Serra Cantarell. Barcelona: Lumen.
- Eco, U. (1981). *Lector in fabula. La cooperación interpretativa en el texto narrativo*. Traducción castellana de Ricardo Pochtar. Barcelona: Lumen.
- Eco, U. (1989). Cuernos, cascos, zapatos: Algunas hipótesis sobre tres tipos de abducción. En Eco, U. y Sebeok, T. A. (Eds.) *El signo de los tres. Dupin, Holmes, Peirce*. Traducción castellana de E. Busquets (pp. 265-294). Barcelona: Lumen.
- Fernández Lajusticia, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral. Universitat de València.
- Fernández Lajusticia, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5(2), pp. 397-416.
- Filloy, E. (1988). *Theoretical Aspects of PME Algebra Research*. Manuscript. Institute of Education. University of London.
- Filloy, E. (1990). PME Algebra Research. A working perspective. In G. Booker et al. (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. PII 1-PII 33). Oaxtepec, Morelos, México.
- Filloy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 year olds). In J. Moser (Ed.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, WI.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias*, (7) 229-240.
- Kirshner, D. (1987). *The grammar of symbolic elementary algebra*. Unpublished doctoral dissertation, University of British Columbia, Vancouver.
- OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OECD.
- OCDE (2004a). *Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003*. Paris: OCDE.
- OECD (2004a). *First Results from PISA 2003. Executive Summary*. Paris: OECD. [Traducción castellana de Encarna Belmonte, OCDE (2004b). *Aprender para el mundo de mañana. Resumen de resultados PISA 2003*. Madrid: MEC / INECSE.]
- OECD (2004b). *Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003*. Paris: OECD. [Traducción castellana de María Luisa Rodríguez Tapia, Victoria Gordo del Rey y Javier García Prieto, OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.]
- OECD (2004c). *Lernen für die Welt von Morgen. Erste Ergebnisse von PISA 2003*. Paris: OECD.
- Peirce, C. S. (1931-58). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss (vols. 1-6) and by Arthur Burks (vols. 7-8). Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press. [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas*. (México: Trillas, 1965.)
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, L. (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori / ICE.
- Puig, L. (2003a). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En Filloy, E. (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México, DF: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV.
- Puig, L. (2003b). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En Castro, E.; Flores, P.; Ortega, T.; Rico, L. y Vallecillos, A. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.
- Puig, L. and Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1989). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Ed. Síntesis.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los

- problemas verbales. En Filloy, E. y Rojano, T. (Eds.) *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48.) Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.
- Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas : proyecto PISA/OCDE. En Castro, E. y de la Torre, E. (Eds.) *Investigación en educación matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 89-102) A Coruña: Universidade da Coruña.
- Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En *VI Seminario de Primavera. La enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA*. Madrid: Fundación Santillana.
- Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, núm. extraordinario, pp. 275-294.
- Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad)*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Siñeriz, L. y Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 323-331) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.
- Solares, A. (2002). *La sustitución algebraica. Extensión de significados y transformaciones*. Memoria para el examen pre-doctoral. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México.
- Treffers, A. (1987) *Three Dimensions (a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project)*. Dordrecht: Reidel.
- Wittgenstein, L. (1956). *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Edited by G. H. von Wright, R. Rhees, and G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell. (Trad. española de Isidoro Reguera, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza, 1987.)

NOTAS

¹ En esta cita, Eco y su traductor castellano han dejado los términos “competence” y “performance” en inglés. Yo he usado siempre “actuación” como traducción castellana de “performance” cuando hace pareja con “competence”, y así lo estoy haciendo también en este texto. Sobre otras traducciones al español del término “performance”, ver más adelante.

² Es decir, con los dos componentes “matematización horizontal” y “matematización vertical”, que describieron hace ya años Treffers (1987) y de Lange (1987), este último el actual co-presidente del grupo de expertos de matemáticas de PISA.

³ “Rendimiento” se usa para traducir “performance” en las traducciones castellanas de los informes PISA, pero no sólo para traducir ese término. En el *Executive Summary* de los resultados de PISA 2003 (OECD, 2004a), el apartado “How PISA measured student performance in mathematics”, contiene una figura titulada “Student proficiency in mathematics” en la que se describen “six levels of proficiency in mathematics”. La versión castellana del Executive Summary traduce “Cómo ha medido PISA 2003 el rendimiento de los alumnos en matemáticas”, “Rendimiento de los alumnos en matemáticas” y “seis niveles de competencia en matemáticas”, respectivamente (OCDE, 2004b), con lo que “rendimiento”

sirve para traducir tanto “performance” como “proficiency”, y “proficiency” aparece traducido tanto por “rendimiento” como por “competencia”.

⁴ En Puig (1996) se indica que la noción de “mundo de la resolución de problemas en los sistemas escolares” la introducimos para poder dar cuenta de la diversidad de funciones que la resolución de problemas puede adoptar en el currículo de matemáticas y determinar cuál de esas funciones es la que se va a estudiar en la investigación (o cuáles, si es el caso). Mundos de la resolución de problemas son el de la pura resolución de problemas (cuando la función de los problemas es la enseñanza de la heurística, es decir, de aquello que en la resolución de problemas es independiente del contenido), el de la resolución de problemas en la que está implicado un proceso de matematización horizontal y vertical (cuya función es precisamente la enseñanza de ese proceso), el de las clases de problemas que se plantean y resuelven con el fin de enseñar conceptos o estructuras conceptuales, y otros (ver Puig, 1996, pp. 13-14).