

# GEOMETRÍA DINÁMICA COMO ACTUALIZACIÓN DIDÁCTICA DE LA EVOLUCIÓN CONCEPTUAL DE LA GEOMETRÍA

**Sergio Rubio-Pizzorno y Gisela Montiel**

*Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav)*

sergio.rubio@cinvestav.mx (zergiorubio.org), gmontiele@cinvestav.mx

En este trabajo pretendemos reflexionar sobre la evolución conceptual de la geometría y su impacto en el dominio denominado Didáctica de la geometría, la cual ha decantado en el surgimiento de los ambientes de geometría dinámica. La manera de desarrollar nuestro objetivo es a través de la investigación de la naturaleza de la geometría, relativa a ciertas áreas del saber humano. Específicamente, abordamos el estudio de la naturaleza epistémica, epistemológica, filosófica y digital de la geometría, para concluir que el arrastre en el contexto de la geometría dinámica representa una síntesis y convergencia de todos estos aspectos.

## INTRODUCCIÓN

Desde un punto de vista social (relativista, situacional, flexible), en este trabajo reconocemos que los grupos sociales han concebido y conciben el espacio, las formas y la medida de una manera propia, desarrollando una conceptualización particular de estos elementos, y que les ha permitido generar una manera de relacionarse con su entorno y los objetos que lo componen. Dichos elementos pueden encontrar conexión o correspondencia en diferentes grupos sociales o ser diametralmente opuestos. En general, nos referimos a todas estas concepciones y conceptualizaciones como razonamiento visoespacial (Sinclair, 2016), como idea general que alberga todas las maneras de entender y relacionarse con el espacio, las formas y la medida.

Una de estas conceptualizaciones corresponde a la geometría, entendida como el área de conocimiento humano que estudia el espacio, las formas y la medida desde una perspectiva y tradición euclidiana. Debido a su carácter oficial, es de nuestro interés estudiar y problematizar la geometría, para, en una primera instancia, identificar sus piezas claves y constituyentes; y, como objetivo ulterior, discernir entre la geometría y otras maneras de conceptualizar el espacio, reconociendo aquello que le es propio a cada una de ellas y lo que es común entre ellas.

## ANÁLISIS DOCUMENTAL

La problematización presentada en este escrito se desarrolla mediante la idea de reconocer *cuál es la naturaleza de la geometría relativa a cierta área del saber humano*, con lo cual declaramos nuestra postura al considerar que las construcciones humanas poseen distintas naturalezas, según la perspectiva con la cual se esté analizando. Por ejemplo, en el fútbol podemos identificar una naturaleza colectiva del juego llamada táctica, una naturaleza individual de preparación física llamada técnica, una naturaleza histórica del juego que ubica su nacimiento oficial en Inglaterra, entre muchas otras que se pueden identificar.

De manera específica, este trabajo considera el estudio de la naturaleza de la geometría desde las perspectivas: epistémica, epistemológica, filosófica y digital. Luego de exponer cada una de ellas, se identifican puntos en común entre distintas naturalezas, con lo cual, en un tercer nivel de análisis, se identifica y declara una manera en la cual todas ellas convergen.

### Naturaleza epistémica de la geometría

Al hablar de la naturaleza epistémica de la geometría nos referimos específicamente al conocimiento geométrico construido metodológica y racionalmente, a través de sus objetos y representaciones. En este sentido, Rubio-Pizzorno y Montiel (2017a) proponen que los objetos geométricos se elaboran siguiendo una estructura discursiva que pone en juego los aspectos teóricos y concretos (Navarro, 2005; Vega, 2013); con base en proposiciones, definiciones, postulados y comunes sentencias; empleando instrumentos que encarnan las herramientas teóricas propuestas por Euclides. A los diagramas generados de esta manera les denominan construcciones euclidianas. Estas manifiestan propiedades teóricas y gráfico-espaciales, como características esenciales (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017b).

Debido a la manera en que son elaborados, estos objetos geométricos se diferencian de otras representaciones concretas por su estatus de precisión y exactitud (Rubio-Pizzorno y Montiel, 2017c), el cual es relativo a la tarea de obtener un objeto geométrico declarado *a priori*, como resultado de un proceso de construcción. Este estatus es reflejo de la relación intrínseca entre los aspectos teóricos y concretos de la geometría, que se manifiestan en todos sus ámbitos y de diferentes maneras. En el caso particular de la precisión al

construir los diagramas para que correspondan exactamente a lo que se quería construir, ella incide completamente en la práctica geométrica de postular verdades universales, a partir del estudio de objetos concretos.

### **Naturaleza epistemológica de la geometría**

La geometría es un área del conocimiento humano que, en primera instancia, se inspira en la experiencia para luego desarrollar sus elementos teóricos al respecto. Como dice Meserve (1983), la geometría es el “estudio de propiedades del espacio físico en el cual vivimos”.

Por otra parte, Piaget y García (1992) reportan la noción de transformación como clave para la evolución conceptual de la geometría, ya que gracias a esta es posible formular completamente el concepto de geometría como estructuras que persisten a través de los cambios en sus aplicaciones particulares, lo cual permite establecer una jerarquización entre las distintas geometrías (euclidiana, sintética, no euclidianas, proyectiva) y lograr la reformulación más importante de esta área del saber.

### **Naturaleza filosófica de la geometría**

Entendemos la naturaleza filosófica de la geometría como las explicaciones racionales dadas en un nivel general, que orientan el conocimiento de la realidad y el proceder humano.

En este sentido, Cedrés (2009) ensaya una respuesta a la pregunta: “¿cómo se ‘pretende’ que conclusiones geométricas con un pretendido valor de necesidad y universalidad descansen en el trazado de figuras particulares?”, la cual pone de manifiesto la necesidad de una facultad de contemplación de los objetos geométricos, pero, sobre todo, de generación de verdades geométricas universales, las cuales son producidas mediante un proceso de construcción de representaciones geométricas concretas, y la abstracción de esencias que estos diagramas están instanciando.

### **Naturaleza digital de la geometría– Geometría dinámica (GD)**

En cuanto a la naturaleza digital, nos basamos en la literatura especializada que estudia al arrastre como elemento nuclear de las investigaciones sobre fenómenos didácticos relativos a la geometría, ya que se reconoce como la característica definitoria de la GD.

Se presentan los resultados emanados del estudio de la naturaleza digital de la geometría, evidenciando su relación con aspectos de esta reportados en otras naturalezas.

*Aspecto epistémico-epistemológico.* La geometría se inspira en la experiencia concreta y los datos empíricos, para desarrollar sus elementos teóricos. De esta manera, sus objetos manifiestan tales propiedades (gráfico-espaciales y teóricas). Por tanto, para la actividad didáctica es recomendable poner atención a las experiencias cotidianas de los estudiantes y los casos concretos del trabajo geométrico.

Al respecto, el arrastre se presenta como crucial en la dialéctica entre lo perceptual y lo teórico, relación que caracteriza a todo el razonamiento geométrico (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002).

*Aspecto epistemológico-filosófico.* Cuando la noción de transformación dejó su estado embrionario fue posible caracterizar completamente las geometrías mediante estructuras algebraicas determinadas por un grupo de transformaciones, los invariantes que se identifican al aplicar las transformaciones, que en conjunto configuran el espacio y sus características. Uno de los resultados de esta forma de estructurar las geometrías es la característica dinámica de la geometría dada por el par transformación-invariante, la cual se refleja en las propiedades dinámicas de sus objetos.

El aspecto dinámico de los ambientes de GD está dado por el arrastre, que puede inducir la noción de transformación geométrica o afin (Goldenberg y Cuoco, 1998).

*Aspecto epistémico-filosófico.* Mediante el proceso de construcción de un diagrama geométrico se proporcionan ciertos invariantes, los cuales permiten representar una clase de objetos, según el grado de precisión del proceso.

El estatus de precisión y exactitud de las construcciones euclidianas se vislumbra como la característica de los objetos geométricos, que les permite representar una clase de ellos, a través de la *identificación de esencias*.

En los ambientes de GD, todos los objetos manifiestan tanto las propiedades que les son atribuidas a partir de su proceso de construcción como las propiedades teóricas que subyacen a la geometría euclidiana. Tales propiedades se pueden identificar como invariantes, cuando se aplica el arrastre (Leung, 2015).

## CONCLUSIÓN

En síntesis, el uso del arrastre conocido como “prueba del arrastre” consiste en mover un punto libre o dependiente con el fin de ver si el diagrama construido mantiene una característica inicial. Si es así, entonces el diagrama pasa la prueba, puesto que mantiene invariante la característica atribuida; de lo contrario, el diagrama no fue construido de acuerdo a las propiedades geométricas que se pretendía que tuviese. En este uso del arrastre es posible identificar aspectos epistémicos (poner en juego la relación dialéctica entre elementos teóricos y concretos, al manipular diagramas para identificar invariantes), epistemológicos (emplear el par transformación-invariante, como propiedad dinámica, en el trabajo geométrico) y filosóficos (dotar de propiedades geométricas a los diagramas, mediante un preciso proceso de construcción, y abstraer la esencia de toda la clase de objetos geométricos que el diagrama específico está representando). De esta manera, concluimos que la prueba del arrastre emerge como convergencia y síntesis de aspectos epistémicos, epistemológicos y filosóficos, en los ambientes de geometría dinámica.

## REFERENCIAS

- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 34(3), 66-72. <http://doi.org/10.1007/BF02655708>
- Cedrés, Á. J. (2009). Construcción, necesidad e intuición de esencias en geometría. *Scientiae Studia*, 7(4), 595-617. doi: 10.1590/S1678-31662009000400004
- Goldenberg, P. y Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-367). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Leung, A. (2015). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. En S. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451-469). Suiza: Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-319-17187-6
- Meserve, B. (1983). *Fundamental concepts of geometry*. New York, EUA: Dover Publications.
- Navarro, J. (2003). Los “Elementos” de Euclides. En R. Ibáñez y M. Macho (Comps.), *Un paseo por la geometría* (pp. 51-82). Universidad del País Vasco. Recuperado de: <http://www.divulgamat.net/>

- Piaget, J. y García, R. (1992). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI editores (primera edición en castellano, 1982).
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017a). Construcciones dinámicas. En F. J. Córdoba, J. C. Molina y L. A. Ciro (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017b). Naturaleza de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba, J. C. Molina y L. A. Ciro (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016*, en prensa. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017c). Precisión y exactitud. Propuesta inicial sobre el estatus de los objetos de la geometría dinámica. En F. J. Córdoba, J. C. Molina y L. A. Ciro (Eds.), *Avances en la integración de tecnologías para la innovación en educación. Congreso Latinoamericano de GeoGebra 2016* (en prensa). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad La Gran Colombia.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691-719.
- Vega, Y. (2013). *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.