

---

# Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: Estudio de casos

ARTÍCULOS  
DE  
INVESTIGACIÓN

Fecha de recepción: Enero, 2000

*Educación Matemática*  
Vol. 13 No. 1 abril 2001  
pp.51-67

Martha Valdemoros Álvarez,  
Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, México  
mvaldemo@mail.cinvestav.mx

---

**Resumen.** *De un amplio estudio de casos realizado con niños de tercero y cuarto grados de la escuela primaria, se presentan aquí dos de ellos (los de Elizabeth y Belén), los cuales permiten indagar acerca de la libre producción de referencias que tales estudiantes evidencian con respecto a las fracciones (tanto en situaciones elementales de identificación de las mismas como en el terreno de su adición). Ambas estudiantes exhiben distintas modalidades de construcción de referencias, las que afectan o comprometen el desarrollo de las nociones relativas a la unidad, particularmente en situaciones aditivas. Además, el análisis de los casos de Elizabeth y de Belén nos proporciona los puntos de partida para la reflexión acerca de los alcances de la función referencial del lenguaje de las fracciones y, asimismo, del peso ejercido por dicha función en la realización de los significados involucrados en los problemas aritméticos propuestos.*

**Abstract.** *Out of a wide-range case study, we here present the case of Elizabeth and Belen, third and fourth grade of grammar school respectively, where free production of references observed in both students when dealing with fractions (in elementary identification situations as well as in addition situations) can be investigated. The girls resort to different reference construction modalities, which affect or involve the development of the relative notions regarding the unit, particularly in addition situations. Also, the analysis of the Elizabeth and Belen cases set the starting point to the reflection about the reach of the referential function of fraction language and, also, its influence upon the production of meaning in given arithmetical problems.*

## Antecedentes teóricos del estudio

Entre muchas aportaciones trascendentes gestadas en el terreno de la investigación y sin pretender agotar todo lo producido en este espacio por distintos autores, Piaget *et al.* (1966), Kieren (1983, 1988, 1992, 1993), Bergeron y Herscovics (1987) han brindado gran atención al peso que ejerce la idea de unidad sobre el desarrollo de diversos conceptos y nociones relativos a las fracciones.

Asimismo, Hiebert y Behr (1988) han enfatizado la trascendencia que tienen la enseñanza y el aprendizaje de las nociones vinculadas a la unidad, en los estratos escolares

elementales. Globalizando sus observaciones, dichos investigadores señalaron las marcadas dificultades que para los estudiantes entraña el tránsito a través de distintos conjuntos numéricos, para los cuales los alumnos deben construir conceptos particulares de unidad, afines con cada uno de los conjuntos numéricos considerados. Pese a lo cual, tanto los tratamientos escolares como la investigación asociada a la enseñanza no han contrastado y discriminado suficientemente los conceptos de unidad específicos de cada conjunto numérico y las dificultades cognitivas que los estudiantes llegan a desarrollar, en el pasaje de unos a otros.

Algunos estudios sobre el lenguaje de las fracciones (Valdemoros 1993a, 1993b, 1994a, 1994b) han permitido detectar que en el ámbito de esos números, las estructuras conceptuales y semánticas ligadas a la unidad se construyen en estrecha vinculación con las estructuras del lenguaje aritmético comprometidas en el desarrollo de las referencias. Se arribó a esa constatación, después de confrontar a distintos grupos de tercero y cuarto grados de la escuela primaria con tareas consistentes en la libre producción de problemas verbales centrados en la suma de fracciones; al inventar dichos problemas, la mayoría de los estudiantes evidenciaba no reconocer adecuadamente una unidad compatible con la situación ideada y, también, configuraba "*relaciones referenciales insatisfactorias*" (entendiendo como tales a distintos tipos de vínculos insuficientes y distorsionados entre la fracción y el referente concreto a ella asociado; entre otros ejemplos, la ausencia de una unidad de medida constante y la integración de distintas clases de objetos a través de la suma). Por esa vía y dados los estrechos nexos detectados entre los significados y conceptos relativos a la unidad y la generación de referencias para las fracciones, se centra en estas últimas el actual estudio de casos.

Atendiendo a lo planteado por Todorov (1978), Ducrot y Todorov (1981) en un marco lingüístico, la función referencial de todo lenguaje brinda al sujeto la posibilidad de designar los objetos en torno a los cuales discurre la comunicación. Si los signos son tomados en sí mismos, suelen carecer de referentes asignables ya que es a través de un uso específico por un sujeto determinado que los signos alcanzan un «valor referencial». Por otra parte, el "valor referencial" de cualquier enunciado -en tanto unidad portadora de información- depende del entorno en el que se emplea, el cual permite realizar extensamente la significación de aquél (Ducrot, 1982, 1986).

Complementariamente con lo destacado en el párrafo anterior y en un esfuerzo por determinar los aspectos semánticos que coadyuvan a la conformación del "significado", Lounsbury (1978) distingue los "objetos y condiciones de la referencia" como un importante rubro de análisis que posibilita describir adecuadamente cada uno de los "paradigmas semánticos" que este autor asocia íntimamente a los significados. El mencionado lingüista define un "paradigma semántico" como el conjunto de formas lingüísticas cuyos elementos tienen tanto algo en común, como también, algo discrepante. Con ello, dicho investigador pone de relieve el marcado peso que tienen tanto los "paradigmas semánticos" como los "objetos y condiciones de la referencia" en la descripción y definición por extensión del significado.

Tal formulación general es de gran complejidad en el ámbito de la Matemática Educativa, en tanto se consideren los modos crecientemente abstractos que pueden asumir muchos de los referentes involucrados en el lenguaje matemático que la enseñanza introduce.

Para enfrentar la complejidad señalada en último término, nos apoyamos en formulaciones como las desarrolladas por Ohlsson (1988) al identificar diversas aplicaciones

matemáticas, con respecto a las cuales se realizan distintos significados de fracción. En un terreno aritmético que trasciende a las fracciones, Schwartz (1988) señala un conjunto de referentes concretos susceptibles de transformación; éstos resultan expresables a través de modalidades particulares de referencias (a las que designa como «cantidades adjetivales» y cuya composición no es relevante en la presente reflexión). Conjuntando ambas consideraciones, nosotros podemos situar mejor el espacio aritmético elemental que aquí nos interesa: un ámbito de aplicaciones donde son reconocibles distintos referentes concretos que respaldan la construcción de modalidades específicas de referencias.

Sin embargo, no es únicamente por la existencia real de los referentes que se logra el desarrollo de las referencias compatibles con el lenguaje de las fracciones (circunstancia que también afecta al lenguaje matemático, en general). Apoyándonos en Eco (1991), consideramos que cualquier modelo referencial que se constituya en lo simbólico, en cierto momento de su desarrollo llega a regularse por sí mismo y con ello, relega a un plano secundario el papel que el referente -en tanto objeto real- juega en su constitución. Es por dicha naturaleza que la referencia puede ser tanto el vehículo de lo verdadero como de lo que no lo es (a lo que nosotros agregamos la expresión del acierto y del error, a la luz de la problemática del aprendizaje), subordinando los procesos de significación a tales alternativas. Según el semiólogo que acabamos de considerar, es en torno a ese doble juego centrado en la verdad que se posibilita la significación, por una vía referencial. Este punto de vista permite no incurrir en la falacia de atribuir a la referencia un papel dependiente, con respecto al referente.

Tomando en consideración la condición simbólica primordial de la referencia, abordada hasta aquí desde diversos ámbitos teóricos y fuentes documentales (en los que se le concede gran relevancia, a partir de distintas valoraciones), seguidamente nos abocamos a precisar el propósito central del presente estudio, en adecuación con los antecedentes teóricos multidisciplinarios establecidos en los párrafos previos. Los casos presentados por esa vía han estado orientados hacia la exploración de *la temprana asignación de referencias a las fracciones*, tanto como, a *los nexos que mantienen dichas referencias con los respectivos significados de unidad*. Este estudio de casos forma parte de una amplia investigación cualitativa ligada a la indagación de los aspectos más destacados en *la construcción del lenguaje de las fracciones, por parte del niño*.

## **El método**

### **La escuela seleccionada**

Escogimos la institución en la que se realizó el estudio porque pertenece al sistema público de enseñanza, cuenta con numeroso alumnado y brinda condiciones generales que favorecen el desarrollo de una investigación. Además, presenta características comunes a muchas otras escuelas de dicho sistema, evidenciando el ejercicio de un rol educativo satisfactorio para la comunidad a la que brinda atención.

Esta institución se localiza en una zona importante, dentro del área urbana de la Ciudad de México. En su entorno radican tanto trabajadores con diversas actividades ocupacionales, como profesionistas y pequeños comerciantes.

### **Los niños escogidos**

En un comienzo seleccionamos dos grupos de la escuela primaria (de tercero y cuarto grados), ya que es en ellos donde se concentra la enseñanza de fracciones, conforme a los

programas oficiales introducidos en la escuela primaria durante 1993, los que están vigentes en todo el país. Las edades de los niños estaban comprendidas entre 8 y 10 años. Los grupos escolares con los que se realizó el estudio fueron propuestos por las autoridades de la institución y se caracterizaron por presentar un desempeño medio, entre los restantes grupos pertenecientes a cada uno de esos niveles. Consistentemente con ello, la escuela también es identificable por un desempeño escolar medio dentro de la zona educativa a la que pertenece.

Escogimos a Elizabeth y Belén (con 9 años de edad), dado que reiteraban los principales modos de reconocimiento de referencias ya detectados en los estudios que hemos citado al comienzo de la presente comunicación (Valdemoros, 1993a, 1993b, 1994a, 1994b). En el grupo escolar al que ambas pertenecían (cuarto grado, integrado por 40 niños) había otros estudiantes que presentaban un *perfil* similar al de una u otra; optamos por dar prioridad a la selección de Elizabeth y Belén, a partir de considerar sus características generales (ambas eran buenas alumnas, se esforzaban por concluir todas las tareas requeridas y exhibían cierta facilidad para externar sus pensamientos). Por todo lo expuesto, esperábamos que el trabajo a profundidad con ellas -en entrevista- nos facilitara el esclarecimiento e interpretación de cada uno de tales casos. Los respectivos perfiles se describen cuando son presentados los casos, en las siguientes páginas.

Es decir que, básicamente, habiendo reconocido distintas características en Elizabeth y en Belén -en lo que a la construcción de las referencias atañe- identificamos dos perfiles diferenciados, mediante la descripción de lo que cada una de ellas elaboró al respecto. Dichos perfiles también se adecúan a otros miembros del grupo que presentaron elaboraciones análogas a una u otra niña, en esas tareas. Este modo de organización del estudio de casos -al que nosotros designamos como "estudio por perfiles"- se ajusta plenamente al tipo de estudio de casos que Cohen y Manion (1990, p. 194) identifican en términos de los que permiten "generalizaciones desde un ejemplo a una clase". No pretendemos con ello que ésta sea la única forma de organización de esta clase de estudios, ya que coincidimos con los mencionados autores en lo que a la legitimidad de múltiples modos de conformación de los mismos corresponde.

## El cuestionario

Aplicamos un cuestionario exploratorio a los dos grupos seleccionados, a fin de escoger los alumnos que participarían en el estudio de casos. De ese modo, fueron privilegiados los estudiantes que evidenciaron modalidades de construcción de "relaciones referenciales" en las que se establecía un nexo inadecuado entre la fracción y el referente concreto al que ésta estaba ligada. En el presente reporte, nos ocupamos tan sólo de los casos de Elizabeth y Belén.

El cuestionario exploratorio cumplió el único papel de lograr una mejor selección y caracterización inicial de los casos a abordar. Los problemas aritméticos que lo conformaron fueron diseñados como tareas muy similares a las introducidas precedentemente, en otros estudios (Valdemoros 1993a, 1993b, 1994a, 1994b), las que estuvieron sometidas a diversos procedimientos de validación. Fueron trece tareas las que integraron el cuestionario: cinco ejercicios destinados a la identificación de la fracción (en presencia de un todo continuo y de un todo discreto), dos actividades ligadas al reparto de objetos, dos problemas asociados al reconocimiento de equivalencias entre fracciones, dos tareas vinculadas a la invención de problemas aditivos, una actividad consistente en la resolución de una suma de fracciones

respaldada por un dibujo a iluminar y un sencillo problema de variación proporcional; en once de estas tareas se incluyeron dibujos en su presentación. En particular, la actividad de invención de problemas aditivos fue el medio más idóneo para la exploración de las “relaciones referenciales” de las fracciones, en tanto posibilitaron una libre interpretación de las respectivas consignas de trabajo por parte de los niños.

### El instrumento primordial de este estudio

Las entrevistas individuales en profundidad constituyeron el recurso metodológico básico del estudio de casos. Todas ellas tuvieron un diseño específico, a fin de promover un mejor acercamiento al perfil de cada caso, logrando así mayor agudeza y pertinencia en la respectiva indagación. Además, estas entrevistas fueron semiestructuradas porque permitieron la emergencia de todas las ocurrencias de los niños ante las tareas propuestas, a la par que posibilitaron la oportuna introducción de distintos materiales concretos elementales (plastilina, papel para plegar, objetos a ser partidos, etc.) y el eventual tratamiento de tareas paralelas o simplificadas, conforme a las valoraciones locales que la entrevistadora hiciera del desenvolvimiento de la actividad. Las entrevistas fueron videograbadas y en su desarrollo intervinieron una entrevistadora y una observadora. Diez tareas diferentes fueron previstas para cada entrevista. El análisis cualitativo de los resultados efectuado aquí, se adecúa al realizado en reportes previos (Valdemoros, 1993c; Valdemoros y Campa, 1994c; Valdemoros y Orendain, 1994d; Valdemoros, 1995, 1998).

Para facilitar el reconocimiento de cada caso, a continuación efectuamos una presentación particular de ellos, especificando la naturaleza de las tareas desarrolladas, los resultados obtenidos y la interpretación global de los mismos.

### El estudio de Elizabeth

#### Características distintivas del caso

En una de las tareas del cuestionario exploratorio aplicado previamente (consistente en la invención de un problema), Elizabeth elaboró el escrito presentado en el Cuadro 1.

Dicho texto estuvo presumiblemente inspirado por algunos contenidos semánticos de la enseñanza escolar recibida. Hacemos mención al «modelo del pastel», el cual fue aquí objeto de apropiación por parte de la niña, siendo frecuentemente introducido en el aula

| Problema del cuestionario                                      | Texto producido por Elizabeth  |
|--|--|
| Inventa un problema que contenga: $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ | José llevó $\frac{1}{5}$ de pastel de chocolate a una fiesta, pero Julia llevó $\frac{1}{10}$ de pastel de vainilla.<br>¿Cuánto pastel tienen entre los 2?<br>$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5}{50} + \frac{1}{50} = \frac{15}{50}$ |

**Cuadro 1. Elaboración de Elizabeth en el cuestionario exploratorio.**

por los maestros, para promover significados muy elementales de fracción. El rasgo más notable de esta elaboración es su ambigüedad, dado que Elizabeth refirió ambos sumandos a distintos objetos de la misma clase e incorporó al texto algunos indicadores del cambio de unidad involucrado (estos últimos estuvieron centrados en componentes secundarios de los dos objetos señalados, como la «vainilla» y el «chocolate», a partir de los cuales pueden reconocerse sabores y colores diferentes). Sin embargo, en la situación propuesta fue omitida la condición relevante para la constitución de la unidad de referencia: el tamaño de ambos objetos, en torno al cual no hubo ninguna indicación explícita.

El problema inventado por Elizabeth estaría más allá de los conflictos cognitivos, a condición de que el tamaño de los objetos involucrados se mantuviese constante y, con ello, se preservase la misma unidad de medida como sustento común de ambos sumandos. Sin embargo, esto fue desestimado en el texto y dicha omisión nos condujo a la hipótesis de que la niña no estaba tomando en cuenta el requisito de preservación del tamaño de ambos objetos, a través del cual se constituiría una unidad de medida común para los sumandos implicados en el problema.


En este marco pudimos advertir la gran riqueza cognitiva ligada al modelo construido por Elizabeth. Valoramos que **la niña nos ofrecía la oportunidad de develar qué aspectos de la unidad de referencia eran considerados por ella, al mismo tiempo que podríamos precisar las inconsistencias entre su modelo empírico y las restricciones semánticas que regulan la suma de fracciones.** Por lo cual, privilegiamos el estudio de este caso y **lo identificamos en asociación con la variación arbitraria de la unidad, en el plano de la adición de fracciones.**

Lo que acabamos de expresar le otorga marcada relevancia al caso de Elizabeth, dado que desde los estudios de Piaget et al. (1966) se han producido muchas aportaciones tendientes a situar a través de la investigación, la trascendencia de la unidad a nivel de la construcción de los conceptos ligados a las fracciones (algunas de esas aportaciones pueden profundizarse en Kieren, 1983, 1988, 1992, 1993; Bergeron y Herscovics, 1987; Hiebert y Behr, 1988). Sin embargo, Elizabeth nos permite algo más, al posibilitarnos conjuntar el concepto de unidad y algunas estructuras referenciales del lenguaje de las fracciones, en un terreno semántico específico y en el marco operacional de la adición. Asimismo, **Elizabeth facilita la eventual realización de comparaciones entre sus elaboraciones -en la invención de problemas aditivos- y las de aquellos compañeros de grupo que también consideraron distintos objetos de la misma clase, pero que desestimaron la preservación del tamaño de la unidad.**

## El diseño de la entrevista




Las diez actividades previstas para la entrevista de Elizabeth fueron establecidas a partir de los propósitos manifiestos en los siguientes párrafos. Se ilustra la conformación de tales tareas en los Cuadros 2-6. Recordamos al lector que ambos casos (los de Elizabeth y Belén), presentaron perfiles distintos en lo que a la construcción de referencias corresponde; por ello, se estructuraron diferentes tareas para la realización de la entrevista de cada niña, con el propósito de lograr una indagación más pertinente en los dos casos.

- i) Propiciar la identificación de la unidad mediante la suma de la fracción y su complemento, con el apoyo de la representación pictórica de una colección de objetos (Tarea 6, Cuadro 2).

| Tarea 6  |
|--|
| Estas canicas son las dos terceras partes de las que posee Roberto: <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> Dibuja las canicas que faltan para completar la colección de Roberto. |


**Cuadro 2**

- ii) Promover el reconocimiento de una fracción unitaria, en presencia de un todo discreto o continuo y a través del uso de objetos concretos y de representaciones pictóricas (Tareas 2, 3, 8 y 10 del Cuadro 3).

| Tarea 2   | Tarea 3  | Tarea 8  | Tarea 10   |
|---|--|--|--|
| Identifica $\frac{1}{8}$ en el siguiente ejercicio: <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> | Identifica $\frac{1}{8}$ en el siguiente ejercicio: <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> | ¿Lo sombreado representa $\frac{1}{3}$ de esta figura? .....<br><div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> ¿Por qué? ..... | Presentación de 8 dulces y consiguiente reconocimiento de $\frac{1}{8}$ de dicho conjunto. |

**Cuadro 3**

- iii) Explorar las relaciones de equivalencia susceptibles entre determinadas fracciones y entre distintas unidades de partición de un mismo todo, con referencia a entidades discretas y continuas (Tareas 3, 8 y 9, Cuadros 3 y 4).

| Tarea 9  |
|--|
| Pinta $\frac{2}{3}$ de esta figura: <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> |


**Cuadro 4**

- iv) Constatar qué apreciaciones suscita en Elizabeth la variación del tamaño de un conjunto y de la parte identificada en él, partiendo de la asignación de la misma fracción (Tarea 4, Cuadro 5).

| Tarea 4  |
|--|
| Confrontación de las soluciones ofrecidas ante las Tareas 2 y 3 de la entrevista.<br>¿Qué cambios son observables en una y otra situación? |

**Cuadro 5**

- v) Introducir sumas elementales de fracciones para facilitar la invención de un problema por parte de Elizabeth, la interpretación de una situación aditiva mediante la suma de dos subconjuntos de un conjunto dado y la reconstrucción de un problema inventado por la niña, en el Cuestionario Exploratorio (Tareas 1, 5 y 7, Cuadro 6).

| Tarea 1   | Tarea 5  | Tarea 7  |
|---|--|--|
| Inventa un problema que contenga: $\frac{1}{8} + \frac{4}{8}$ | En este conjunto de plátanos ilumina: $\frac{1}{7} + \frac{3}{7}$<br> | Reconstrucción de la tarea del cuestionario presentada en la Figura 1. |

**Cuadro 6**

Todas las labores incluidas en este diseño se caracterizan por su naturaleza elemental y por no avanzar más allá de los límites trazados por el programa oficial de enseñanza. Lo novedoso para la niña residió en ciertas modalidades de indagación (la invención de problemas ilustra esto), como también, en la representación pictórica de distintos todos discretos asociados al reconocimiento de fracciones y a la suma de ellas.

Mediante el conjunto de problemas escogidos para la entrevista, procuramos plantear una indagación un poco más amplia que la requerida para el seguimiento de la hipótesis del caso. De ahí que hayamos tomado en cuenta algunas relaciones elementales de equivalencia y ciertas modalidades de reconstrucción de la unidad desde la parte; esas labores situaron los sustratos conceptuales básicos necesarios para la resolución satisfactoria de la suma de fracciones.

### Interpretación de los resultados obtenidos

Los aspectos fundamentales de las soluciones propuestas por Elizabeth son exhibidos en la Tabla 1. No obstante, quedan marginados de dicha Tabla los procesos que precedieron y acompañaron las respectivas soluciones, como también, las situaciones de rectificación de algunas propuestas intermedias que la propia niña produjo. Atendiendo a la trascendencia de muchos de estos pasajes de la entrevista, a continuación nos dedicamos al análisis de los más importantes de ellos.

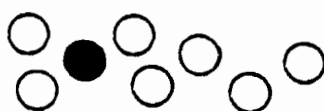
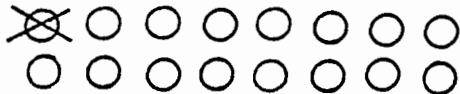
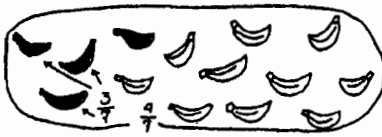
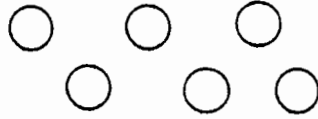


Es muy marcada la similitud reconocible entre la elaboración de Elizabeth ante la Tarea 1 de la entrevista y el texto que la mencionada estudiante elaborara en el cuestionario exploratorio (con respecto a este último, véase el Cuadro 1). Al diseñar la presente entrevista, se había previsto para la Tarea 7 (descrita en el Cuadro 6) la reconstrucción de tal labor desarrollada por la niña previamente. Puede advertirse que se cumplió con ese propósito de manera espontánea, al comenzar la entrevista.

Por el tratamiento que esta alumna dio a la Tarea 1, pudimos confirmar que en el nuevo problema verbal ella se refería a distintos objetos de una misma clase y que, tras largos esfuerzos de abstracción, el tamaño de éstos fue concebido como variable. Todas las evidencias logradas en la entrevista nos permitieron comprobar que la niña no advertía la necesidad de tomar en cuenta un tamaño constante para ambos objetos considerados en la Tarea 1, a fin de asociarlos a una unidad de medida común, a través de



la suma de sus partes. Con lo cual, llegamos a la constatación de nuestra hipótesis en torno al caso.

**Tabla 1.** Las soluciones desarrolladas por Elizabeth durante la entrevista.

|          |   |
|----------|---|
| Tarea 1  | <p>Jorge lleva a una fiesta un octavo de pastel y Rosa lleva cuatro octavos de pastel. ¿Cuánto pastel tienen entre los dos?</p> $\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$   |
| Tarea 2  |    |
| Tarea 3  |    |
| Tarea 4  | <p>Al confrontar sus propias soluciones ante las Tareas 2 y 3 de la entrevista, la niña expresó que ambas eran correctas, porque en uno y otro caso "un octavo del conjunto es uno".</p>  |
| Tarea 5  |    |
| Tarea 6  |    |
| Tarea 7  | <p>La reconstrucción del problema inventado en el cuestionario exploratorio se dio espontáneamente en presencia de la Tarea 1 de esta tabla. Ambas soluciones (en el cuestionario y la entrevista) fueron parecidas.</p>                        |
| Tarea 8  | <p>Imaginando redistribuciones de lo sombreado, la niña reconoció que "las dos partes pintadas son mitades de un tercio" y que "uniéndolas, se forma uno de esos cuadrados de ahí".</p>   |
| Tarea 9  | <p>Sombreado en el primer intento:  Sombreado en el segundo intento: </p> |
| Tarea 10 | <p>Elizabeth separó un dulce del conjunto, diciendo "eso es un octavo porque son ocho dulces, menos un octavo".</p>   |

En contraste con la anterior reflexión suscitada respecto al tamaño de los objetos escogidos, la niña sostenía que otras propiedades de los referentes concretos indicados (color, sabor, forma de los dos pasteles mencionados en el problema por ella inventado), eran las características fundamentales a ser reconocidos en dichos objetos, para su comparación. Por ello, la sobreestimación de lo perceptual le impidió tomar en consideración el tácito, abstracto y convencional requerimiento de la *constancia del tamaño* de los dos referentes concretos ligados a su elaboración.

Para la *reconstrucción del todo desde la parte*, la niña desplegó procesos de solución relativamente inestables, ya que en ellos se evidenciaron algunos titubeos en la sucesión de las acciones encaminadas al completamiento del dibujo, los que afectaron el primer intento de identificación del complemento de la fracción dada, en la Tarea 6; en silencio, la estudiante mostraba conteos imaginarios, con golpes sobre el papel, en los que parecía intentar dibujar todo el conjunto nuevamente, o bien, agregar una parte idéntica al subconjunto dado. Dicho problema después fue satisfactoriamente resuelto, mediante la realización del único dibujo que efectuó en la Tarea 6. Ratificando la inestabilidad aludida a comienzos de párrafo, en otros pasajes de la entrevista Elizabeth se apoyó espontánea y adecuadamente en la búsqueda del complemento de la fracción, con el claro propósito de verificar algunas de sus respuestas. Aunque, dicho recurso no había resultado eficaz durante el desarrollo de la Tarea 1 (en la que usó una representación pictórica para reunir las partes provenientes de distintos objetos y constituir con ellas un nuevo todo, sin llegar por esa vía a discriminar que eran desiguales).

En torno a las relaciones de equivalencia entre fracciones, esta estudiante las desestimó categóricamente, tanto en la Tarea 3 (donde dicha relación surgía del contraste entre el numeral dado y el dibujo) como en toda ocasión de la entrevista en la que emergió un posible vínculo de esa naturaleza. Sin embargo, en presencia de las Tareas 8 y 9, Elizabeth evidenció gran fluidez a nivel de la adecuada articulación entre distintas «unidades de partición» -o «medidas subunitarias», conforme a las designaciones de Bergeron y Herscovics, 1987- de un mismo todo. Atribuimos esto último a la circunstancia de que, en este marco, pudo apelar a composiciones imaginarias de las partes hasta lograr modos de equivalencia entre ellas, en presencia de figuras que le brindaron satisfactorios respaldos perceptuales.

## El estudio de Belén

### Características distintivas del caso

En presencia de un problema del cuestionario exploratorio, Belén inventó la situación que transcribimos en el Cuadro 7, la cual está respaldada implícitamente por procesos de medición.

| Problema del cuestionario                                      | Texto producido por Belén   |
|--|---|
| Inventa un problema que contenga: $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ | <i>Dos señoras van a hacer un pastel y necesitan <math>\frac{1}{5}</math> de masa y <math>\frac{1}{10}</math> de manteca. ¿Cuánto juntaron entre las dos?</i> $R = \frac{15}{50}$ |

**Cuadro 7.** Elaboración de Belén en el cuestionario exploratorio.

A través de sus respectivas elaboraciones pueden establecerse los rasgos diferenciales que distinguen a Belén y Elizabeth (cuya producción acabamos de analizar). Específicamente, el texto de Belén revela la pérdida del referente común requerido por la suma. Por lo antedicho, el caso de Belén puede ser caracterizado a partir de la desestimación del tácito requisito de preservación del referente ligado a una suma de fracciones, en circunstancias en las que el reconocimiento de las situaciones reales vinculadas a tal operación no es compatible con el modelo matemático que regula a esta última. También es decisivo, en este perfil, el hecho de que cada una de las referencias construidas por la niña carece de la indicación precisa de una unidad de medida (convencional o no convencional). Por su parte, el caso de Elizabeth fue definido por las variaciones arbitrarias de la unidad de referencia, en el ámbito de cierta situación aditiva centrada en tales números. Elizabeth nunca asignó objetos de distinta naturaleza a una suma determinada; pero, no advirtió la necesidad de mantener la constancia del tamaño de éstos de modo que la suma de fracciones tuviese sentido, en tanto hubiese una unidad de medida común para que las referencias a ambos sumandos fuesen adecuadas.

Lo producido por Belén exhibía un patrón compartido con la mayoría de sus compañeros de grupo, ante la misma tarea. Asimismo, precedentemente se habían efectuado constataciones similares a ésta, en contenido y frecuencia, durante el desarrollo de estudios previos con otros niños (los que han sido comunicados en Valdemoros, 1993a, 1994a, 1994b). El criterio seguido para la selección de Belén fue el de su mayor persistencia en la manifestación del problema identificado y un desempeño global bueno en el cuestionario exploratorio, aspectos que estimamos favorables para la realización de la correspondiente indagación.

Nuestros supuestos iniciales, en torno al caso de Belén, nos situaban ante la posibilidad de que la estudiante ligase entre sí clases distintas de objetos cuando las situaciones aditivas concretas involucraban a los números naturales, ámbito del que podría haber derivado falazmente dicha modalidad de interpretación de la adición. De no ser así, la misma se habría generado exclusivamente en presencia de las fracciones y a partir de no poder resignificar adecuadamente a la unidad, respecto a esa operación.

Desde dichos supuestos estructuramos las tareas a ser desarrolladas por Belén, en la entrevista. A continuación, presentamos los criterios seguidos en su elaboración.

### El diseño de la entrevista

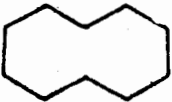
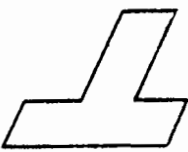
Conforme a las peculiaridades del presente caso, los propósitos que hemos tomado en cuenta para la delimitación de las actividades de la entrevista han sido los que seguidamente se expresan. Las mencionadas tareas son expuestas inmediatamente, en los Cuadros 8-12.

- i) Promover la invención de algunos problemas referidos a sumas y restas de números naturales (Tareas 2 y 3, contenidas en el Cuadro 8).

| Tarea 2                                    | Tarea 3                                    |
|--|--|
| Inventa un problema que contenga: $12 + 6$ | Inventa un problema que contenga: $19 - 9$ |



Cuadro 8

- ii) Iniciar actividades elementales de identificación de la parte, con respecto a todos continuos y mediante el uso de materiales concretos manipulables y muy accesibles (Tareas 4 y 5, Cuadro 9).

| Tarea 4   | Tarea 5   |
|---|---|
| Usa los bloques para representar $\frac{3}{4}$ de esta figura:                    | Usa los bloques para representar $\frac{2}{5}$ de esta figura:                    |
|  |  |


Cuadro 9

- iii) Propiciar la reconstrucción del todo continuo desde la parte, facilitando la suma de la fracción y su complemento, a través del uso de los materiales concretos ya descritos (Tareas 6-7, Cuadro 10).

| Tarea 6   | Tarea 7   |
|---|---|
| Si  es $\frac{1}{3}$ , dibuja 1. | Si  es $\frac{1}{4}$ , dibuja 1. |

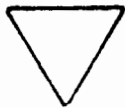

Cuadro 10

- iv) Indagar el posible reconocimiento de la relación de equivalencia surgida del contraste entre la fracción unitaria escrita y la representación pictórica de un todo discreto (Tarea 10, Cuadro 11).

| Tarea 10  |
|---|
| Identifica $\frac{1}{5}$ en el siguiente conjunto:                                  |
|  |

Cuadro 11

- v) Introducir sumas y restas elementales de fracciones para favorecer la reinención de un problema del cuestionario exploratorio, como también, el uso de materiales concretos y representaciones pictóricas (Tareas 1, 8 y 9 del Cuadro 12).

| Tarea 1  | Tarea 8   | Tarea 9   |
|--|---|---|
| Inventa un problema que contenga: $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ | En esta figura, utiliza los bloques para representar: $\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$ | En esta figura, utiliza los bloques para representar: $1 - \frac{2}{6}$             |
|  |  |  |

**Cuadro 12**

También aquí ajustamos nuestro diseño a los lineamientos básicos del programa oficial de enseñanza, en cuanto a los contenidos abordados, aunque el modo de presentación de los mismos no deriva de aquél. Por lo que pudimos observar en el grupo escolar al que pertenecía Belén, la invención de problemas y el uso de materiales concretos estructurados no estaban incorporados a la práctica colectiva habitual.

Los materiales incluidos fueron los bloques de Zullie (1975), compuestos por cuatro clases de piezas manipulables (triángulos, rombos, trapecios y hexágonos), con diversos colores y cuyos respectivos tamaños difieren de modo tal que admiten la creciente inclusión de unos en otros (facilitando así la identificación de variadas relaciones de equivalencia). Por sus características, también favorecen la representación de sumas elementales de fracciones y no requieren de un período previo de familiarización, por parte del niño. Nosotros les asignamos un uso restringido en la entrevista, de manera que quedaran inmersos en un conjunto de tareas de distinta naturaleza, las que estaban encaminadas hacia la confluencia de varios recursos simbólicos y procesos básicos articulables con la suma de fracciones.

### Interpretación de los resultados obtenidos

La Tabla 2 exhibe las soluciones ofrecidas por Belén, durante el desarrollo de la entrevista. A continuación nos centramos en las características globales de la actividad sostenida por la niña, deteniéndonos particularmente en aquellos procesos cuya consideración contribuya al esclarecimiento del caso (los mismos fueron excluidos de la Tabla 2 debido al carácter conciso de ésta).

El desarrollo de las Tareas 2 y 3 de la entrevista (véase la tabla mencionada) nos permitió comprobar que -en el terreno de la adición y sustracción de números naturales- Belén no llegó a vincular distintas clases de objetos a través de una suma (ni de una resta, como puede observarse en el problema propuesto para explorar la operación inversa). Con ello, fue descartada la posible generación de dicha distorsión en aquel ámbito, quedando en cambio confirmado que tal interpretación falaz de la adición -mantenida por Belén- se genera en el terreno semántico de las fracciones. Este es el rasgo fundamental que distingue el caso de Belén.

Atendiendo al desenvolvimiento de Belén frente a la Tarea 1 (Tabla 2), fue constatable la persistencia de los mismos contenidos aditivos que detectamos en el cuestionario exploratorio y que hemos expuesto aquí (Cuadro 7). El nuevo texto ideado por la niña -ilustrando una situación de medición- también puso de relieve la carencia de una unidad de medida, ya que las expresiones «un quinto de naranja» y «un décimo de melón» pudieran

estar referidas a un solo objeto, a una docena de ellos, a un kilogramo o a cualquier otra unidad atribuible al problema inventado.

Frente a las Tareas 8 y 9, Belén exhibió bastante soltura porque la unidad estaba originalmente identificada (mediante una representación pictórica) y la niña podía efectuar sobre ésta la cantidad de ensayos que quisiera. En especial, la Tarea 8 la resolvió rápidamente y sin vacilaciones.

Ante la Tarea 9, ensayó en primera instancia la representación del sustraendo, para llevar luego adelante la identificación de la unidad, la acción de retirar dos bloques de ella y, finalmente, el reconocimiento del resultado (mediante el uso de las fichas sobrepuestas al dibujo y sus propias verbalizaciones).

Confrontando las soluciones de Belén frente a las Tareas 8 y 9 y su elaboración asociada a la Tarea 1, podemos establecer que uno de los mayores obstáculos cognitivos que enfrenta la niña consiste en la *elección de una unidad* y la correspondiente *construcción de la referencia* (los que en su caso, están íntimamente asociados en su emergencia). Tal nexo estrecho entre el reconocimiento de la unidad y la construcción de referencias fue evidenciado en la libre producción de problemas, tanto por parte de Belén como de Elizabeth (sin dejar por ello de considerar los rasgos que particularizan cada caso ni las dificultades cognitivas que los distinguen).

Al resolver las Tareas 4 y 5, Belén exhibió algunas vacilaciones y escasos recursos anticipatorios asociados a una *partición imaginaria*. Atribuimos dichas circunstancias que rodearon la búsqueda inicial de solución a partir del uso de material manipulable, al hecho de que los bloques eran desconocidos para ella y necesitó hacer varios ensayos, para inteligir y expresar una respuesta final satisfactoria (en particular, en presencia de la Tarea 5).




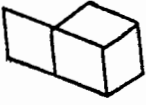

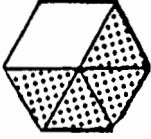
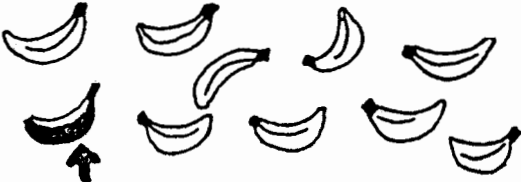
Ante las Tareas 6 y 7, le llevó más tiempo comprender la naturaleza de ambas. Belén no se había enfrentado previamente a actividades como éstas. Sin embargo, tan pronto como pudo esclarecer el sentido de las acciones demandadas llegó a una adecuada configuración de la unidad desde la parte. Con lo cual, nosotros interpretamos que si la niña puede efectuar una acertada elección de la unidad en situaciones aditivas elementales (en las que el todo se conforma mediante sucesivas sumas de la parte), sin lograr un manejo similar en las situaciones aditivas más complejas, se debe a que en estas últimas intervienen procesos de «resignificación» de la unidad, en marcos de creciente dificultad que requieren la integración de diversos procesos y contenidos cognitivos.

Un fenómeno que interesa de la Tarea 10 es que la niña alcanzó avances importantes, a través de una actividad paralela (consistente en la adecuada identificación de la fracción  $1/5$ , en asociación con un todo continuo subdividido en diez partes). No obstante, Belén no pudo transferir dicho reconocimiento al todo discreto, en presencia del cual ella afirmaba que  $1/5$  de un conjunto de diez elementos correspondía a un solo objeto del mismo. Aunque éste no es un rasgo que distinga al caso en discusión, expresa importantes procesos elementales que intervienen y determinan fuertemente la adición de fracciones.

## Discusión final

En primera instancia, enfatizamos el valor de las tareas de “invención de problemas” por las que llegamos a detectar las dificultades cognitivas aquí expuestas. Las mismas permitieron exhibir procesos de construcción que difícilmente podrían ser identificados por otros medios. Además, las mencionadas actividades atrajeron nuestra atención hacia fenómenos

**Tabla 2.** Las soluciones desarrolladas por Belén durante la entrevista.

|          |  |
|----------|--|
| Tarea 1  | <p>Un niño tiene un quinto de naranja y el otro un décimo de melón. ¿Cuánto tienen entre los dos?</p> $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{10}{50} + \frac{5}{50} = \frac{15}{50}$    |
| Tarea 2  | <p>Un niño tenía 12 canicas y su primo le regaló 6 canicas. ¿Cuántas tiene ahora?</p> $12 + 6 = 18 \text{ canicas}$  |
| Tarea 3  | <p>Una señora tenía 19 peces y su gato se comió 9. ¿Cuántos peces quedan ahora?</p> $19 - 9 = 10 \text{ peces}$  |
| Tarea 4  | <p>Belén colocó los bloques como se muestra a continuación y comentó "tres cuartos".</p>            |
| Tarea 5  | <p>En su último intento, Belén cubrió toda la figura, quitó tres bloques y dijo "dos quintos".</p>  |
| Tarea 6  | <p>Belén reunió los bloques así:</p>    |
| Tarea 7  | <p>Con los bloques, la niña formó esto:</p>    |
| Tarea 8  | <p>Belén produjo la siguiente figura y agregó "son tres cuartos y sobra uno".</p>                 |
| Tarea 9  | <p>La niña cubrió toda la figura con los bloques, sacó dos y dijo "cuatro sextos".</p>            |
| Tarea 10 | <p>Belén iluminó así:</p>   |

que en los marcos escolares tienden a quedar encubiertos y silenciados. Dichos recursos exploratorios nos facilitaron una de las constataciones más directas de que los procesos conceptuales relativos a la constitución de la unidad, que estos niños desarrollaron en el terreno fraccionario, fueron establecidos en estrecha ligazón con las estructuras del lenguaje aritmético asociadas a la construcción de referencias. Si en nuestra indagación hubiésemos pretendido separarlos, no habríamos tenido éxito alguno en tal intento.

Asimismo, por la “invención de problemas” pudimos identificar las situaciones de medición como una de las elecciones semánticas primordiales, efectuadas por los niños del grupo escolar seleccionado para nuestro estudio. Con respecto a Elizabeth, varios pasajes de su entrevista nos permitieron comprobar que la niña no tomaba en consideración la necesidad de mantener un tamaño constante para los diversos objetos de una misma clase, involucrados por ella misma en una situación aditiva concreta (apoyada por elementales procesos de comparación y medición); con lo cual, Elizabeth no podía abstraer una unidad de medida común que ligase a aquellos objetos mediante un marco real compatible con el modelo matemático de suma de fracciones. La desestimación -expresada por esta niña- de las restricciones semánticas que sobre lo cotidiano plasma la aritmética, constituye una problemática bastante generalizada a nivel del aprendizaje de este grupo de estudiantes.

La entrevista de Belén nos permitió descartar que la falaz vinculación producida por ella entre distintas clases de objetos, a través de una suma, se generase en el ámbito de los números naturales. Con lo cual, quedó confirmado que dicha interpretación de la adición mantenida por Belén, fue gestada en el terreno semántico de las fracciones. Uno de los mayores obstáculos que enfrentó la niña consistió en la elección de una unidad y la correspondiente construcción de la referencia en un marco aditivo; ambos procesos estuvieron íntimamente enlazados en su generación y nos permitieron identificar que la unidad debe ser «resignificada» (esto es, dotada de nuevos contenidos semánticos por parte del estudiante), en terrenos de mayor complejidad. A deficientes e incompletos procesos de «resignificación» de la unidad, en el marco de la adición, atribuimos nosotros los rasgos fundamentales del caso de Belén.

En general, ambos casos permiten reconstruir los vínculos referenciales comprometidos en la realización del significado de unidad, en el terreno de la adición de fracciones. Esto conlleva algunas *implicaciones sustanciales para la enseñanza escolar*, en la que *deben ser tomados en cuenta y esclarecidos esos enlaces entre las relaciones referenciales y el significado de la unidad*, de modo de ayudar a los estudiantes a superar algunas de las dificultades cognitivas que pudieran experimentar al desenvolverse en el ámbito de uso de las fracciones.

## Referencias

- Bergeron, J. y Herscovics, N. (1987). Unit Fractions of a Continuous Whole. *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, I*. 357-365.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Ducrot, O. y Todorov, T. (1981). *Diccionario Enciclopédico de las Ciencias del Lenguaje*. México: Siglo XXI.
- Ducrot, O. (1982). *Decir y No Decir*. Barcelona: Anagrama.
- Ducrot, O. (1986). *El Decir y lo Dicho. Polifonía de la enunciación*. Barcelona: Paidós.
- Eco, U. (1991). *Tratado de Semiótica General*. Barcelona: Lumen.
- Hiebert, J. y Behr, M. (1988). Capturing the Major Themes. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, 2 (1-18). Reston:



- National Councils of Teachers of Mathematics.
- Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. 506-508.
- Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, 2* (162-181). Reston: National Councils of Teachers of Mathematics.
- Kieren, T. (1992). Rational and Fractional Numbers as Mathematical and Personal Knowledge: Implications for Curriculum and Instruction. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hatrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (323-371). Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Kieren, T. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (49-84). Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Lounsbury, F. (1978). Análisis Estructural de los Términos de Parentesco. En T. Todorov (Ed.), *Investigaciones Semánticas* (81-103). Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.
- Ohlson, S. (1988). Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, 2* (53-92). Reston: National Councils of Teachers of Mathematics.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1966). *The Child's Conception of Geometry*. London: Routledge and Keagan Paul.
- Schwartz, J. L. (1988). Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, 2* (41-52). Reston: National Councils of Teachers of Mathematics.
- Todorov, T. (1978). Introducción. En T. Todorov (Ed.), *Investigaciones Semánticas* (9-48). Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.
- Valdemoros, M. (1993a). *La Construcción del Lenguaje de las Fracciones y de los Conceptos Involucrados en él*. Tesis Doctoral. Matemática Educativa-CINVESTAV, México.
- Valdemoros, M. (1993b). The Language of Fractions as an active vehicle for Concepts. *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I*. 233-239.
- Valdemoros, M. (1993c). *Fracciones y Referencias: El Caso de los Cambios Arbitrarios de Unidad en Situaciones Aditivas*. Matemática Educativa-CINVESTAV, México.
- Valdemoros, M. (1994a). Various Representations of the Fraction through a Case Study. *Proceedings of the Eighteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, II*. 16-23.
- Valdemoros, M. (1994b). Fracciones, Referentes Concretos y Vínculos Referenciales. *Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. 21-30.
- Valdemoros, M. y Campa, A. L. (1994c). *Fracciones y Referencias: El Caso de la Relación entre Distintas Clases de Objetos a través de la Suma*. Matemática Educativa-CINVESTAV, México.
- Valdemoros, M. y Orendain, M. (1994d). *Fracciones y Referencias: El Caso de la Ausencia Inicial de Referentes Concretos*. Matemática Educativa-CINVESTAV, México.
- Valdemoros, M. (1995). Preservation of the Common Referent in the Addition of Fractions: A Case Study. *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I*. 407-412.
- Valdemoros, M. (1998). La Constancia de la Unidad en la Suma de Fracciones: Estudio de Caso. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (465-481). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Zullie, M. E. (1975). *Fractions with Pattern Blocks*. Palo Alto: Creative Publications.