ARTÍCULOS
DE
INVESTIGACIÓN

Problemas aditivos con números negativos: estudio sobre tres métodos de enseñanza con alumnos de nivel medio básico[1]

Educación Matemática
Vol. 14 No. 1 abril 2002
82-104

Fecha de recepción: mayo, 2000

Alicia Bruno Castañeda
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de la Laguna
abruno@ull.es

Ma. Candelaria Espinel Febles
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de la Laguna
mespinel@ull.es

Resumen: *Se presentan los resultados de una investigación que analiza tres métodos de enseñanza sobre* problemas aditivos verbales con números negativos *con alumnos de 13-14 años: (1) método* redactar*: los alumnos redactan los problemas, aprenden a distinguir sus estructuras y resuelven problemas escritos por sus compañeros; (2) método* resolver*: los alumnos practican de forma sistemática problemas aditivos en una secuencia dada; (3) método* control, *los alumnos siguen su libro de texto, aprenden las reglas operatorias y resuelven problemas como aplicación de la operatoria. Se ha realizado un tratamiento estadístico para contrastar la efectividad de los métodos y un estudio cualitativo para analizar el método* redactar. *Los métodos* redactar *y* resolver *tienen resultados muy próximos en la resolución de los problemas aditivos, mientras que el método* control *es el que presenta peores resultados. Además, se muestran algunas características comunes y diferencias entre las respuestas de los alumnos de los tres métodos en la resolución de los problemas y se analizan algunas respuestas dadas durante la instrucción de los alumnos del método* redactar.

Abstract: *This study involves the analysis of three teaching methods for* additive problems with negative numbers. *Participants in the study were 13-14 year old students. The teaching methods include: (1) the* writing *method, in which students write problems, learn to distinguish their structures, and solve problems written by other students; (2) the* solving *method, in which students systematically solve additive problems given in a sequential way: and (3) the* control *method, in which students follow the textbook, learn the computation rules, and solve problems applying those rules. A statistical analysis was performed to contrast the effectiveness of the methods, while a qualitative analysis was used to examine the* writing *method. Similar results for both the* writing *and the* solving *methods were obtained. The worst results were obtained for the* control *method. Some differences and common characteristics between student' solutions for the three methods*

[1] Trabajo financiado por el Proyecto de Investigación: PI2000/110: "La formación inicial del profesorado de matemáticas: diseño de un material docente universitario. Una propuesta de innovación en la resolución problemas aditivos con números negativos", subvencionado por el Gobierno de Canarias. Dirección General de Universidades e Investigación. Y por el Proyecto de Investigación 201145/99: "Métodos de enseñanza en la resolución de problemas con números negativos", subvencionado por la Universidad de La Laguna.

are presented. An analysis of some students' answers while using the writing *method during instruction is also provided.*

1. Introducción

La preocupación por mejorar la enseñanza-aprendizaje de los números negativos se ha manifestado en la publicación de numerosos trabajos en los que se presentan modelos con los que dar sentido a estos números y sus operaciones. Siguiendo la terminología presentada por Janvier (1985), la mayoría de los modelos que podemos encontrar responden al *modelo del equilibrio* o al *modelo de la recta.* En el *modelo del equilibrio* los números enteros positivos y negativos se representan con fichas de dos colores diferentes, por ejemplo, blancas y negras. La idea básica del modelo es que una ficha blanca y una negra se anulan y representan el cero. A partir de esto se definen las distintas operaciones: la suma se define como "unir" las fichas, la resta como "quitar" fichas y la multiplicación como una suma reiterada de grupos de fichas.

En el *modelo de la recta* los números son posiciones sobre la recta y desplazamientos sobre ella. La adición en este modelo puede ser la combinación de dos desplazamientos o el desplazamiento de una posición a otra. En la resta "sumar el opuesto" puede ser "hacer el desplazamiento en sentido opuesto", o bien la diferencia entre dos posiciones. La multiplicación se define como suma repetida de movimientos.

Diferentes investigaciones han contrastado estos modelos, mostrando las ventajas e inconvenientes de ellos, sin que se haya llegado a un consenso sobre el más adecuado para la enseñanza, aunque todas coinciden en que las mayores dificultades se encuentran en la resta, para los casos a –(–b), y en la justificación de "menos por menos es más" (Lyttle, 1994; Liebeck 1990).

Entre las investigaciones realizadas utilizando el modelo del equilibrio destaca la de Gallardo (1994, 1998), en la que el modelo del equilibrio se utiliza para indagar las dificultades operativas de alumnos de secundaria. Esta investigación, que está precedida de un estudio histórico-epistemológico, tiene la particularidad de analizar el manejo de los números negativos por parte de los estudiantes durante el proceso de resolución de ecuaciones. La investigación histórico-epistemológica y la didáctica refleja que la *aceptación de los números* negativos pasa a través de varios niveles de conceptualización antes de convertirse en una noción matemática formal. Además, el uso del modelo del equilibrio reveló la existencia de *tendencias cognitivas* en los alumnos.

Por otra parte, algunas de las investigaciones realizadas utilizando el modelo de recta tienen una clara relación con los *problemas aditivos verbales simples con números negativos*, ya que las situaciones aditivas en los diferentes contextos (como la temperatura, el nivel del mar, el ascensor, etc.) admiten una representación en la recta.

Los trabajos realizados en investigación educativa sobre los problemas aditivos verbales simples con números negativos han recibido una atención relativamente larga en el tiempo, ya que encontramos trabajos desde la década de los setenta (Verganud y Durand, 1976; Marthe, 1979), aunque más bien escasa si las comparamos con las investigaciones didácticas sobre otros tipos de números, como los naturales o los racionales. Los motivos de que encontremos menos publicaciones sobre los problemas aditivos con números negativos pueden ser varios, uno de ellos es que el peso de los problemas aditivos con números negativos en el currículo es menor que los problemas aditivos con positivos, ya que se suele limitar al momento (o curso) escolar en que se introducen los números negativos. Sin embargo, la mayoría de los profesores y de las propuestas curriculares, al introducir los números negativos utilizan problemas aditivos, en mayor o menor medida, por lo cual creemos que se justifica el interés por profundizar en su enseñanza y aprendizaje.

A continuación, presentamos la terminología que sobre estos problemas usaremos en este trabajo, tomada de Bruno y Martinón (1997a). En primer lugar, diferenciamos entre *historias (o situaciones) aditivas simples* y *problemas aditivos simples*, como lo hacen Rudnitsky *et al.* (1995). Una *historia aditiva simple* es una situación numérica que se describe con una adición $a + b = c$. Por ejemplo, "La temperatura por la mañana en la ciudad era de 7 grados sobre cero y a lo largo del día bajó 10 grados. La temperatura por la noche era de 3 grados bajo cero". Claramente, cada historia aditiva cuyo esquema es a + b = c, da lugar a tres problemas aditivos simples, según cual de las tres anteriores cantidades se convierta en incógnita. Diremos que los problemas son de incógnita 1, 2 o 3 según que la incógnita sea a, b o c, respectivamente (i1, i2, i3).

En segundo lugar, distinguimos entre diversos usos de los números: *estados* (*e*), que expresan la medida de una cantidad de una cierta magnitud, asociada a un sujeto en un instante ("debo 2"); *variaciones* (*v*), que expresan el cambio de un estado con el paso del tiempo ("perdí 2"); y *comparaciones* (*c*), que expresan la diferencia entre dos estados ("tengo 2 más que tú"). La consideración de esos tres usos de los números da lugar a diferentes *estructuras* de historias y de problemas. Aquí estamos interesados en las siguientes estructuras, que son las más usuales, y en las que hemos señalado el nombre empleado con los alumnos en esta investigación, seguido de la nomenclatura de Bruno y Martinón (1997a):

- *Todo junto*
  (*combinación de estados*: estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total, e + e = e)

  "Pedro tiene $3 y debe $15, ¿cuál es su situación económica global?"

- *Algo ocurre*
  (*variación de un estado*: estado *inicial* + variación = estado *final*, e + v = e)

  "Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros, ¿cuál era la posición del delfín después de este movimiento?"

- *Compara*
  (*comparación de estados*: estado menor + comparación = estado mayor, e + c = e)

  "Un coche está en el kilómetro 6 a la izquierda del cero y una moto está 11 kilómetros a la derecha del coche. ¿Cuál es la posición de la moto?"

- *Dos cambios*
  (*combinación de variaciones sucesivas*: variación 1ª + variación 2ª = variación total, v + v = v).

  "La temperatura bajó 11 grados y luego subió 5 grados, ¿cómo varió la temperatura con respecto a la que hacía antes de moverse?"

Sobre los problemas aditivos con números negativos se han investigado distintos aspectos (Verganud y Durand 1976; Verganud, 1982; Marthe, 1979; Conne, 1985; Bell, 1986;

Bruno y Martinón, 1997b), entre los que destacamos: a) *la dificultad* para los alumnos según la estructura del problema, el dato desconocido, los signos de los números implicados o el contexto; b) *tipos de representación* que emplean los alumnos (esquemas, recta numérica, ecuaciones), c) *procedimientos y estrategias de resolución* que emplean los alumnos, d) *niveles de comprensión* de los problemas según los alumnos.

De los resultados de las citadas investigaciones destacamos las conclusiones de Bell (1986) relativas a que la estructura es determinante en la dificultad de estos problemas, con más influencia que el contexto. Por esa razón, Bell recomienda una enseñanza que ayude a los alumnos a diferenciar las estructuras de los problemas. De igual forma, en Bruno y Martinón (1997b) se comprobó que el tipo de estructura influye en el éxito de la resolución, sin embargo, en dicho trabajo se comprobó que la posición de la incógnita es el factor que presenta más dificultades para los alumnos. Se sugería entonces que una adecuada estrategia de enseñanza de los problemas aditivos con números negativos podría ser aquella que trabajara con diferentes estructuras de problemas, variando la posición de la incógnita, y que hiciera ver que la posición de la incógnita determina si el problema se resuelve con una suma o con una resta. Por ejemplo, el problema siguiente en el que la incógnita es el estado final: "Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar y bajó 8 metros, ¿cuál era la posición del delfín después de este movimiento?", se resuelve con la suma (–5) + (–8). Mientras que el problema siguiente, de la misma estructura, pero variando la incógnita, es decir, preguntando por la variación: «Un delfín estaba a 5 metros bajo el nivel del mar, hizo un movimiento y se quedó a 13 metros bajos el nivel del mar ¿cuál fue el movimiento del delfín?», se resuelve con la resta –13 – (–5) = –8.

A partir de esto, las preguntas que nos hacemos son las siguientes: si desarrollamos una metodología de enseñanza que ponga énfasis en que los alumnos distingan los problemas según la estructura y la posición de la incógnita, y cómo esto último influye en la operación que resuelve el problema, ¿se consigue una mejor comprensión del problema?, ¿los alumnos mejoran en la resolución de los problemas?

Esta última pregunta se responde afirmativamente en la investigación realizada por Rudnitsky *et al.* (1995) para problemas de *combinación de estados, variación de un estado* y *comparación de estados,* con números positivos y con alumnos de primaria. En dicho trabajo se contrastan tres métodos de enseñanza. Un método de enseñanza consistió en que los alumnos realizaron prácticas continuas y sistemáticas de resolución de problemas aditivos con números positivos. Un segundo método en el que los alumnos redactaron las historias y los problemas que posteriormente intercambiaron con sus compañeros para resolverlos. Y un tercer método, que denominaron "control", y que fue una metodología sobre la que no ejercieron ninguna influencia. Los alumnos contestaron a unas pruebas escritas sobre problemas aditivos inmediatamente después de finalizada la instrucción en el aula y a otras pruebas varios meses después. Los resultados indicaron que el método que siguió la metodología de redactar los problemas obtuvo mejores resultados que las otras dos metodologías, a largo plazo (esto es, en la prueba realizada varios meses después de terminada la experiencia en el aula).

Nos planteamos si una conclusión similar puede establecerse también para los números negativos, es decir, si una metodología de enseñanza en la que los alumnos escriben los problemas aditivos y los clasifican según sus estructuras, ayuda a una mejor comprensión de la situación y como consecuencia, lleva a un mayor éxito en la resolución de los mimos. *A priori*, no podemos decir que sea cierto porque, por un lado, la edad de los alumnos es distinta y, por otro, la problemática con los números negativos es diferente, debido a que los problemas se pueden resolver con distintas operaciones de suma y resta y a los aspectos formales y operativos que rigen el cálculo con estos números.

Por ello, realizamos una investigación que en su base coincide con la de Rudnitsky *et al.*, aunque con algunas diferencias, que explicamos con más detalle en el apartado siguiente.

2. Objetivos, diseño y metodología de la investigación

El objetivo principal de esta investigación es comprobar si seguir una metodología de enseñanza de los problemas aditivos con números negativos en la que los alumnos redactan problemas, reflexionando y distinguiendo sus estructuras e incógnitas es beneficiosa para la enseñanza de los problemas aditivos con números negativos.

Hablaremos en la investigación de tres *métodos de enseñanza* de problemas aditivos de enunciado verbal con números negativos y que se describen a continuación:

Método redactar: los alumnos redactan enunciados de historias y luego de problemas, aprenden a distinguir sus estructuras, los intercambian y resuelven con sus compañeros.

Método resolver: los alumnos practican de forma sistemática una amplia variedad de problemas con las estructuras mencionadas, que se les proponen secuenciados en orden de dificultad, según la posición de la incógnita.

Método control: los alumnos estudian las reglas operatorias de los números negativos y posteriormente, practican la resolución de problemas aditivos sin poner énfasis en una secuencia según su dificultad o en distinguir las estructuras.

2.1 Objetivos de la investigación

Apoyándonos en los resultados de Rudnisky *et al.*, nos planteamos un primer objetivo de investigación:

1. Analizar si el método redactar consigue mejores resultados en la resolución de problemas aditivos con números negativos que los métodos resolver y control, con alumnos de 13-14 años.

Cabe indicar dos diferencias en relación con la experiencia de Rudnitsky *et al.*: 1) los problemas que se estudian se resuelven con números negativos; y 2) se tratan los problemas con estructura "Dos cambios" (v + v = v).

Otros dos objetivos de la investigación fueron los siguientes:

2. Estudiar las diferencias o semejanzas entre los métodos en la resolución de problemas, en cuanto a la dificultad de los problemas y a las estrategias de resolución.
3. Analizar el método redactar: ¿qué implica este método para el profesor?, ¿qué dificultades puede presentar para los alumnos? Analizar algunos problemas que escribieron los alumnos.

Tabla 1. Distribución de los grupos en los métodos.

Método de enseñanza	Redactar			Resolver			Control		
Grupos	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Número de alumnos por método	57			74			55		
Número de alumnos por grupo	17	17	23	30	22	22	19	20	16
Profesores	P1	P1	P2	P2	P3	P4	P5	P5	P5
Colegios	C1	C1	C1	C1	C2	C3	C4	C4	C4

2.2 Diseño de la investigación

La investigación se realizó con alumnos de segundo curso de la educación secundaria obligatoria (ESO) en Tenerife (España), es decir, alumnos de 13-14 años de edad. La razón que nos llevó a elegir ese curso es que los alumnos habían tenido en el curso anterior una introducción a los números negativos, que continuaba durante ese segundo curso.

Participaron 9 grupos de alumnos (tres por cada método); en la tabla 1 se resume la información referente al método de enseñanza utilizado, número de grupos, alumnos, profesores y colegios participantes.

Con los profesores que participaron en la investigación se tuvieron reuniones previas al desarrollo del trabajo en el aula, con el fin de discutir con ellos las características del método y las actividades que iban a seguir, y analizar los posibles problemas metodológicos que podrían surgir, bajo su perspectiva y con el conocimiento de sus alumnos, su centro y su programación.

2.3 Fases de la investigación

En una primera fase se diseñaron, secuenciaron y temporalizaron las actividades que iban a seguir los alumnos en los métodos *redactar* y *resolver.*

En los métodos *redactar* y *resolver* la experiencia se desarrolló en 10 horas de matemáticas de su horario habitual (2 horas semanales, durante cinco semanas). El primer día se realizó una prueba *inicial* que contenía 9 problemas aditivos con números negativos y el día 10 una prueba *final* con el mismo número de problemas y con iguales estructuras, aunque con diferentes contextos. Cuatro meses más tarde de la finalización de la experiencia se pasó una prueba de *retención*, del mismo tipo de las dos pruebas anteriores. En la tabla 2 se recogen las características de los problemas en las tres pruebas y en el anexo se presenta la prueba inicial a modo de ejemplo. Tanto en el método *redactar* como en el *resolver*, los alumnos trabajaron por parejas estables, siempre que fue posible, esto es, cuando no se producía una ausencia a clase de su compañero, cuestión esta última que ocurrió en pocos casos. Algunos ejemplos del trabajo realizado por estas parejas se muestran en el apartado 5 de este trabajo.

Para el método *control* no se preparó material curricular específico ni se temporalizaron las actividades por parte de los investigadores. Los alumnos siguieron las actividades propuestas por su profesor y su libro de texto, en el cual había problemas aditivos al final del tema. Sin embargo, se proporcionó a la profesora de dichos grupos los problemas aditivos que iban a seguir los alumnos del método *resolver*, con vistas a que ampliara el

Tabla 2. Esquema de los problemas de las pruebas escritas

	Prueba *inicial*	Prueba *final*	Prueba *de retención*
eeei3	Dinero (–650) + (+ 1700) = + 1050	Dinero (–1650) + (+ 3700) = + 2050	Dinero (+ 22000) + (–31000) = –9 000
evei3	Cronología (–580) + (+79) = –501	Temperatura (–16) + (+5) = –11	Ascensor (+6) + (–8) = –2
vvvi3	Carretera (–6) + (+9) = +3	Guagua (+6) + (–15) = –9	Temperatura (+9) + (–12) = –3
ecei3	Nivel del mar (–11) + (–4) = –15	Carretera (–7) + (–6) = –13	Cronología (–235) + (+27) = –208
eeei2	Dinero (–43 000) – (–13 000) = –30 000	Dinero (–23 000) – (–6 000) = –17 000	Dinero (–43 000) – (–13 000) = – 30 000
evei2	Temperatura (+47) – (–5) = +52	Cronología (–56) – (–123) = 67	Nivel del mar (–5) – (–13) = 8
vvvi2	Nivel del mar (–400) – (+300) = –700	Ascensor (–4) – (+7) = –11	Guagua (+5) – (–12) = +17
ecei2	Ascensor (–3) – (+5) = –8	Nivel del mar (–4) –(+11) = –15	Carretera (–6) – (+7) = –13
eveil	Ascensor (–3) – (–8) = +5	Carretera (–6) – (–10) = +4	Temperatura (–3) – (–10) = +7

conjunto de problemas tratados en su libro de texto. En resumen, estos grupos de alumnos aprendieron las reglas operatorias de los números negativos y practicaron problemas aditivos sin seguir una secuencia concreta. Los alumnos que siguieron el método *control* también resolvieron las pruebas *inicial*, *final* y de *retención.*

Se puntuó cada problema con 1 o 0, según que el resultado fuese correcto o incorrecto. Con lo cual, la calificación de las pruebas oscilan entre 0 y 9. Se puntuó con un 1 las soluciones correctas obtenidas a partir de cálculos con números negativos o con números positivos y también las obtenidas a partir de una representación gráfica (básicamente, la recta).

2.4 Instrucción con el método redactar

La secuencia seguida en los diez días de trabajo en el aula del método redactar se distribuyeron de la forma que se indica en la tabla 3.

Obsérvese que el escribir historias y problemas discutiendo sus estructuras implica dedicar más tiempo y atención a comprender la situación problemática. También el hecho

Tabla 3. Secuencia de instrucción del método redactar

Actividades de clase	Observaciones
Día 1 Prueba inicial	Ver anexo 1
Día 2 *Presentación de historias de números positivos*	La profesora presenta historias de las cuatro estructuras con números positivos y se debate sobre las diferencias entre ellas, y se acuerdan sus nombres: *Algo ocurre, Todo junto, Compara y Dos cambios*. Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y debaten sobre las clasificaciones.
Día 3 *Presentación de historias de números negativos*	La profesora presenta historias de las cuatro estructuras con números negativos y se debate su clasificación (véase tabla 3). Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten las clasificaciones.
Día 4 *Escribir historias*	Los alumnos escriben historias, las clasifican, las intercambian con los compañeros y discuten las clasificaciones.
Días 5 y 6 *Escribir historias y sus problemas correspondientes*	La profesora presenta una historia y sus correspondientes problemas. Los alumnos escriben los problemas que surgen a partir de una historia creada por ellos, los resuelven y los intercambian con los compañeros. Algunos de los problemas se escogen para ser discutidos con toda la clase.
Día 7, 8 y 9 *Escribir historias y sus problemas según una estructura indicada*	Redactan historias con una estructura indicada previamente por la profesora, resolviendo los correspondientes problemas e intercambiándolos con los compañeros.
Día 10 Prueba *final*	

de pasar de la historia a los problemas tiene como objetivo centrar la atención en cómo cambian los problemas y su resolución en función de la incógnita.

2.5 Instrucción del método resolver

El trabajo en el aula con los alumnos del método *resolver* se desarrolló de la forma que indica la tabla 5.

En el método *resolver* también se incide en las diferentes estructuras y posiciones de la incógnita de los problemas, pero no de forma explícita, como sí se hace en el método *redactar*.

2.6 Análisis de los datos

Los diferentes profesores llevaron un diario de clase en el que anotaron lo más relevante de las incidencias del aula. Se les indicó que observaran las dificultades del método, en cuanto

Tabla 4. Ejemplos de historias presentadas a los alumnos del método redactar.

Todo junto (e + e = e)

Julián está haciendo cuentas para comprarse un ordenador, para ello, repasa cómo está su situación económica en los bancos donde tiene ingresado el dinero. Pide los extractos de sus cuentas bancarias y observa que en el banco Nova tiene 125 367 pesetas y en el banco Universal debe 237550 pesetas. Julián concluye que debe 112 183 pesetas, por lo que decide dejar la compra del ordenador para más adelante.

Algo ocurre (e + v = e)

Un soldado vigila una muralla. La muralla tiene una puerta en su centro, 0. El soldado estaba 16 metros a la izquierda de la puerta cuando oyó un ruido que provenía del lado derecho de la muralla. Caminó hacia la derecha 35 metros y se paró al comprobar que había sido una falsa alarma. En ese momento decidió sentarse a descansar, miró hacia la puerta y comprobó que estaba a 19 metros por el lado derecho de la misma.

Dos cambios sucesivos (v + v = v)

Ana normalmente regresa a casa desde el instituto en guagua y siempre suele estar bastante llena. Un día que viajaba en la guagua, agobiada por la cantidad de gente que iba en ella, pensó: "¡Si no cabe nadie más…!, ¿cómo puede pararse en esta parada?" Contó el número de personas que subían y bajaban en esa parada y comprobó que bajaron 13 personas y luego subieron 7. "¡Uf!, el número de personas ha descendido en 6 con respecto a las que viajábamos antes de esta parada", pensó Ana más tranquila.

Compara (e + c = e)

Roberto es un hombre de negocios que viaja a distintos países. Hoy se encuentra en Roma, donde ha trabajado muy duro en un día agradable. De hecho, observó en un termómetro que la temperatura era de 21 grados sobre cero. Ahora está haciendo su maleta porque mañana se marcha a París. No sabe qué ropa coger, por lo que va a mirar en un periódico la temperatura de París en ese día. Decide coger su ropa de abrigo al calcular que en París tuvieron ese día 24 grados menos que en Roma, ya que la temperatura en París había sido de 3 grados bajo cero.

Tabla 5. Secuencia de instrucción del método resolver.

Actividades de clase	Observaciones
Día 1. *Prueba inicial*	Ver anexo 1
Días 2 a 9 *Resolver problemas*	Los alumnos resolvieron 30 problemas aditivos con distintos contextos y con las estructuras, posiciones de la incógnita y secuencia que se indican en la tabla 6. Se comenzó con los problemas de la primera columna y se terminó con los problemas de la última columna de la tabla 6. Es decir, se comenzó con problemas de incógnita 3, para posteriormente introducir problemas de otras incógnitas.
Día 10 *Prueba final*	

Tabla 6. Tipos de problemas y secuencia de los problemas del método resolver.

	Días 2-9					
e+e =e	i3	i3, i2	i2		i2	i3
e+v=e	i3, i3	i1	i2, i3	i1	i1, i2	i1, i2
v+v=v	i3	i3	i2	i2, i2	i3	i2
e+c=e	i3	i3	i2	i2, i3	i2	i2

a la viabilidad del mismo, los comentarios de los estudiantes que consideraran relevantes, especialmente las dificultades, las dudas y las preguntas que manifestaran en la escritura y/ o resolución de los problemas y, por último, las incidencias del aula en cuanto al comportamiento y la participación de los alumnos. Estas anotaciones se comentaron posteriormente con los investigadores y muchas de ellas se muestran en el apartado 5 de este trabajo.

En el método *redactar* los profesores recogieron las historias y los problemas escritos o resueltos por los alumnos. Se analizaron estos textos teniendo en cuenta, principalmente, cómo los clasificaron, cómo los resolvieron, y aspectos relativos al lenguaje y a la forma de expresar las situaciones.

Además, con las tres pruebas realizadas por los alumnos de los tres métodos (*inicial*, *final* y de *retención*), se realizó un estudio estadístico descriptivo de las variables de interés para nuestra investigación: dificultad de los problemas y estrategias de resolución; y una ANCOVA para verificar si había diferencias significativas entre los métodos. Para el análisis de los datos se han utilizado los paquetes estadísticos Systat y SPSS.

3. Resultados de las pruebas escritas

Los datos de la tabla 7 muestran las medias y desviaciones típicas (entre paréntesis) de las pruebas de los tres métodos. Recuérdese que en cada prueba los alumnos contestaron a 9 problemas, que se puntuaron con 0 (incorrecto) y 1 (correcto), con lo cual la puntuación máxima es 9.

Se observan diferencias en las tres pruebas (*inicial*, *final* y de *retención*). Los alumnos de los tres métodos muestran distinto conocimiento inicial de los problemas aditivos con números negativos. En la prueba *inicial* la puntuación más alta corresponde al método *control*, seguido del *resolver* y, por último, el *redactar*. Los alumnos del método *control* eran los que tenían menos conocimiento de los números negativos, según la información

Tabla 7. Medias y desviaciones típicas en las pruebas por métodos.

Método	Prueba *Inicial*	Prueba *Final*	Prueba *Retención*
Redactar	3.82 (1.77)	5.28 (2.08)	4.98 (1.78)
Resolver	4.63 (1.99)	5.81 (2.90)	5.91 (2.65)
Control	5.8 (1.79)	3.76 (2.19)	4.63 (2.18)

Tabla 8. Variaciones entre pruebas (por métodos)

	Final - Inicial	*Retención - Final*	*Retención - Inicial*
Redactar	+1.46	–0.3	+1.16
Resolver	+1.18	+0.1	+1.28
Control	–2.09	+0.87	–1.22

aportada por los profesores, y como lo confirman los resultados de la tabla 12, que se presenta más adelante, en la que se observa que estos alumnos usaron números positivos en la prueba *inicial* con más frecuencia que los otros métodos.

En las pruebas *final* y de *retención* las mayores puntuaciones corresponden al método *resolver,* seguido del de *redactar,* y por último, el de *control*. Es decir, que los alumnos de los métodos que siguieron un trabajo sistemático con los problemas aditivos con números negativos, obtuvieron mejores resultados que los que siguieron su libro de texto. El empeoramiento de los alumnos del método *control* se produce con el uso de los números negativos. En general, es más fácil para los alumnos resolver estos problemas con números positivos, y alguna ayuda (recta, esquema, etc.), pues así evitan plantear operaciones y efectuar cálculos con números negativos, donde cometen más errores, debido al menor dominio de las reglas operatorias de estos números.

La tabla 8 recoge las variaciones experimentadas de una prueba a otra. Se observa que desde la prueba *final* a la *inicial* el método que obtiene una mejora superior es el método *redactar*, seguido del método *resolver*. Mientras que el método *control* retrocede en dos puntos. De la prueba *final* a la de *retención*, podemos considerar que los métodos *redactar y resolver* se mantienen, ya que sufren leves variaciones (negativa y positiva, respectivamente), mientras que el método *control* mejora considerablemente. Por último, en las variaciones entre las pruebas de *retención* e *inicial* se observan mejoras en los métodos *redactar* y *resolver*, mientras que el *control* sufre un retroceso.

Los anteriores resultados muestran diferencias entre los tres métodos. Para concluir si dichas diferencias son *significativas* desde un punto de vista estadístico optamos por realizar un *análisis de covarianza* (ANCOVA), dadas las diferencias detectadas en la prueba inicial entre los métodos. Este es un procedimiento de control estadístico de variables extrañas, cuya diferencia fundamental con el ANOVA es que las comparaciones no se realizan a partir de las medias de las pruebas de los distintos métodos, sino desde las "medias ajustadas". En definitiva, hemos analizado el efecto que produce el método sobre la variable *prueba final* y también sobre la variable *prueba de retención*, cuando se ha eliminado el efecto de la variable *prueba inicial,* introduciéndola en el modelo como variable *concominante*.

En la tabla 9 se muestran los resultados del ANCOVA, donde se establece como variable *independiente* los tres métodos, y como variable *covariante* la puntuación de la *prueba inicial*. Se observa que hay significación estadística de los métodos ($p = 0.000$), tanto cuando se considera como variable dependiente la prueba *final*, como cuando se considera la prueba de *retención*. Es decir, que al controlar la prueba *inicial* se obtienen diferencias significativas entre los tres métodos.

Para analizar qué método produce las diferencias significativas realizamos una *prueba de Tukey para comparaciones múltiples*. Dicha prueba indica que para los métodos *redactar*

Tabla 9. Análisis de covarianza (ANCOVA).

Variable dependiente: *Final* N = 186 Correlación R: 0.518 Coeficiente R: 0.268					
Fuente	Suma de cuadrados	G.de L.	Media cuadrática	F	P
Método	249.355	2	124.677	25.343	0.000
Inicial	178.635	1	178.635	36.311	0.000
Error	895.366	182	4.920		
Var.dep.: *Retención* N = 186 Correlación R: 0'494 Coeficiente R: 0'244					
Fuente	Suma de cuadrados	G. de L.	Media cuadrática	F	P
Método	108.159	2	54.080	13.007	0.000
Inicial	185.645	1	185.645	44.649	0.000
Error	756.727	182	4.158		

y *resolver* no hay diferencias significativas y que es el método *control* el que da lugar siempre a que exista diferencia entre los métodos (tabla 10).

En definitiva, los métodos *redactar* y *resolver* dieron lugar a mejores resultados que el método *control*, aún siendo este grupo mejor en la prueba inicial, y aunque el método *resolver* obtuvo mejores resultados que el método *redactar*, las diferencias entre estos dos métodos no presentan significatividad estadística.

Otras variables como sexo o profesor no dieron lugar a diferencias significativas. Tampoco encontramos interacción significativa por sexo y método, algo que sí ocurrió en la investigación de Rudnitsky (1995).

4. La resolución de problemas

En esta sección realizamos un análisis más detallado de los problemas según los resultados de las pruebas escritas y estudiamos las dificultades y algunos aspectos relacionados con los procedimientos de resolución. El análisis se hace buscando regularidades o diferencias entre los métodos.

Tabla 10. Prueba de Tukey para comparaciones múltiples.

Matriz de probabilidad
Comparación por parejas

Método	*Redactar*	*Resolver*	*Control*
Redactar	1.000		
Resolver	0.988	1.000	
Control	0.000	0.000	1.000

4.1 Dificultad de los problemas

No podemos establecer una jerarquía de los problemas según su dificultad, ya que algunos cambian de contexto o de tipos de números según las pruebas, y estos aspectos pueden afectar a la resolución de los mismos (Marthe, 1979; Bruno y Martinón, 1997b). Se puede ratificar que los problemas de incógnita 3 suelen ser los más sencillos para todos los métodos y pruebas, con alguna excepción, justificada por el contexto del problema, y que se comentará más adelante en este mismo apartado.

En las figuras 1, 2 y 3 aparecen los resultados de cada uno de los problemas, pruebas y métodos. En la prueba *inicial* destaca el hecho de que para los tres métodos los problemas eee i3, eee i2 y ece i3 fueron los más sencillos. Llamamos la atención al problema eee i2, el cual tiene altos porcentajes de éxito a pesar de ser de incógnita 2. En las pruebas *final* y *de retención*, y para todos los métodos, los problemas más complejos fueron vvv i2 y eve i2. Mientras que el eve i3 fue el que causó menos dificultades, seguido del eee i3.

Las regularidades encontradas en los tres métodos indican, por un lado, que hay dificultades inherentes a los problemas aditivos con números negativos, que se manifiestan con independencia de los métodos de enseñanza utilizados. Por otro lado, la estructura e incógnita son factores más determinantes en la dificultad que los contextos o los tipos de números. Esto se puede comprobar en los problemas vvv i2 y eve i2, cuyos contextos y tipos de números variaron según las pruebas, y sin embargo, resultaron los más difíciles, con independencia de las pruebas y de los métodos (con una excepción en la prueba *de retención* del método *resolver*).

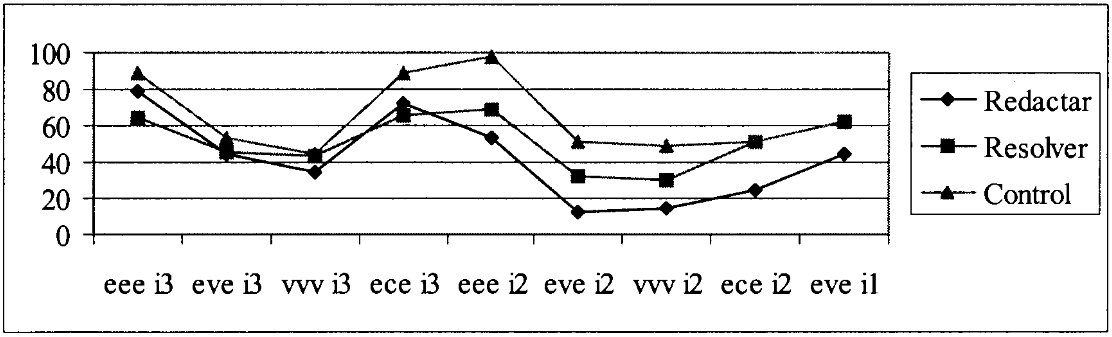

Figura 1. Porcentaje de éxito en la prueba *inicial* según los problemas.

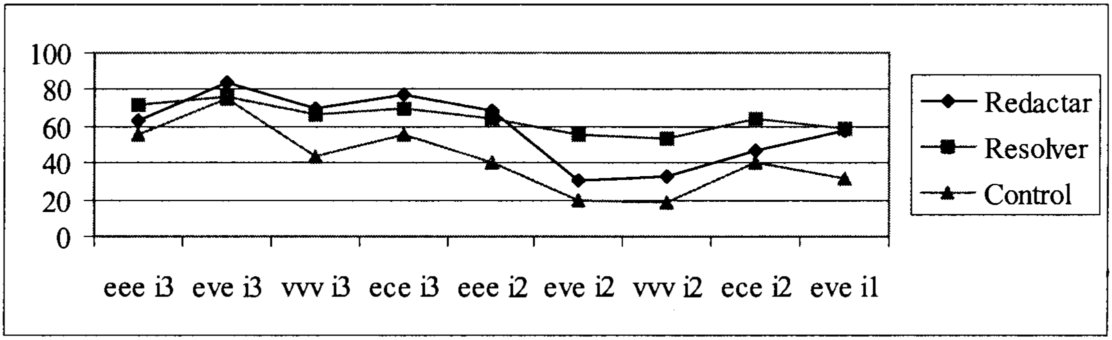

Figura 2. Porcentaje de éxito en la prueba *final* según los problemas.

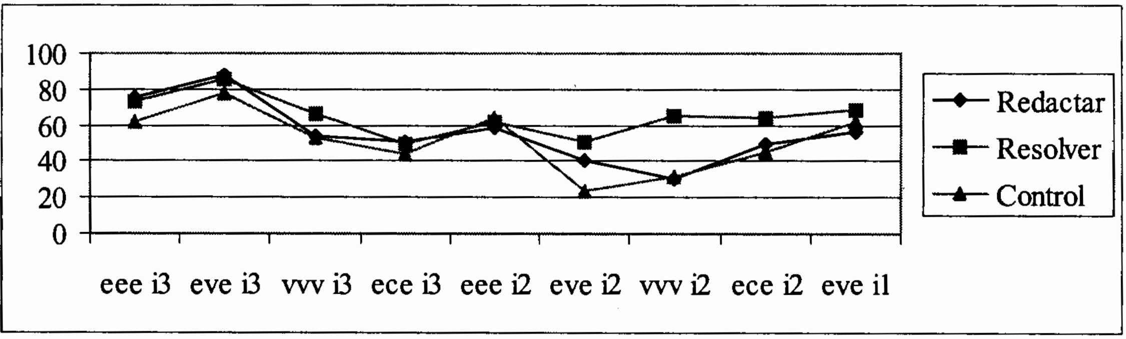

Figura 3. Porcentaje de éxito en la prueba *retención* según los problemas.

Sin embargo, el contexto también puede ser causa de dificultad importante. Este hecho queda patente con el problema de estructura eve i3, el cual resulta el más fácil en las pruebas *final* y *de retención*, para todos los métodos, y sin embargo en la prueba *inicial* no ocurre así. Esto puede estar provocado por el hecho de que en la prueba *inicial* el contexto del problema es cronología. Obsérvese también cómo un problema de incógnita 3, ece i3, que resulta entre los más sencillos para todos los métodos en las pruebas *inicial* y *final*, cambia sus porcentajes en la prueba *de retención*, colocándose incluso en el más complejo para el método *resolver.* De nuevo la causa puede ser el hecho de que es un problema de contexto cronología, el cual se ha demostrado en anteriores trabajos que es muy complejo para los alumnos (Bruno y Martinón, 1997b).

Las respuestas erróneas que dieron los alumnos las clasificamos de la siguiente forma:

- Plantear una operación incorrecta para resolver el problema. Por ejemplo, el problema que se resuelve con la operación $-4-(+7)$, resolver con la operación $-4+7$.
- Usar reglas operatorias incorrectas en las operaciones o errores de cálculo (el número del resultado es incorrecto). Es decir, plantear una operación correcta para resolver el problema, pero con un resultado final incorrecto, $-3-(+5)=-2$.
- Dar un resultado incorrecto usando la recta. Principalmente por equivocarse al contar las unidades y no llegar al resultado exacto.
- Escribir sólo el resultado del problema sin ninguna operación, siendo dicho número incorrecto.
- Respuestas en blanco.

En todos los métodos de las respuestas erróneas anteriores, la que ocurrió con más frecuencia fue el "planteamiento incorrecto de las operaciones", seguido del "uso de reglas operatorias incorrectas". Por lo tanto, la principal dificultad de los problemas aditivos con números negativos está en asociar el enunciado del problema con una operación correcta. Un análisis de los métodos y de lo que ocurrió en clase, nos lleva a afirmar que para muchos alumnos esa dificultad no está producida por una mala o inadecuada comprensión del enunciado, sino por no identificar la operación que resuelve el problema, y por no relacionar el significado con los aspectos formales y operatorios. Pensamos que una causa de ello puede ser que el conocimiento previo con números positivos bloquea y no se adapta de forma adecuada al conocimiento de los números negativos, ya que problemas que ellos resolverían con una suma pueden encontrar ahora que se resuelven con una resta, o viceversa.

4.2 Uso de la recta

Analizamos en este apartado los procedimientos utilizados por los alumnos para la resolución de los problemas, teniendo en cuenta que las pruebas escritas limitan conocer lo que pensaron en realidad los alumnos.

Básicamente, encontramos dos procedimientos: *plantear una operación* (suma o resta con números positivos o negativos) y/o *hacer una representación en la recta.* En la tabla 11 queda reflejado el porcentaje de alumnos que utilizaron la recta en cada uno de los problemas y según los métodos. Téngase en cuenta que se ha incluido en este porcentaje a los alumnos que resuelven el problema con recta y operación al mismo tiempo.

Los problemas de contexto *carretera* contenían en el enunciado la representación de una recta, para facilitar la comprensión del problema, por lo que no debe contrastarse con los otros contextos.

La principal conclusión es que el procedimiento no depende de la estructura o la incógnita, como sucede con la dificultad, sino que está condicionado por el contexto. Este resultado ya se había obtenido en un trabajo realizado con futuros profesores de educación primaria (Bruno *et al.*, 1998). Por ello, hemos añadido en la tabla el contexto de cada problema. Por ejemplo, el problema eve i3 cambia de porcentajes en el uso de la recta de la siguiente forma: entre 0% y 5% en la prueba *inicial* (contexto *cronología*), entre 13% y 23% en la *final* (contexto *temperatura*) y entre 42% y 65% en la *de retención* (contexto *ascensor*).

Tabla 11. Porcentajes de uso de la recta en las tres pruebas.

		eeei3	evei3	vvvi3	ecei3	eeei2	evei2	vvvi2	Ecei2	Evei1
Inicial	Contexto	Diner	Cron	Carre	Mar	Diner	Temp	Mar	Asce	Asce
	Redactar	0	5	12	19	0	9	9	40	25
	Resolver	0	1	11	15	0	7	5	43	31
	Control	0	0	5	5	0	0	4	18	13
Final	Contexto	Diner	Temp	Bus	Carre	Diner	Cron	Asce	Mar	Carre
	Redactar	0	23	7	93	2	12	32	28	93
	Resolver	0	14	3	82	0	5	41	43	82
	Control	2	13	4	62	0	2	14	9	62
Retención	Contexto	Diner	Asce	Temp	Cron	Diner	Mar	Bus	Carre	Temp
	Redactar	0	65	46	18	0	58	7	88	18
	Resolver	0	50	42	4	0	58	7	92	4
	Control	0	42	15	0	0	31	11	84	0

Con independencia de los métodos, los contextos que llevan a un mayor uso de la recta son *ascensor*, *temperatura* y *nivel del mar* (exceptuando los de *carretera*). Mientras que los que llevan a un menor uso de la recta son *dinero*, *cronología* y *autobús*, es decir, en los que no hay una relación real y directa con la recta.

En relación a los métodos observamos que el método *control* es el que, en general, menos uso hace de la recta. Lo cual puede ser un indicador que la enseñanza influye en el uso de la recta y que no es un modelo que se utilice de forma espontánea, ya que mientras en los otros dos métodos la resolución de problemas resaltó al uso de la recta, esto no fue así en el método control.

4.3 Uso de números positivos

Los problemas aditivos con números negativos pueden resolverse también usando números positivos e interpretando el resultado. Es por ello que nos interesó analizar qué uso hacen los alumnos de los números positivos, a pesar de que ya conocían los negativos.

La tabla 12 muestra que los tres métodos antes de realizar el trabajo de aula conocía los números negativos, por el uso que hacen de los mismos, sin embargo, hay diferencias entre ellos. En la prueba *inicial* el método *control* fue el que más usó números positivos en todos los problemas, con mucha diferencia con respecto a los otros métodos, debido a que estos grupos de alumnos, aunque habían estudiado el curso anterior los números negativos, no los habían tratado con tanta profundidad como los otros métodos. En el método *control* el uso de números positivos se reduce drásticamente al pasar a la prueba *final* y *retención*.

El uso de números positivos está condicionado por el tipo de problemas, ya que encontramos diferencias entre unos problemas y otros dentro de una misma prueba (en los

Tabla 12. Porcentajes de uso de números positivos en las tres pruebas.

		Eeei3	evei3	vvvi3	ecei3	eeei2	Evei2	vvvi2	Ecei2	Evei1
Inicial	Contexto	Diner	Cron	Carre	Mar	Diner	Temp	Mar	Asce	Asce
	Redactar	46	9	40	7	35	19	14	16	19
	Resolver	30	20	12	5	26	8	11	5	7
	Control	95	85	69	65	93	62	55	29	47
Final	Contexto	Diner	Temp	Bus	Carre	Diner	Cron	Asce	Mar	Carre
	Redactar	28	4	9	12	16	12	23	16	7
	Resolver	14	4	3	3	4	4	3	0	3
	Control	2	0	0	13	7	7	2	7	0
Retención	Contexto	Diner	Asce	Temp	Cron	Diner	Mar	Bus	Carre	Temp
	Redactar	11	0	5	12	28	7	12	4	0
	Resolver	1	1	5	8	14	1	11	7	4
	Control	18	0	9	20	42	7	24	11	0

tres métodos). Sin embargo, los resultados de nuestro estudio no permiten sacar conclusiones definitivas que lleven a distinguir qué problemas llevan a un mayor uso de positivos, por lo que se hace necesario estudios que investiguen ese hecho.

En la prueba *inicial* el problema eee i3 (*dinero*) es el que lleva a un mayor uso de los números positivos, seguido del problema eee i2 (*dinero*). En las pruebas *final* y *de retención* los resultados no son tan claros. En la prueba *final* es de nuevo el problema eee i3 (*dinero*), para los métodos *redactar* y *resolver*, y el problema ece i3 (*carretera*) para el *control*. Y en la prueba *de retención* el problema que lleva a mayor uso de positivos es el problema eee i2 (*dinero*). Hay también otros problemas con porcentajes que se pueden considerar relevantes, aunque tampoco lo cumplen todos los métodos: vvv i2, (*ascensor*), y vvv i2 (*bus*).

En resumen, los únicos problemas que claramente reflejan un mayor uso de números positivos para todos los métodos y todas las pruebas son los de estructura eee y contexto *dinero*, tanto de incógnita 3 como incógnita 2, por lo que no podemos determinar si la causa de ello es la estructura o el contexto. Quizás el razonamiento de los alumnos en este tipo de problemas sea la "compensación de cantidades positivas y negativas", por lo cual no tienen necesidad de escribir operaciones con números negativos. Lo que también puede implicar que sean estos los problemas más sencillos de resolución, son fácilmente adaptables al conocimiento previo de los alumnos, quienes no necesitan aplicar operaciones con números negativos para resolverlos.

5. Características del método *redactar*

Las ventajas y desventajas de un método de enseñanza no pueden medirse sólo con los porcentajes de éxito en unas pruebas escritas. Un método de enseñanza debe ser aplicable a la realidad del aula y no sólo ser útil a la investigación. En este apartado analizamos aspectos de tipo cualitativo relativos a lo que sucedió en el aula en el método *redactar* y que pueden interesar a un profesor que lleve esta metodología al aula. Se han utilizado las observaciones cualitativas realizadas al finalizar las sesiones diarias en sus clases por los profesores que participaron en la experiencia y los textos escritos por los alumnos. Estos textos con las historias y los problemas escritos por los alumnos, se recogieron al finalizar las sesiones de clase. En los ejemplos que exponemos se ha respetado su redacción, de ahí que, en ocasiones, puedan encontrarse errores gramaticales. Los resultados de este apartado se presentan de manera más amplia en Bruno (1999).

El método *redactar* resultó útil como método de investigación, ya que propició que los alumnos expresaran sus ideas sobre los problemas de forma escrita o de forma oral. Así, por ejemplo, se pudo descubrir sus contextos preferidos o si habían captado la diferencia entre situaciones estáticas, de variación y de comparación. Se plantearon momentos de debate, eligiendo alguno de los problemas redactados por los estudiantes con el fin de analizarlo, clasificarlo y resolverlo con toda la clase. Se procuró elegir problemas que tuvieran errores de redacción con el fin de que los compañeros aportaran sus modificaciones. La historia del ejemplo 1 se utilizó para discutir con ellos qué otra forma habría de expresar la comparación sin escribir la palabra "diferencia", ya que esta última palabra lleva a dar un resultado positivo:

> *Ejemplo 1. En una ciudad había un conserje que cuidaba dos edificios. En uno hay un ascensor en la planta 5 y en el otro está en el sótano 1. El conserje de los edificios llegó a la conclusión de que tenían una diferencia de 6 plantas.*

También en los momentos de debate se les pedía explicaciones de cómo resolvían los problemas, lo que nos sirvió, por ejemplo, para ratificar las dificultades que producen los problemas de incógnita 2, debidas principalmente a que los alumnos no identifican la resta que es necesaria plantear para resolver el problema.

5.1 Los textos escritos de los alumnos

En el estudio de estos escritos se ha tenido en cuenta, principalmente, cómo los alumnos han clasificado las historias o los problemas, la resolución de los mismos, y aspectos lingüísticos y formas de expresar situaciones que pueden aportar conocimiento sobre la comprensión de las situaciones por parte de los alumnos.

Dificultad para redactar

D'Amore (1997, 102-105) hace referencia a un trabajo que consistió en que los alumnos "reformulaban" problemas planteados por el profesor. Los autores de ese trabajo encontraron que los problemas "reformulados" poseían una sintaxis más simple, mayor presencia de aspectos afectivos y una redacción más detallada, incluso con repeticiones que desentonaban, pero que explicaban mejor el problema. En definitiva, los autores encontraron una distancia entre la forma adulta y la infantil de ver el texto.

En nuestro estudio, y en los primeros textos de algunos alumnos, vimos que tendían a ser más complicados que los que eran objeto de estudio. La primera dificultad para un profesor que siga este método es guiar a los alumnos hacia las historias que interesan desde el punto de vista estructural. Nos encontramos con historias que poco o nada tenían que ver con lo que se pretendía inicialmente. Por ejemplo, encontramos historias en las que se usaban más de tres números y/o varias estructuras al mismo tiempo. A veces escribieron problemas incoherentes como el del ejemplo 2.

> *Ejemplo 2. Juan le debe 50 yogures a David contando los que le dio a Richard, 7. En total, ¿cuántos yogures tiene Richard?*

Identificación de estructuras

Con carácter general, los alumnos no manifestaron excesivos problemas para clasificar las estructuras, y aceptaron los nombres dados por sus profesoras. Llamó la atención el hecho de que los alumnos cometen más errores de clasificación en las historias de números negativos que en las de positivos.

En ocasiones escriben historias de estructura "algo ocurre", diciendo que son del tipo "todo junto" o "dos cambios". El ejemplo 3 muestra una historia con números positivos que los alumnos la clasificaron de "algo ocurre" cuando es de "todo junto":

> *Ejemplo 3. María una profesora puso un examen a una clase de 28 alumnos. Los alumnos que aprobaron fueron 15 y llegó a la conclusión de que suspendieron 13 alumnos.*

Encontramos que ciertas expresiones o *palabras clave* podían provocar dificultades en la clasificación. Por ejemplo, si en el enunciado de la historia o del problema aparecía la expresión "en total", esto llevaba a los alumnos a pensar en la estructura "todo junto". El ejemplo 4 muestra una historia de "dos cambios" escrita por unos alumnos que ellos clasificaron como "todo junto".

Ejemplo 4. En la pastelería de mi abuela se venden muchos pasteles, pero cuando más se venden son los domingos por la mañana. Los días entre semana se venden unos 130 y los domingos se venden entre mañana y tarde. En total se venden 430 entre semana y fin de semana.

Pasar de las historias a los problemas
Respecto a pasar de historias a los problemas hay dos cuestiones importantes:

- Puede resultar un proceso largo para los alumnos. Por ejemplo, en algunos casos se dijo que los alumnos no llegaron a escribir los tres problemas correspondientes a una misma historia.
- Puede ocurrir que el problema correspondiente a una incógnita se escriba correctamente, y el de otra incógnita de forma incorrecta. Esto debe aprovecharse para debatir con ellos sobre cómo cambian los problemas en función de la posición de la incógnita. Esto puede observarse en el ejemplo 7.
- Pueden simplificarse las historias al pasar a los problemas. Veamos un ejemplo de esto último con una historia de "algo ocurre" y sus correspondientes problemas escrita por los alumnos, que puede considerarse correcta (ejemplo 5):

Ejemplo 5. Historia
Pedro se prepara para saltar de una avioneta que vuela a 20 metros. Pedro ha saltado, pero el paracaídas no se abre y cae al mar. De tanta altura Pedro se hunde 5 metros y flotando se da cuenta de que bajó 25 metros.

Problema 1
Pedro salta de una avioneta que vuela a 20 metros y cae 5 metros bajo el nivel del mar, ¿cuántos metros bajó?

Problema 2
Pedro salta de una avioneta que vuela a 20 metros, si baja 25 metros. ¿A cuántos metros se encuentra?

Problema 3
Pedro salta de una avioneta y cae 5 metros bajo el nivel del mar. Si baja 25 metros, ¿a cuántos metros volaba la avioneta?

El lenguaje
A los alumnos se les comentó que estábamos interesados en trabajar problemas de números negativos, por eso encontramos en sus redacciones el uso de contextos usuales de los negativos, pero también otros contextos o expresiones que denotan negatividad ("morir", "quemar", "faltar", "tirar piedras", etc.). Todo esto resultó interesante para los investigadores, porque reflejó las situaciones que asocian los alumnos a la negatividad, y en un futuro, algunas de ellas pueden usarse para redactar problemas más familiares para ellos.

También encontramos "descuidos" en las redacciones de los alumnos que pueden resultar determinantes en la resolución de los problemas, por ejemplo, olvidarse de decir si los movimientos son "hacia la derecha" o "hacia la izquierda".

Se dio con frecuencia el uso de expresiones "redundantes", como por ejemplo:

- "Fallecieron –168 personas" para expresar "Fallecieron 168 personas".
- "Le faltan –2000 pesetas" para expresar «Le faltan 2000 pesetas".

Este tipo de expresiones pudo llevar a algunos alumnos a resolver de forma incorrecta determinados problemas. Así, en el ejemplo 6 podría atribuirse el error en la operación al haber usado una expresión redundante (desciende –3) y a escribir una operación siguiendo el orden de los datos, asociando las palabras que denotan negatividad con el signo "menos".

Ejemplo 6. Un minero está a –50 metros bajo tierra. El minero desciende –30 metros más, ¿a cuantos metros bajo tierra se encuentra el minero?
Respuesta del alumno: (–50) – (–30) = –80.

Dificultad de los problemas
Los textos de los alumnos pusieron de manifiesto que la estructura "dos cambios" es irreal para muchos alumnos. Para ellos lo lógico es dar la posición inicial (o suponer que esta posición inicial es 0), los dos cambios y la posición final (es decir, un problema del tipo e + v + v = e). Algunos alumnos parecían entender este tipo de estructura en los debate de clase, pero cuando se les proponía escribir otra historia similar, insistían en expresar la situación final. Un ejemplo de esto es el que se expone a continuación (ejemplo 7) en el que los alumnos proponen los dos problema como de dos cambios, y las preguntas implican averiguar la posición final, no la variación que se ha producido. También se puede observar con este ejemplo la dificultad para escribir el problema correspondiente a otra posición de la incógnita, ya que los dos problemas corresponden a la misma posición de la incógnita, en este caso averiguar la posición final.

Ejemplo 7. Problema 1
Redondo es un hombre que le gusta mucho el mar. Hoy se encuentra en la playa donde está dispuesto a bucear. Se mete en el agua y baja unos 30 metros por debajo del nivel del mar. Poco después se encuentra que está muy al fondo y decide subir 10 metros más arriba, ¿a cuántos metros se encuentra bajo el nivel del mar?

Respuesta del alumno: –30 + 10 = –20

Problema 2
Redondo es un hombre que le gusta mucho el mar. Hoy se encuentra en la playa donde está dispuesto a bucear. Se mete en el agua y baja unos 30 metros por debajo del nivel del mar. Poco después se encuentra que está muy al fondo y decide subir 20 metros más arriba. ¿A cuántos metros se encuentra bajo el nivel del mar?

Respuesta del alumno: –30 + 20= –10

Es cierto que en su vida cotidiana no son frecuentes los problemas de esta estructura y tampoco en la práctica escolar con números positivos. Lo anterior puede remediarse porque son problemas que evidentemente tienen sentido tanto con números positivos como con negativos, y su uso con los positivos mejoraría el trabajo con los negativos, que es donde usualmente aparecen.

El método *redactar* puso de manifiesto que la principal dificultad no está en redactar los problemas, sino en escribir la operación con números negativos, apareciendo formas de resolución ya descritas en la literatura sobre el tema (Bruno y Martinón, 1997b).

5.2 El ambiente de clase en el método *redactar*

El método redactar implica que el profesor tiene un papel diferente al tradicional, ya que se rompe el esquema habitual de clase: explicación del profesor y, luego, práctica de ejercicios. Por el contrario, hay una gran participación de los alumnos. El hecho de intercambiar con sus compañeros las historias o que determinadas historias se conviertan en el centro de atención de toda la clase es un motivo importante de motivación para ellos. El único inconveniente en este sentido, que también concluyeron Rudnitsky *et al.* (1995), es que los alumnos pueden manifestar cansancio a la hora de escribir. De hecho, en ocasiones, escribieron directamente los problemas sin redactar la historia inicial, o sólo escribían dos de los tres problemas que surgen de una historia.

Se ha constatado que es un método que progresa más lentamente que el habitual, porque además de resolver problemas hay que escribirlos y discutir las estructuras, aunque pensamos que se está ganado en comprensión, cuestión esta última que requiere un estudio más profundo y la realización de entrevistas individuales a los estudiantes. Los resultados indican que es necesario una mayor práctica de problemas y quizás una posibilidad es ampliar unas sesiones de trabajo para practicar los problemas.

6. Conclusiones

Los resultados de esta investigación han mostrado que un trabajo sistemático de los problemas aditivos con números negativos, como ha sido el de los métodos *redactar* y *resolver*, produjo mejoras en la resolución de los mismos por parte de estudiantes de nivel medio básico. Mientras que el método, bastante extendido, de resolver problemas al final del tema, como aplicación de las reglas estudiadas previamente, no resultó tan eficaz. Sin embargo, los resultados del método *redactar*, que es el que presenta más novedades a nivel de aula, no fueron tan óptimos como los obtenidos por Rudnitsky *et al.* (1995), con números positivos. Además, no se ha mostrado más efectivo que el método *resolver*, aunque los resultados están próximos, y sí se ha mostrado mejor que una enseñanza en cierta forma, "tradicional". Es por ello, que no se descarta como una alternativa de enseñanza.

En cuanto a la resolución de problemas, hemos encontrado regularidades en los tres métodos que ratifican conclusiones de otras investigaciones previas. Así se ha comprobado que los problemas de incógnita 2 son más difíciles que los de incógnita 3, el contexto cronología se muestra especialmente complejo para los estudiantes, el uso de la recta depende del contexto y el uso de la recta está determinado por la instrucción.

Los errores analizados muestran que lo más complejo en la resolución de los problemas es plantear la operación que resuelve el problema, es decir, *que ante un problema aditivo de números negativos, entender la situación y encontrar la solución no siempre va unido a saber expresar formalmente un cálculo con números negativos que lo resuelva.*

El análisis del método *redactar* ha mostrado que los estudiantes pueden tener dificultades iniciales en la escritura de las historias, las cuales pueden ser solventadas con cierta facilidad y que la clasificación de los problemas se hace de forma correcta por parte de muchos estudiantes. Por último, se han observado que los estudiantes usan no sólo contextos diferentes a los tradicionales sino que además, los asocian con aspectos negativos (destrucción, muerte, etc.).

En resumen, el método *redactar* es una alternativa de enseñanza, al menos mejor que lo usual (el método control, en esta investigación), pero que no soluciona las dificultades que tienen los problemas aditivos con números negativos. Necesita más tiempo de enseñanza que otros métodos y quizás con una enseñanza prolongada a lo largo de un curso escolar, y no concentrada en un periodo corto de tiempo, se consigan mejores resultados. Lo que necesitamos profundizar es si con este método se consiguen mejorar otros aspectos importantes para el conocimiento matemático de nuestros estudiantes, entre ellos, reflexionar sobre un enunciado, no responder de forma mecánica o aprender que no todos los problemas son iguales en cuanto a su estructura. El análisis de si los alumnos consiguen mejorar en estos aspectos queda pendiente para futuras investigaciones.

Referencias bibliografícas

Bell, A. (1986). "Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros" en *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

Bruno, A. (1999). "Escribiendo problemas: una experiencia con números negativos". *Actas de las IX JAEM*, Lugo.

Bruno, A.; Espinel, C.; Martinón, A. (1998). "Prospective teachers solve additive problems with negative numbers" en *Focus on learning problems in mathemtics*, 19 (4), 36.55.

Bruno, A.; Martinón, A. (1997a). "Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos" en *Educación Matemática*, 9 (1), 33-46.

Bruno, A.; Martinón, A. (1997b). "Procedimientos de resolución de problemas aditivos de números negativos" en *Enseñanza de las Ciencias*, 15 (2), 249-258.

Conne, F. (1985). "Calculs numériques et calculs relationnels dans la resolution de problèmes d'arithmetique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5 (3) 269-332.

D'Amore, B. (1997). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Editorial Síntesis. Madrid.

Gallardo (1994). "Negative numbers in algebra. The use of a teaching model". *Proceedings XVIII PME*, vol 2, 376-383. Lisboa.

Gallardo (1998). Uso de un modelo de enseñanza como recurso de investigación en el estudio de los números enteros. En Hitt, F. (ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 311-328. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Janvier, C. (1985). "Comparaison of models aimed at teaching signed numbers". *Proceedings IX PME*, 135-139.

Liebeck, P. (1990). Scores and forfeits - an intuitive model for integer arihmetic. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 221-239.

Lytle, P. (1994). Investigation of a model on neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction. *Proceedings XVIII PME*, 192-199. Lisboa.

Marthe, P. (1979). "Additive problems and directed numbers". *Proceedings of the III PME*, 153-157. Warwick.

Rudnitsky, A.; Etheredge, S.; Freeman, J.M.; Gilbert, T. (1995). "Learning to solve addition and subtraction word problems through a structure-plus-writing approach" en *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (5) 467-486.

Vergnaud, G. (1982). "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems" en Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (eds.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. LEA. New Jersey.

Vergnaud, G.; Durand, C. (1976). "Structures additives et complexité psychogénétique" en *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

Anexo 1

Prueba inicial

1. Pitágoras nació en el año 580 antes de Cristo y vivió 79 años, ¿en que año murió?
2. Laura debe 650 pesetas a una amiga y tiene en su casa 1700 pesetas, ¿cuál es la situación económica total de Laura?
3. Un edificio tiene 25 plantas y 5 plantas de sótano. El ascensor del edificio bajó 8 plantas y se paró en la planta 3 del sótano, ¿dónde estaba el ascensor antes de realizar este movimiento?
4. El avión que realiza el trayecto Tenerife-Sevilla pasó por una tormenta. Para evitarla realizó dos movimientos seguidos. Al salir de la tormenta el avión había bajado 400 metros respecto a su posición antes de la tormenta. Si su primer movimiento durante la tormenta fue subir 300 metros, ¿cuál fue su segundo movimiento?
5. Un buzo está nadando a 11 metros bajo el nivel del mar y otro buzo nada 4 metros por debajo de él, ¿cuál es la posición del segundo buzo con respecto al nivel del mar?
6. Un coche se mueve en la carretera primero 6 kilómetros a la izquierda y luego, 9 kilómetros a la derecha. ¿Cuál ha sido el cambio total de la posición del coche respecto a la que tenía antes de moverse?
7. El hospital tiene 10 plantas y 4 plantas de sótano. Para moverse en ellas cuenta con dos ascensores. En estos momentos, el ascensor A está en la planta 5 y el ascensor B está en la planta 3 del sótano, ¿cuál es la posición del ascensor B respecto al ascensor A?
8. Hemos puesto agua a calentar. Al principio el agua estaba a 5 grados bajo cero y al terminar de calentarla había alcanzado 47 grados sobre cero, ¿cuál fue el cambio de la temperatura del agua?
9. Ana está pasando por una mala racha económica, por lo que ha pedido dinero prestado a su amigo Juan y a su padre. Al hacer cuentas llegó a la conclusión de que debe en total 43 000 pesetas. Si a Juan le debe 13 000 pesetas, ¿cuánto dinero le debe a su padre?