

Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática

Maria Salett Biembengut y Nelson Hein

Resumen: La modelación matemática está siendo fuertemente defendida, en los más diversos países, como método de enseñanza de las matemáticas en todos los niveles de escolaridad, ya que permite al alumno no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema. A pesar de estas condiciones favorables, algunos factores como el tiempo de (con)vivencia de profesores y alumnos con la enseñanza “tradicional” han dificultado la implementación de la modelación. En este artículo, presentamos las principales consecuencias de este enfoque en la enseñanza de matemáticas basadas en una investigación realizada en 2001 y 2002 con un grupo de 30 profesores de varios niveles de enseñanza.

Palabras clave: modelación matemática, enseñanza, aprendizaje.

Abstract: Mathematical modelling has been strongly defended in many different countries as a teaching method for every educational level, because it allows the students not only to learn mathematics applied to other areas of knowledge but to improve their capacity of reading, interpreting, formulating and solving problem situations. Despite those favorable conditions, some factors like working/relating time with the teacher in traditional education, have been an obstacle to the implementation of that modelling. This article addresses the main consequences of modelling in mathematical teaching, based on a research carried out in 2001 and 2002, with a group of 30 teachers in a great variety of teaching levels.

Keywords: mathematical modelling, teaching, learning.

INTRODUCCIÓN

Los cambios que ocurren en diversos sectores de la sociedad muestran que dependemos, cada vez más, del conocimiento y de la creatividad. Esto tiene implica-

ciones y ejerce efectos sobre nuestra tarea como educadores, pues, en los cambios cada vez más rápidos y de mayor intensidad, lo que permanece es el conocimiento.

Ese crecimiento en la importancia relativa del conocimiento como factor de producción, esa creciente identificación del mundo del conocimiento con el mundo del trabajo han conducido a transformaciones en el significado del trabajo para las cuales los educadores, en los diversos niveles de escolarización y en los diversos espacios del conocimiento, todavía no parecen haber dedicado suficiente atención (Machado, 1997, p. 16).

En medio de las continuas transformaciones, no basta tener conocimiento específico sobre un asunto y ejercer su mera transmisión. Es fundamental, cada día, obtener nuevos conocimientos y habilidades en la aplicación y socialización de ellos. Y, con ese pretexto, la modelación matemática viene siendo muy defendida como método de enseñanza.

La modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático. Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías. En la práctica, ese conjunto de símbolos y relaciones puede estar vinculado a cualquier rama de las matemáticas, en particular, a los instrumentos fundamentales de las aplicaciones matemáticas (Biembengut, 1999, p. 20). Un aspecto de la actividad científica, en particular de la actividad matemática, consiste en crear modelos. En la literatura se encuentran definiciones específicas de la noción de modelo para cada especialidad.

El proceso de modelación involucra una serie de procedimientos, a saber, elección del tema; reconocimiento de la situación/problema → delimitación del problema; familiarización con el tema que va a ser modelado → referencial teórico; formulación del problema → hipótesis; formulación de un modelo matemático → desarrollo; resolución del problema a partir del modelo → aplicación; interpretación de la solución y validación del modelo → evaluación.

La elaboración de un modelo matemático requiere, por parte del modelador, conocimientos tanto matemáticos como no matemáticos, además de una buena dosis de intuición y creatividad para interpretar el contexto y discernir cuáles son las variables involucradas (Biembengut y Hein, 1999, pp. 12-13).

Como las matemáticas no sólo contribuyen extraordinariamente al ejercicio

intelectual, sino que también son el lenguaje de la ciencia, en las dos últimas décadas, en diversos países, viene creciendo un movimiento¹ en pro de esta metodología en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Preocupaciones sobre qué, cómo, cuánto y para qué enseñar matemáticas han contribuido al fortalecimiento de esas investigaciones en el área de la Educación Matemática.

Como investigadores en esta área desde 1986, hemos buscado legitimar en la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel escolar un método que es una adaptación del proceso de la modelación. En este artículo, presentamos las principales consecuencias de la modelación matemática en la enseñanza de las matemáticas basadas en una investigación realizada en 2001 y 2002 con un grupo de 30 profesores de varios niveles de enseñanza (secundaria, bachillerato y licenciatura). Para ello, inicialmente haremos una breve explicación sobre el método que definimos para la enseñanza y presentaremos un ejemplo de cómo actuamos en clase.

MODELACIÓN MATEMÁTICA COMO MÉTODO DE ENSEÑANZA

La modelación matemática, originalmente, como metodología de enseñanza, parte de un tema² y sobre él desarrolla cuestiones o preguntas que quiere comprender, resolver o inferir. Esas preguntas deberán ser respondidas mediante el uso del conjunto de herramientas matemáticas y de la investigación sobre el tema.

La idea de muchos defensores de la modelación en la enseñanza es la de que cada alumno pueda elegir un tema de algún área de su interés, hacer una investigación al respecto, proponer cuestiones y, bajo la orientación del profesor, elaborar un modelo matemático. En estos términos, el alumno pasa a ser (co) responsable de su aprendizaje y el profesor, un orientador (Bassanezi, 2002). Tales defensores creen que el aprendizaje se vuelve más rico, considerando que el alumno no sólo aprende matemática inserta en el contexto de otra área del conocimiento, sino que también despierta su sentido crítico y creativo. Además, se trata

¹ Ese movimiento se fortalece aún más con la formación en 2000 de un grupo formado por 12 investigadores de los países (Alemania, Australia, Bélgica, Brasil, Canadá, China, Dinamarca, España, Estados Unidos, Francia y Japón) por parte de la ICM. Biembengut es integrante de dicho grupo para la elaboración y discusión de un documento sobre aplicaciones y modelación matemática en la enseñanza, la promoción de un evento en febrero de 2004, en Alemania, para discutir este documento y la publicación de un libro por Kluwer Academic Publishers, donde serán presentadas las perspectivas del área en la próxima década.

² Se entiende por tema algún asunto de un área del conocimiento que se pretende tratar.

de una manera altamente placentera de investigar el tema y es capaz de llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significados o sentido para él, ya sea en forma de conceptos matemáticos, ya sea sobre el tema que se estudia (Biembengut y Hein, 2003, p. 42).

En la enseñanza formal, sin embargo, algunos factores como el currículo, horario de clases, número de alumnos por curso, disponibilidad de tiempo para que el profesor efectúe un acompañamiento simultáneo de los trabajos de los alumnos, nos llevaron a efectuar algunas adaptaciones en el proceso de la modelación como método de enseñanza.

Con la aplicación de la modelación matemática, se espera propiciar para el alumno:

- integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento;
- interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad;
- mejora de la aprehensión de los conceptos matemáticos;
- capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema;
- estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas;
- habilidad en el uso de la tecnología (calculadora gráfica y computadoras);
- capacidad para actuar en grupo;
- orientación para la realización de la investigación;
- capacidad para la redacción de esa investigación.

Para implementar la modelación matemática en la enseñanza, el profesor actúa en dos tipos de abordajes: *el primero*, le permite desarrollar el contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados a las más diversas áreas del conocimiento y *el segundo* orienta a sus alumnos para que hagan un trabajo de modelaje. La modelación puede ser implementada en cualquier nivel de escolaridad: desde el ciclo primario hasta la licenciatura.

El tema (o situación-problema) es único para todas las clases y de él se extrae el contenido programático. Se pueden utilizar *temas* diferentes para presentar cada tópico o contenido matemático del programa del año lectivo (bimestre, semestre). Si se opta por *tema* único para el periodo lectivo, es importante que sea suficiente para poder tratar los contenidos programáticos y que esté en sintonía con el interés de los alumnos.

PRIMER ABORDAJE: DESARROLLO DEL CONTENIDO PROGRAMÁTICO

Para desarrollar el contenido programático, el profesor elige un tema de algún área del conocimiento que pueda interesar a los alumnos y elabora un modelo matemático, adaptándolo a la enseñanza. O, al contrario, elige un modelo matemático aplicado, por ejemplo en la Física, la Química, la Biología, la Música o la Economía, y lo adapta al desarrollo del contenido programático. Ese modelo servirá de guía. Esto involucra al profesor en una serie de etapas que consisten en:

- 1) Exposición del tema.
Comienza la clase haciendo una breve explicación sobre el asunto a los alumnos, instigándolos para que formulen preguntas sobre el tema abordado.
- 2) Delimitación del problema.
Selecciona una o más preguntas que le permitan desarrollar el contenido programático. Si fuera posible y/o conveniente, se puede proponer a los alumnos que hagan una investigación sobre el asunto por medio de bibliografía o entrevista a algún especialista en el asunto.
- 3) Formulación del problema.
Plantea el problema, construyendo hipótesis, planteando ecuaciones u organizando los datos de la manera en que el contenido matemático lo requiera para la resolución.
- 4) Desarrollo del contenido programático.
En este momento, presenta el contenido programático (concepto, definición, propiedad, etc.) y establece una conexión con la pregunta que generó el proceso.
- 5) Presentación de ejemplos análogos.
A continuación, presenta ejemplos análogos, ampliando el abanico de aplicaciones y evitando, así, que el contenido se restrinja al tema o problema presentado. Además, el estímulo y la orientación para el uso de la tecnología, que es parte de la práctica diaria, tales como calculadoras o computadoras, es importante.
- 6) Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo.
Propone a los alumnos que regresen al problema que generó el proceso y lo resuelvan.
- 7) Interpretación de la solución y validación del modelo.
Al finalizar esta etapa, es importante que el alumno evalúe el resultado

(validación). Esto permite al alumno una mejor comprensión o discernimiento de los resultados obtenidos.

Estas siete etapas no necesitan ser implementadas en una única clase. Se puede planificar para diversas clases dentro de un periodo lectivo. Por ejemplo, las dos primeras etapas, en una clase, y dejando como tarea para el hogar, hacer una investigación sobre el tema abordado; las tres etapas siguientes, en una segunda clase, y las dos últimas etapas, en el momento en el que el profesor juzgue que los alumnos ya alcanzaron el objetivo o aprendieron el contenido propuesto.

El modelo matemático director puede ser único para todo un periodo lectivo o para desarrollar cada tópico matemático del programa. Lo importante es que esté en sintonía con los intereses de los alumnos.

Para ilustrar, presentamos una pequeña parte de un trabajo de modelación que hicimos sobre cría de pollos para la enseñanza de contenidos matemáticos como: sistema lineal, matrices, determinantes, funciones, derivadas, programación lineal, etc. Este trabajo fue adaptado y utilizado por varios profesores para la enseñanza en cursos de bachillerato y licenciatura. Cabe destacar que, por cuestión de espacio, no estamos dando aquí un tratamiento matemático riguroso ni tampoco detallando como fue tratado en clase.

EJEMPLO: EL ALIMENTO BALANCEADO PARA POLLOS Y SU COSTO MÍNIMO

- 1) Empieza la clase haciendo una breve exposición sobre la cría de pollos en granjas.

Las empresas alimenticias vienen ganando cada día más espacio. Las actividades en las que las personas se involucran reducen el tiempo para realizar tareas comunes cotidianas, como la preparación de alimentos. Eso las lleva a buscar alimentos preparados o parcialmente preparados, para facilitar sus vidas. Entre los productos granjeros se encuentra la carne de pollo. Las características que presenta la carne de pollo, los cambios de hábitos de vida del consumidor y el precio, entre otros, son factores que colaboran para este crecimiento. Eso ha llevado a las empresas productoras de esta carne, y en general de productos avícolas, a mejorar su calidad y, al mismo tiempo, bajar el costo. Los nutricionistas consideran la carne de pollo y el huevo como alimentos ideales para todas las personas, cualquiera que sea su edad o sus necesidades nutritivas. Al ser

la carne de pollo una carne flaca y, por consiguiente, baja en calorías, es ideal para regímenes, dietas y personas de vida sedentaria. Como estos animales se crían en granjas y hay un costo asociado para su manutención, es necesario buscar medios para minimizar dicho costo sin comprometer la calidad de la carne.

Según datos de la EMBRAPA,³ el crecimiento de pollos en granjas depende, entre otras cosas, de la ración consumida en un periodo. Por tanto, el alimento balanceado para pollos debe atender los requerimientos mínimos nutricionales que necesita recibir este animal. La ración de comida que reciban debe cumplir ciertos requerimientos en cuanto a proteínas, vitaminas, fósforos, etc. El cuadro 1 muestra los requerimientos mínimos de tres componentes de la ración, en la fase inicial (1-21 días de vida).

Cuadro 1 Exigencias nutricionales del pollo

Ítem	Ración
Energía (cal/kg)	3 050
Proteína (%/kg)	22
Metionina (mg/kg)	14

Fuente: EMBRAPA.

Para producir las raciones, el fabricante, utiliza maíz, soya, harina de vísceras, sal, gordura, etc. El cuadro 2 presenta la proporción de contenidos nutritivos de maíz y soya y el cuadro 3 presenta el costo por kg de estos productos.

Cuadro 2 Composición nutritiva de maíz y soya

Ítem	Maíz	Soya
Energía (cal/kg)	2 900	2 700
Proteína (g/kg)	180	300
Metionina (mg/kg)	8	16

Fuente: EMBRAPA.

³ Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária.

Cuadro 3 Precio del maíz y de la soya

Producto	Precio*/kg
Maíz	0.15
Soya	0.24

Fuente: www.ruralnet.com.br

* Precio en reales, que es la actual moneda de Brasil (R\$).

- 2) En este momento, junto con los alumnos, se busca plantear algunas cuestiones sobre el tema, eligiendo las que permitan llevar el contenido matemático que se quiere tratar, o sea, se delimita el problema. Suponiendo que la cuestión elegida fuera: *¿Cuál es la proporción de maíz y de soya en la composición de alimento para pollos que minimiza el costo de la producción?*
- 3) El primer paso para responder la cuestión planteada es traducir la información descriptiva, esto es, formular el problema en términos de un modelo matemático. Así, tenemos que buscar una relación entre los componentes, maíz y soya, de la ración de los pollos. Las variables de decisión involucradas en este modelo son dos, o sea, las cantidades (kg) de maíz (x) y soya (y) en la composición de la ración. Pongamos así:

x : cantidad (kg) de maíz en la ración ($x \geq 0$).

y : cantidad (kg) de soya en la ración ($y \geq 0$).

El objetivo del problema es la minimización del costo de la ración. Como tenemos los costos unitarios de cada componente (cuadro 3), construimos la función de costo:

$$C = 0.15x + 0.24y$$

Como la intención es minimizar, podemos escribir junto a la función:

$$\text{Min } C = 0.15x + 0.24y$$

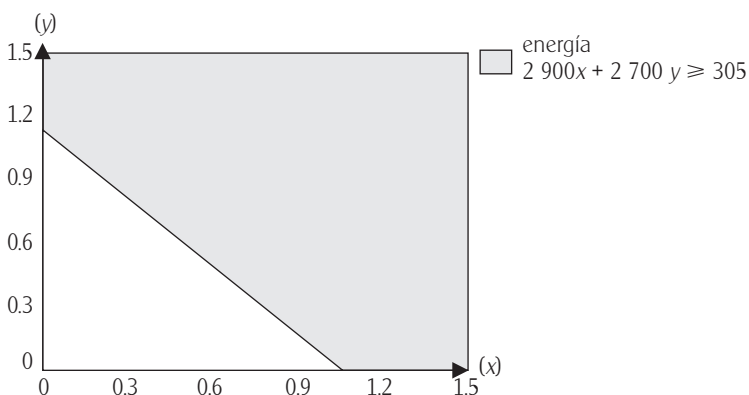
Junto a la función objetivo todavía tenemos que formular algunas restricciones técnicas que atiendan los requerimientos mínimos de energía, proteína y metionina (cuadro 1). Empezando por la cantidad de energía, tendremos que considerar la restricción relativa a composición de los alimentos:

maíz y soya (cuadro 2). Sabemos que la cantidad diaria de energía de la ración debe ser mayor o igual a 3 050kcal/kg

Así, se puede escribir: $2\,900x + 2\,700y \geq 3\,050$

Gráficamente tenemos la siguiente situación:

Figura 1 Restricción de energía

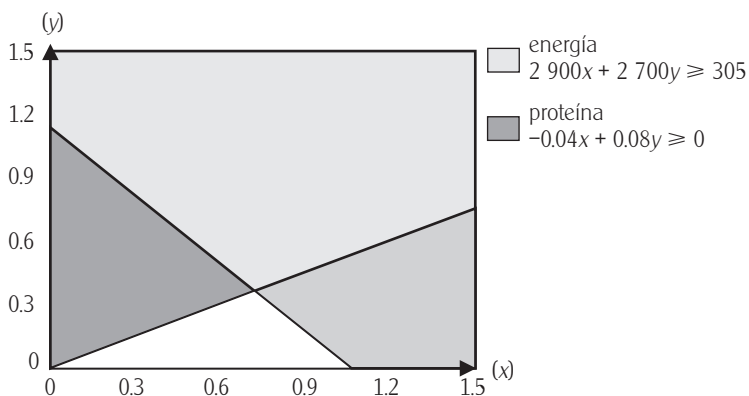


La segunda restricción dice que la proteína debe representar por lo menos 22% en la composición de la ración.

Así tenemos que: $0.18x + 0.3y \geq 0.22(x + y) \geq -0.04x + 0.08y \geq 0$

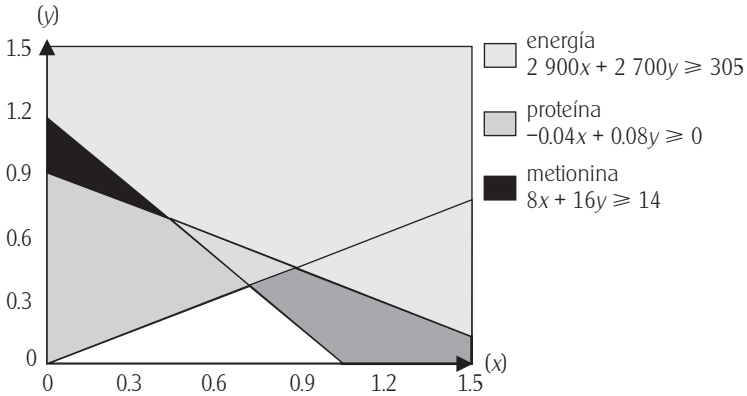
Gráficamente tenemos ahora:

Figura 2 Restricciones de energía y proteína



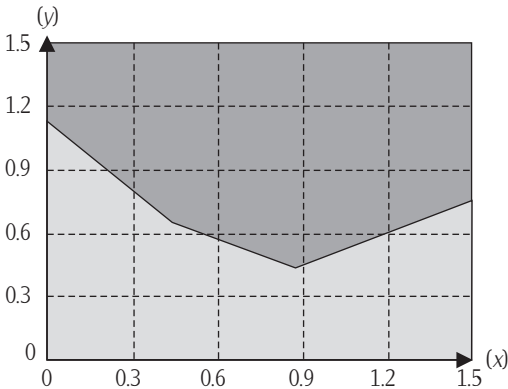
Finalmente, la metionina debe alcanzar un mínimo de 14mg/kg, luego:
 $8x + 16y \geq 14$
 Ahora ya tenemos la siguiente situación gráfica:

Figura 3 Restricciones de energía, proteína y metionina



La región factible es pues la que sigue:

Figura 4 Región factible



4 y 5) Presentación del contenido programático y ejemplos análogos.

Durante la formulación o enseguida, haga un primer modelo, presente el contenido programático. En el ejemplo anterior, están involucrados sistemas

lineales, matrices, gráficos. Puede, entonces, realizar una presentación de los métodos de resolución, tipos de soluciones, fortalezas y debilidades de cada uno de ellos. Debe tener en cuenta que existe un software de computación que proporciona la solución óptima. Así, puede hacer uso de computadora si lo cree conveniente. Siempre que lo juzgue pertinente, presente ejemplos análogos.

- 6) Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo.

La respuesta del modelo está en algún punto de la región factible (figura 4). Para llegar a la respuesta óptima del problema hay muchas alternativas. Una de ellas es hacer alguna simulación numérica, o sea, probar puntos (x, y) posibles de la región sombreada y tomar como solución la que lleve al menor costo C . Todavía hay teoremas matemáticos que dicen que, cuando tenemos un problema de programación lineal (Hein, 1999, p. 45), como en nuestro caso, la respuesta está siempre en un conjunto convexo. Es posible observar esto en la figura 4. Otro teorema propone que la solución de un modelo de programación lineal está en la frontera de la región factible, o mejor aún, en alguno de los puntos esquina de la región factible convexa. Esto hace que el número de puntos posibles se reduzca a tres; también es posible que la respuesta óptima esté sobre alguna recta que conecta dos puntos óptimos. Así tendríamos infinitas soluciones, pero no es lo que ocurre en este problema.

El primer punto esquina que vamos a probar es $P_1 = (0, 1.12)$, que es la intersección entre la restricción de energía y el eje y (porque $y \geq 0$). Este punto lleva a un costo aproximado de $C = \$0.27$.

El segundo punto esquina es la intersección entre la restricción de energía y de metionina. Como la respuesta está sobre la frontera, obtenemos un sistema lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{aligned} 2\ 900x + 2\ 700y &= 3\ 050 \\ 8x + 16y &= 14 \end{aligned} \qquad P_2 = (0.444, 0.653)$$

La solución aproximada del sistema es:

$$x = 0.444\ \text{kg} = 444\ \text{g} \text{ y } y = 0.653\ \text{kg} = 653\ \text{g} \text{ con costo } C = \$0.22.$$

Como último punto esquina tenemos el formado por la intersección de la restricción de metionina y de proteína. Así tenemos un nuevo sistema lineal:

$$0.04x + 0.08y = 0$$

$$8x + 16y = 14$$

$$P_3 = (0.879, 0.438)$$

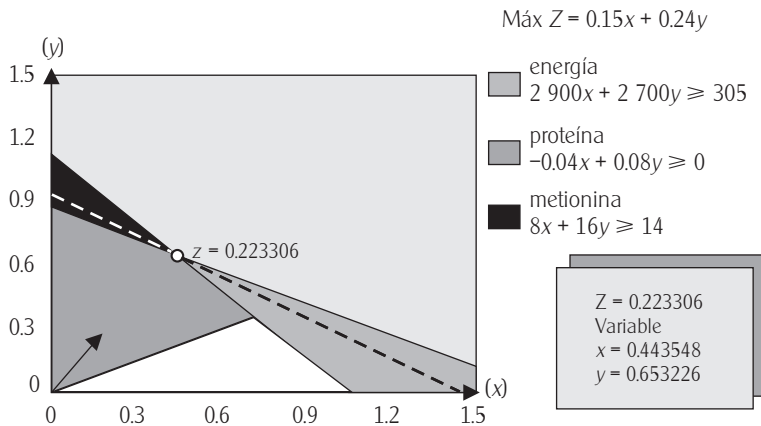
La solución de este sistema es: $x = 0.875 \text{ kg} = 875 \text{ g}$ y $y = 0.438 \text{ kg} = 438 \text{ g}$, con un costo

$$C = \$0.24.$$

Por tanto, la mejor respuesta, o sea el costo mínimo para la ración para pollos, es la combinación de 444 g de maíz y 653 g de soja, que tiene un costo de \$0.22.

La visualización de la respuesta óptima está en la figura 5.

Figura 5 Solución del problema



Hay otras maneras para obtener la respuesta del problema. Una de las más conocidas es la proyección del gradiente, pero es necesario que el alumno conozca algunos rudimentos de análisis vectorial, o también podemos utilizar el método *simplex* (Hein, 1999, p. 48) para resolver el problema de programación lineal. Sin embargo, el tema es que la implementación es un detalle en el modelo, o sea, su resolución va a depender del conocimiento matemático del alumno en ese momento.

7) Interpretación de la solución y validación del modelo.

En este momento se busca, junto con los alumnos, verificar la validez de los resultados. Una alternativa es visitar una empresa de productos ali-

menticios y entrevistar a técnicos o solicitar que los alumnos busquen datos en Internet para poderlos comparar.

SEGUNDO ABORDAJE: ORIENTAR A LOS ALUMNOS PARA QUE HAGAN UN TRABAJO DE MODELACIÓN

El objetivo central de este trabajo es crear condiciones para que los alumnos aprendan a investigar y elaboren modelos matemáticos aplicados en algún área del conocimiento. Este trabajo se realiza paralelamente al desarrollo del contenido programático.

Para facilitar la conducción, sugerimos que los alumnos se agrupen de acuerdo con sus intereses y afinidades o que el periodo lectivo se divida en por lo menos cinco etapas para que se cumplan las propuestas y el profesor pueda efectuar las debidas alteraciones en clase. Las etapas son:

1) Elección del tema.

Se forman grupos, como máximo de cuatro alumnos, y cada grupo elige un tema/asunto de acuerdo con su interés. El grupo de alumnos, con orientación del profesor, debe ser responsable por la elección y dirección de su propio trabajo. Una vez elegido el tema/asunto, el profesor propone que obtengan datos mediante bibliografía especializada o especialistas.

2) Familiarización con el tema que va a ser modelado.

En esta segunda etapa, los alumnos ya deben estar familiarizados con el tema y disponer de muchos datos. Así, el profesor propone que elaboren una serie de preguntas y una síntesis de la investigación para ser entregada. Esta síntesis le permite al profesor enterarse del tema y seleccionar, como sugerencia, alrededor de tres preguntas para cada grupo.

3) Delimitación del problema y formulación.

Delimitado el problema o las preguntas seleccionadas, se pasa a formularlo a partir de la pregunta que requiere la matemática más elemental. Cuando el grupo tenga una buena base sobre el tema con el que está trabajando, una entrevista con un especialista puede contribuir mucho para el trabajo.

4) Elaboración de un modelo matemático, resolución y validación.

Una vez formulado el problema, se busca elaborar un modelo que permita no sólo la solución de la cuestión en particular, sino también encontrar otras soluciones o efectuar previsiones.

5) Organización del trabajo escrito y exposición oral.

Es de importancia esencial que el trabajo sea divulgado. Así, en esta etapa, los grupos deben presentar el trabajo desarrollado por escrito y oralmente, por medio de un seminario, a los demás alumnos o a quien le pueda interesar.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

La modelación matemática puede ser utilizada como método para desarrollar el contenido programático (método de enseñanza) o como un método para enseñar a los alumnos a hacer la modelación (método de investigación). Usándola como método de enseñanza, sugerimos que el profesor conduzca a los alumnos a hacer investigaciones (por medio de bibliografía especializada o mediante una entrevista con un especialista) sobre el tema del modelo (o modelos) director(es). Como método de investigación solamente, el desarrollo del contenido programático puede ser tratado en la forma tradicional.

Ya sea en uno de los dos abordajes o en ambos (enseñanza e investigación), tenemos como premisa la promoción del conocimiento matemático y la habilidad para aplicarlo en otras áreas del conocimiento, es decir, proporcionar elementos para que el alumno desarrolle sus potencialidades, propiciando el pensamiento crítico e independiente.

HECHOS RELEVANTES DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

La modelación matemática es un proceso que viene siendo implementado por varios investigadores hace casi tres décadas en nuestro país. Como toda propuesta, tiene ventajas buenas y legítimas, pero también tiene algunas dificultades que pueden ser subsanadas.

Nosotros hemos aplicado la modelación matemática desde 1986 con alumnos de todos los niveles (primaria hasta licenciatura), directa e indirectamente, con profesores simpatizantes de la propuesta (Biembengut y Hein, 1999). También hemos desarrollado trabajos con profesores mediante cursos de formación continua y disciplinas de cursos de posgrado en Educación Matemática. Hemos realizado diversos tipos de investigación con la modelación, analizando, por ejemplo: aprendizaje, creatividad, motivación, evaluación, etc. Uno de los estudios

fue para saber las principales dificultades de los profesores y sus alumnos con el método de la modelación. Colaboraron en este estudio 30 profesores que participaron en un curso de formación continua con nosotros y después intentaron hacer modelación con sus alumnos de secundaria y bachillerato (casi 600 alumnos de secundaria y 300 de bachillerato). Procuramos evaluar el proceso y el resultado. Presentamos a continuación una síntesis de las principales ventajas y dificultades de los profesores y los alumnos.

LAS PRINCIPALES VENTAJAS

Dentro de las ventajas, se encuentran:

1) En relación con el modelo guía:

- Propicia en el alumno una mejor comprensión de los contenidos desarrollados y mejora el grado de interés del alumno por las matemáticas, debido a la aproximación con el área afín y la aplicación.
- Permite una mayor seguridad en el profesor para la conducción de la clase, pues puede determinar un tiempo para enseñar el contenido matemático, presentar ejemplos análogos y retornar al modelo director, resolviéndolo y evaluándolo.

2) En relación con el trabajo de modelación:

- Favorece que el alumno: actúe/haga y no sólo reciba sin comprender el significado de lo que está estudiando; que investigue, lo que es una actividad poco común a pesar de ser parte del currículo; que cree conocimiento y sentido crítico, principalmente en la formulación y validación del modelo; que interactúe y se entere de los trabajos de los demás grupos.
- Permite al profesor: estar más atento a las dificultades del alumno, tomar conocimiento de los trabajos de manera gradual, en especial en el momento en el que orienta a los alumnos, y modificar sus criterios e instrumentos de evaluación.

LAS PRINCIPALES DIFICULTADES

La dificultad principal está centrada en la formación de los profesores y en la falta de vivencia del alumno en un trabajo de esta naturaleza. En la formación de profesores de matemáticas, por ejemplo, rara vez se da una orientación de modelación ni cómo utilizar este procedimiento en la enseñanza formal. Eso viene ocurriendo más a menudo en esta última década, en cursos de formación continua o disciplinas de posgrado en Educación Matemática. Para los alumnos que tuvieron una vivencia de enseñanza en los moldes tradicionales, la resistencia a la modelación es significativa, ya que este método requiere más empeño en los estudios, la investigación y la interpretación del contexto.

Para el profesor

- Interpretación del contexto.
En la enseñanza tradicional, particularmente la de Matemáticas, pocas veces se presentan a los alumnos situaciones o situaciones-problema que requieren, después de su lectura e interpretación, una formulación y explicación de ese contexto. Sin esta vivencia, sea como alumno o como profesional, esa capacidad se va perdiendo. Rescatarla no es una tarea fácil.
- Perfeccionamiento.
Como la modelación viene siendo defendida como método de enseñanza desde hace poco más de dos décadas y, considerando las dimensiones geográficas de nuestro país, los cursos ya realizados en esa área todavía no han sido suficientes para llegar a todos nuestros profesores. Por otro lado, tales cursos duran entre 20 y 40 horas, o poco más, lo que no es suficiente para una formación plena sobre el método. Los cursos apenas esbozan la cuestión, provocando una cierta motivación en los profesores.
- Referencias bibliográficas.
Hay pocos trabajos publicados sobre modelación en la enseñanza o aun trabajos académicos disponibles a los cuales el profesor pueda tener fácil acceso. Sin embargo, como ya dijimos, en casi todas las áreas hay modelos matemáticos aplicados (Física, Química, Biología, Economía, etc.), pero que demandan del profesor una cierta base sobre el área de conocimiento.
- Orientación.
Un curso de perfeccionamiento o un texto sobre el asunto no propicia la

confianza suficiente en el profesor para poner en práctica el método de la modelación en un primer momento. Esa confianza, como también la habilidad, sólo se adquiere con el tiempo. La orientación de un especialista en el asunto, dirimiendo dificultades y auxiliando en la planificación y conducción de las actividades, propiciaría, ciertamente, más confianza en el profesor.

- Planificación.

La planificación es vital. Es preciso, con anterioridad, establecer las estrategias que deberán utilizarse para dirimir los problemas referentes al aprendizaje, a la estructura y a la forma que se va a adoptar, a las prácticas que mejor se aplicarán y a la evaluación del proceso y de los resultados. La ausencia de una planificación sobre cuándo enseñar uno u otro tópico del programa y presentar ejemplos análogos, integrando los trabajos de los alumnos, puede llevar a una desorientación por parte del profesor y, por consiguiente, de los alumnos.

- Disponibilidad para aprender y para orientar.

Para que el profesor pueda orientar al alumno en la realización de sus trabajos, es necesario tomar conciencia de los temas/asuntos por ellos escogidos antes de llegar a la tercera etapa del proceso de modelación como método de investigación, es decir, la delimitación del problema y su planteamiento. Cuanto mayor es el número de grupos de alumnos, mayor es el número de temas y, por consiguiente, mayor el tiempo que el profesor tendrá que disponer para estudiar. Este estudio es vital para la orientación, lo cual requiere disponer de tiempo.

- Orientación.

El proceso exige una buena orientación por parte del profesor. La cuestión es saber cómo lidiar con el programa y con los trabajos de modelación de los alumnos. En este caso, la planificación es esencial. Planificar, inclusive el tiempo que puede disponer con cada grupo en la clase. Por ejemplo, para cursos con más de 30 alumnos, que implica la formación de más de 5 grupos, el tiempo del que se dispone en la clase resulta insuficiente para una adecuada orientación. Además, efectuar orientación fuera de los límites del aula puede comprometer otra actividad, sea del profesor o del propio alumno.

- Apoyo de la comunidad.

El compromiso con la educación es de todos los que están directa o indirectamente involucrados. Así, comprometer a la comunidad escolar/ins-

titucional, o aun colocarla a la par del proceso, puede contribuir a la tarea. Sin este apoyo, el profesor puede desmotivarse si existen resistencias por parte de los alumnos o de los padres.

- Evaluación.

El proceso de enseñanza-aprendizaje para los alumnos requiere orientación adecuada, formalización y organización de los contenidos, así como estímulo a la creatividad. En este sentido, los criterios e instrumentos de evaluación deben ser reformulados. La prueba escrita y la verificación de si el alumno sabe o no utilizar una técnica de resolución ya no puede ser el único procedimiento. La modelación requiere una evaluación diagnóstica, procesal y de resultados. El objetivo de la evaluación es saber qué y cuánto sabe el alumno y qué es lo que todavía necesita saber.

Para el alumno

- Interpretación de un contexto.

Como ya se dijo anteriormente, la enseñanza tradicional no capacita al alumno para hacer una lectura del contexto; lectura en un sentido amplio de la palabra. Rara vez se desarrollan las habilidades para realizar la lectura de una obra musical, de una obra de arte, de una poesía, de un contexto histórico, de una situación política o de un resultado estadístico, entre otras muchas cosas. Ésta es una de las mayores fallas de la educación actual. En este sentido, cuando el alumno es colocado frente a un texto o a un contexto, presenta serias dificultades para leer, entender e interpretar, es decir, para hacer una lectura.

- Disponibilidad para investigar.

Los temas exigen investigación, para lo cual, muchas veces, la escuela no dispone de recursos. En este caso la realización de la investigación fuera de los límites escolares puede no ser posible, dependiendo de la edad de los alumnos y de las disponibilidades fuera del horario escolar. Además, los alumnos que trabajan tienen dificultades para realizar una investigación, así como para obtener una orientación fuera del horario de clases. Cabe destacar que cuanto mayor es el tiempo que el alumno dispone para el trabajo, en correspondencia con una orientación adecuada, mejor será la calidad del trabajo y del ejercicio de la creatividad.

- Elección del tema/asunto.

La elección del tema no es una tarea fácil. La idea de que cada alumno escoja un asunto de interés no siempre proporciona los resultados esperados. Si los datos sobre el tema elegido fueran tan simples que no incrementaran ningún conocimiento matemático o, igualmente, si no fueran fáciles de obtener, se podría generar una pérdida de motivación y desinterés por el trabajo. En este caso, la orientación del profesor en la etapa inicial (elección del tema) es esencial para evitar que eso ocurra en mitad del proceso.

- Trabajo en grupo.

Un tema elegido por el grupo no asegura que todos, efectivamente, estén interesados. Además, el tema puede exigir un conocimiento matemático que no se incluye en el programa, lo cual requeriría un mayor empeño de cada uno para aprender y realizar la propuesta. La ausencia de empeño o de compromiso de algunos alumnos debilita una propuesta importante, que es la capacidad de realizar un trabajo en grupo, dejando en manos de uno o dos llevar a cabo el intento, y desviando así el sentido de la cooperación y de la socialización en favor del aprendizaje.

CONSIDERACIONES FINALES

Entendemos que el objetivo de la enseñanza, en los diferentes niveles, debe ser el de propiciar en el alumno la adquisición de conocimientos y el desarrollo de actitudes y habilidades que favorezcan una plena interacción con la sociedad. Con este objetivo, venimos defendiendo la modelación matemática como método de enseñanza y de investigación.

La modelación, sin embargo, no es una panacea para superar todos los problemas de la práctica escolar relativos a la enseñanza de la matemática. Las investigaciones señalan que aquella puede representar un avance en la enseñanza de las matemáticas en clase, porque ésta deja de ser una mera transmisión de técnicas de resolución (del tipo: siga el modelo) y pasa a ser presentada como herramienta o estructura de otra área del conocimiento. Lo que exige mayor empeño en los estudios, en la investigación y en la interpretación del contexto, tanto para el profesor como para los alumnos. En otras palabras: ¡Mucho más trabajo!

Como investigadores, si esperamos una educación que contemple el conocimiento como savia vital en todos los niveles de escolaridad, es importante saber

más acerca de cómo ponen en práctica los profesores las propuestas educacionales o, incluso, cómo las comprenden y las difunden. Asimismo, es importante reconocer cuáles factores pueden comprometer o dificultar movimientos clave en pro de la educación. En otras palabras, tener otra mirada, otra concepción sobre el conocimiento, el entendimiento, la acción educacional. Como bien expresa Mariotti (2000, p. 214), “al cambiar el modo de ver, pasamos a darnos cuenta de cosas o situaciones que siempre estuvieron delante nuestro, pero que no éramos capaces de percibir, porque estábamos amarrados a un determinado patrón mental”.

Investigaciones realizadas, a pesar de las dificultades, han mostrado que la adopción de modelos matemáticos en la enseñanza, ya sea en la manera de la presentación, o en el proceso de la creación, pero adecuados a la realidad de las comunidades escolares, es un medio que propicia un mejor desempeño del alumno, convirtiéndolo en uno de los principales agentes de los cambios.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bassanezi, R. (2002), *Modelagem matemática no Ensino-Aprendizagem*, São Paulo, Contexto.
- Biembengut, M. S. (1990), *Modelação matemática como método de ensino e aprendizagem no 1º e 2º graus*, tesis de maestría, UNESP, Rio Claro.
- (1999), *Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática*, Blumenau, Editora da FURB.
- Biembengut, M. S. y N. Hein (1999), “Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas”, México, *Educación Matemática*, vol. 11, núm. 1, pp. 119-134.
- (2003), *Modelagem matemática no Ensino*, 3a. ed., São Paulo, Contexto.
- Hein, N. y C. Loesch (1999), *Pesquisa operacional: fundamentos e modelos*, Blumenau, Editora da FURB.
- ICMI (2002), *Applications and Modelling in Mathematis Education*, Documento de discussion, Study 14, ICMI.

Machado, N. J. (1997), *Ensaio Transversais: cidadania e educação*, São Paulo, Escrituras.

Mariotti, H. (2000), *As Paixões do Ego: complexidade, política e solidariedade*, São Paulo, Palas Athena.

[http: www.EMBRAPA.br](http://www.EMBRAPA.br)

[http: www.ruralnet.com.br](http://www.ruralnet.com.br)

DATOS DE LOS AUTORES

Maria Salett Biembengut

Universidad Regional de Blumenau-FURB, Blumenau, Brasil

salett@furb.br

Nelson Hein

Universidad Regional de Blumenau-FURB, Blumenau, Brasil

hein@furb.br

