Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica

Encarnación Castro y Marta Molina

La competencia algebraica es importante en la vida adulta,
en el trabajo y en la preparación para la educación secundaria.
Todos los estudiantes deberían aprender álgebra.
(NCTM, 2000, p. 37)

Resumen: La investigación que da origen a este artículo es un estudio exploratorio relacionado con la introducción temprana del pensamiento algebraico o álgebra en el currículum escolar *(early-algebra)*. Se presenta un análisis del trabajo realizado por 18 alumnos de entre ocho y nueve años, con igualdades numéricas. Las igualdades están basadas en propiedades aritméticas básicas y compuestas por números naturales y por las operaciones elementales de la estructura aditiva. Se analiza la evolución del significado del signo igual que manifestaron los alumnos, así como el uso de estrategias de resolución basadas en relaciones y propiedades aritméticas (pensamiento relacional).

Palabras clave: comprensión del signo igual, pensamiento relacional, igualdades numéricas, *early-algebra*, aritmética.

Abstract: The research reported in this paper is related to the early introduction of algebraic thinking or algebra in the school curriculum (early-algebra). It gathers the work of 18 eight and nine years old students in the context of number sentences. The sentences are based on basic arithmetic properties and composed of natural numbers and the basic operations of the additive structure. We study the students' understanding of the equal sign and its evolution, as well as their use of solving strategies based on arithmetic relations and properties (relational thinking).

Keywords: understanding equal sign, relational thinking, number sentences, early-algebra, Arithmetic.

Fecha de recepción: 6 de abril de 2007.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del álgebra ha sido y sigue siendo tema de preocupación para la educación matemática. Muchos investigadores consideran que la enseñanza tradicional del álgebra no es adecuada y señalan la falta de comprensión que ponen de manifiesto los alumnos en su aprendizaje algebraico, así como la escasa conexión existente entre la enseñanza del álgebra y la del resto de las ramas de la matemática (Kindt, 1980, citado en Van Reeuwijk, en prensa; Booth, 1999; Kaput, 1998, 2000; y Mason, Davis, Love y Schoenfeld, citados en Lee, en prensa). Martin Kindt (1980) apunta tres grandes problemas en la enseñanza del álgebra: falta de atención puesta en la generalización y el razonamiento, un salto demasiado rápido desde la aritmética al álgebra formal, y falta de respuestas a las preguntas *para qué* y *para quién* es de utilidad el álgebra.

La preocupación señalada anteriormente ha dado lugar a una sucesión de trabajos que han llevado, en la última década, al planteamiento de diferentes propuestas para la enseñanza del álgebra. Éstas se diferencian respecto a qué se enfatiza en el proceso de enseñanza que se va a seguir. En algunos casos, el énfasis se pone en la resolución de problemas y, en otros, en la utilización de la tecnología o en potenciar y fortalecer las habilidades aritméticas, como identifican Freiman y Lee (2004). Hay también quienes proponen un cambio curricular que implique la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura, sino como una orientación que fomente el modo algebraico de pensar y de actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas. En esta propuesta, se espera que el álgebra sea una guía para la enseñanza de las matemáticas con comprensión (Kaput, 1995, 1998, 2000; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Bastable y Schifter, en prensa). Esta propuesta de introducción temprana del álgebra en el currículo de matemáticas es lo que se conoce como *Early-Algebra*.

La propuesta Early-Algebra considera que los profesores de todos los niveles deben promover el *pensamiento algebraico,* ayudando a los alumnos a prestar atención a las propiedades, relaciones y patrones involucrados en todo tipo de actividades matemáticas, aunque no parezcan algebraicas a simple vista. El objetivo es fomentar el modo de pensar algebraico más que el desarrollo de las habilidades necesarias para lidiar con los procedimientos de esta rama de las matemáticas.

En particular, la Early-Algebra propone fomentar un acercamiento estructural a la aritmética y a otros campos matemáticos propios de los niveles escolares tempranos, dejando de hacer énfasis en lo computacional. Según Kieran (1992), la manera tradicional de introducir la aritmética no ha sido eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática, lo que dificulta el aprendizaje del álgebra. Esto, unido a la comprensión del significado de las letras y el cambio de convenciones con respecto a la aritmética, hace del álgebra un terreno poco accesible para muchos estudiantes. Liebenberg, Sasman y Olivier (1999) han observado que los alumnos de los últimos cursos de educación primaria, e incluso algunos de educación secundaria, no poseen la capacidad de juzgar la equivalencia entre expresiones numéricas sin la realización del cálculo de las operaciones implicadas, como consecuencia de su falta de conocimiento de la estructura aritmética.

La iniciativa Early-Algebra, de introducir el álgebra desde los primeros niveles escolares, ha obligado a precisar qué se entiende por álgebra. Para los seguidores de esta propuesta no es adecuado considerar que el álgebra solamente involucra actividades o procesos de pensamiento que son expresados de manera simbólica y que el álgebra comienza cuando se eligen símbolos para representar objetos matemáticos. En la propuesta Early-Algebra se amplía la lista de elementos que forman parte del álgebra, los cuales Blanton y Kaput (2004) asocian con cuatro componentes principales (véase la figura 1); los dos primeros son los que, desde nuestro punto de vista, pueden integrarse mejor en la enseñanza de las matemáticas de la educación primaria.

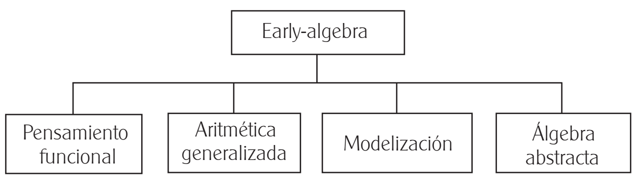

Figura 1 Componentes del álgebra en la propuesta Early-Algebra[1]

Estos componentes consisten en acciones como el estudio de funciones y relaciones, la generalización de patrones y relaciones, el manejo de lenguajes de modelización y control de fenómenos, el estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones y la transformación sintáctica guiada de formalismos (Kaput, 2000).

[1] Este diagrama fue presentado por Blanton y Kaput en el Congreso Internacional PME 28 dentro de la comunicación titulada "Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking". Sin embargo, no aparece en las memorias del congreso.

Esta extensa definición del álgebra hace posible incorporar su enseñanza a la educación primaria, ya que se vuelve un tema que puede ser tratado simultáneamente con otros que ya son parte del currículo de este nivel. Esta manera de entender la pedagogía del álgebra ha sido aceptada por muchos investigadores y también por el Consejo de Maestros de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM):

> viendo el álgebra como una constante en el currículo desde la educación infantil en adelante, los profesores pueden ayudar a los estudiantes a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior (NCTM, 2000, p. 37).

PENSAMIENTO RELACIONAL

El *pensamiento relacional* (o pensamiento centrado en relaciones) es un tipo de actividad cognitiva que se considera estrechamente ligada al trabajo algebraico. Se encuentra en conexión, principalmente, con la parte del álgebra relativa al estudio y generalización de patrones y relaciones. Cuando este tipo de pensamiento surge en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas, consiste en la actividad intelectual de examinar las expresiones globalmente (*i.e.*, como totalidades) y aprovechar las relaciones apreciadas, ya sea para resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre una situación o cierto concepto. El examen de estas expresiones implica reconocer relaciones entre ellas o entre sus términos, lo que puede suceder de manera espontánea o a través de su búsqueda deliberada (Molina, 2006).

El *pensamiento relacional* es equiparable a lo que Hejny, Jirotkova y Kratochvilova (2006) denominan metaestrategias conceptuales, las cuales contrastan con las metaestrategias procedimentales. Estas últimas implican la aplicación, en la resolución de un problema, de ciertos procedimientos aprendidos, una vez que se ha identificado su tipo (ej., el uso del algoritmo de la suma para resolver un *problema de suma*). En contraste, las metaestrategias conceptuales (o pensamiento relacional) se refieren a modos flexibles de construcción de estrategias para abordar una situación o problema matemático, en los que la atención se centra en relaciones y elementos clave, en lugar de en la aplicación de un método de resolución estandarizado. En ambos casos el pensamiento del alumno se centra en la estructura de la situación o problema que se pretende abordar.

A continuación se presentan algunas ilustraciones de cómo se puede desencadenar el pensamiento relacional de un alumno en una situación de cálculo:

a) Un alumno modifica una secuencia de operaciones para facilitar su cálculo mediante la aplicación de propiedades aritméticas fundamentales. Por ejemplo, cambia el orden de los términos, o descompone algunos de ellos y los recompone después. Así, en el caso de la expresión $14 + 9 + 6$, se puede simplificar su cálculo reordenándola $14 + 9 + 6 = 14 + 6 + 9 = 20 + 9 = 29$ o descomponiéndola y volviéndola a componer $14 + 6 + 9 = 10 + 4 + 9 + 6 = 10 + 9 + 4 + 6 = 10 + 9 + 10 = 10 + 10 + 9 = 20 + 9 = 29$.

b) Un alumno deduce respuestas o resultados que no sabe o no recuerda a partir de otros que sí conoce. Por ejemplo, para resolver $9 + 8$ se puede calcular $10 + 8 - 1$. Para calcular 5×9, puede calcularse $5 \times 10 - 5$.

La importancia del pensamiento relacional radica en que uno de los objetivos de su uso es centrar la atención en las propiedades de las operaciones, en cómo trasformar expresiones y operaciones, y en cómo esta trasformación afecta a las operaciones. La abstracción de los patrones de comportamiento de las operaciones aritméticas al ser manipuladas responde a un aprendizaje significativo de la aritmética y contribuye a la adquisición de una buena base para el posterior estudio formal del álgebra.

EL SIGNO IGUAL

Como todo símbolo matemático, el signo igual es la representación de un concepto o idea matemática. Se utiliza para indicar una *relación de igualdad* entre dos expresiones matemáticas que se escriben a ambos lados de dicho signo. Normalmente, la igualdad de dichas expresiones no tiene por qué apreciarse a simple vista, al ser representaciones diferentes de un mismo objeto matemático. Este significado es una convención que los alumnos deben llegar a conocer para poder comprender las igualdades en sus manifestaciones algebraicas. Aunque se usa en otros contextos que proporcionan otros significados (véase Molina, 2006, para un análisis de los significados de este signo en la aritmética y el álgebra escolar), el signo igual colocado entre dos expresiones aritméticas o algebraicas da lugar a "un todo" que constituye una sentencia o proposición que puede ser verdadera o falsa.

El término sentencia (numérica) lo empleamos para denominar las expresiones aritméticas que contienen el signo igual y son susceptibles de ser verdaderas o falsas (ej. $2 + 2 = 5$). Constituyen una proposición o enunciado declarativo. En cambio el término igualdad lo reservamos para expresiones aritméticas que contienen el signo igual y siempre son verdaderas. Las igualdades pueden ser abiertas (ej. $4 + \square = 6 + 4$) o cerradas (ej. $7 + 5 = 8 + 4$); estas últimas son a su vez sentencias verdaderas.

En la enseñanza de la aritmética, salvo casos especiales, la proposición generada mediante la utilización del signo igual es verdadera. En los primeros niveles educativos las expresiones que dan forma a la proposición constituyen, por lo general, expresiones formadas por números naturales y operaciones de aritmética básica.

Se emplea pensamiento relacional al estudiar una igualdad o sentencia numérica, cuando la respuesta a la situación planteada se obtiene estableciendo relaciones entre los números o expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual. Por ejemplo, al estudiar las sentencias *a)* $15 + 2 = 15 + 3$ y *b)* $51 + 51 = 50 + 52$ para decidir si son correctas o no (proposiciones verdaderas o falsas), se estaría utilizando pensamiento relacional si se hacen razonamientos similares a los siguientes; para la expresión *a*: "no es correcta, ya que lo que hay a ambos lados del signo igual es diferente. En los dos lados está el número 15, pero se le están sumando números diferentes, en un caso 3 y en el otro caso 2". Para la expresión *b*: "es correcta, porque si le quitas una unidad a un 51 y se la sumas al otro 51, obtienes el otro miembro de la igualdad $50 + 52$".

El trabajo con igualdades entre expresiones numéricas pone a los escolares en situaciones apropiadas para poder descubrir patrones, establecer relaciones funcionales y concebir las expresiones como entidades en sí mismas, y no como procesos por realizar. Se trata de promover el pensamiento algebraico a la vez que el aritmético (Warren, 2003).

ESTUDIOS PREVIOS SOBRE EL USO Y DESARROLLO DE PENSAMIENTO RELACIONAL Y LA COMPRENSIÓN DEL SIGNO IGUAL

El uso de pensamiento relacional en situaciones de igualdad ha sido observado en sujetos de educación primaria (Carpenter *et al.*, 2003; Koehler, 2002, 2004), aun así, existe poca información sobre su génesis y desarrollo, de aquí nuestro interés por su estudio.

Estudios previos han puesto de manifiesto que el dominio del cálculo no es necesario para poder desarrollar y usar pensamiento relacional (Koehler, 2002, 2004) y que este tipo de pensamiento es desarrollado por algunos alumnos, a lo largo de la educación primaria y secundaria, a partir de su experiencia aritmética, mostrando una progresión lineal en su uso (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2005).

En relación con el signo igual, la literatura evidencia que su comprensión es fuente de dificultades para los alumnos de educación primaria y secundaria (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Kieran, 1981; Falkner, Levi y Carpenter, 1999). Los alumnos inician su formación matemática escolar con una tendencia a considerar el signo igual como un símbolo operacional, debido a su experiencia informal con actividades de adición y sustracción. La enseñanza tradicional de este símbolo refuerza esta concepción, la cual se mantiene estable a lo largo de los años y no suele ser desafiada hasta el aprendizaje del álgebra. Hasta este momento, un significado operacional del signo igual ha sido suficiente en la mayoría de los casos (Pirie y Martin, 1997). Alumnos de educación secundaria y universidad continúan teniendo dificultades para dotar de significado y usar este símbolo. Estudios de Byers y Herscovich (1977), Mevarech y Yitschak (1983) y Gallardo y Rojano (1988) muestran que, una vez que los alumnos han adoptado un significado operacional del signo igual, esta concepción se mantiene bastante estable a lo largo de los años.

Entre los factores que favorecen el desarrollo de la comprensión operacional del signo igual que manifiestan los alumnos, además de la enseñanza aritmética previa, los autores Kieran (1981), Baroody y Ginsburg (1983) y Sisofo (2000) hacen referencia a la influencia del conocimiento aritmético presimbólico, el uso de la calculadora y ciertas limitaciones cognitivas. El periodo de 10 a 13 años se considera como el umbral para la ampliación de esta comprensión.

CARACTERIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN QUE HEMOS REALIZADO

Centrados en el contexto de las igualdades numéricas, nuestro interés es estudiar el desarrollo y evolución de la comprensión del signo de *igual* y del uso del pensamiento relacional trabajando en el aula con un grupo de alumnos de entre 8 y 9 años.

Encuadre

El trabajo que hemos realizado se enmarca entre los ámbitos de la aritmética y el álgebra. En la figura 2, se puede visualizar cómo están conectados estos ámbitos a través de las ideas manejadas de pensamiento relacional y signo igual. Asimismo se indican los niveles educativos en los que tradicionalmente se da prioridad al trabajo en aritmética y en álgebra.

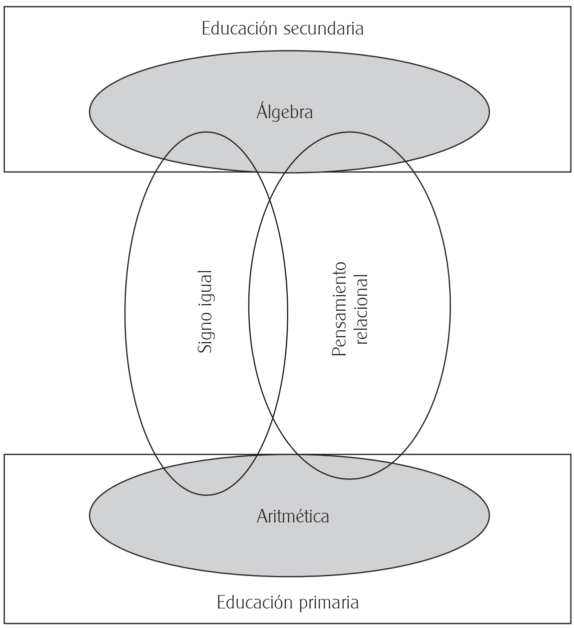

Figura 2 Conexión entre los principales elementos de este trabajo con los niveles educativos en los que tradicionalmente se trabajan

Metodología

El estudio realizado consiste en un tipo de experimento de enseñanza que Confrey y Lachance (2000) denominan transformativo y guiado por una conjetura. En este tipo de experimentos no existen hipótesis que vayan a ser probadas, sino que la conjetura, es decir, "una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes" (pp. 234-235), es la guía en el proceso de investigación, la cual se revisa y reelabora a lo largo del proceso de investigación. Este tipo de investigaciones está especialmente orientado a la realización de estudios que se lleven a cabo en un aula, habitualmente dirigidos a investigar nuevas estrategias de actuación, a analizar diferentes enfoques para la enseñanza de un determinado contenido o para comparar distintas pedagogías con las que abordar un conjunto de conceptos matemáticos. Por este motivo, la conjetura debe comprender una dimensión de contenido matemático (¿Qué debe enseñarse?) y una dimensión pedagógica (¿Cómo debe enseñarse?).

Consideramos esta metodología adecuada para nuestra investigación, ya que pretendemos indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje (trabajo con igualdades y sentencias numéricas elementales basadas en relaciones y propiedades básicas de la estructura aditiva) y tratar de analizar qué ocurre durante dicho proceso y cómo ocurre.

La conjetura que guía nuestro trabajo de investigación surge de una búsqueda bibliográfica realizada previamente, que incluye trabajos tales como Behr *et al.* (1980), Saenz-Ludlow y Walgamuth (1998), Falkner *et al.* (1999), Carpenter *et al.* (2003), Koehler (2002, 2004) y Freiman y Lee (2004), y es la siguiente. La mayoría de los alumnos de educación primaria encuentran dificultades en la compresión del significado del signo igual como expresión de una equivalencia numérica. Creemos que un trabajo con igualdades o sentencias numéricas, que esté basado en el establecimiento de relaciones entre las expresiones a ambos lados del signo igual y en el que se dé prioridad a la discusión y explicación de lo realizado por parte de los alumno, va a favorecer el desarrollo de la compresión de las igualdades en los estudiantes de dicho nivel escolar. En este contexto, los alumnos pueden desarrollar pensamiento relacional al buscar estrategias con las que resolver las tareas propuestas y, de este modo, desarrollar y aplicar modos de pensamiento algebraico en un contexto aritmético.

Objetivos

El objetivo primordial del trabajo es fomentar, en el grupo de alumnos participantes en este estudio, hábitos de búsqueda de relaciones entre los términos que componen la igualdad como estrategia para su resolución, así como favorecer el desarrollo de la comprensión del significado del signo igual.

Para concretar este objetivo, nos proponemos las siguientes actuaciones:

- Detectar los significados que del signo igual manifiesten un grupo de alumnos de entre 8 y 9 años de edad al trabajar con igualdades o sentencias numéricas.
- Diseñar actividades que ayuden a negociar con los alumnos un significado amplio del signo igual y que fomenten el surgimiento y uso de pensamiento relacional en la resolución de igualdades y sentencias numéricas.
- Analizar, en los alumnos, la evolución del significado del signo igual a partir de los significados previamente detectados.
- Analizar el surgimiento y desarrollo de pensamiento relacional durante el trabajo llevado a cabo en el aula.

Sujetos

Los sujetos con los que se ha realizado el estudio han sido 20 alumnos de una clase de tercer grado, o equivalentemente a tercero de Primaria (8-9 años), de un colegio público de la ciudad de Sacramento (California), de los cuales sólo obtuvimos permiso paterno de 18 de ellos, 8 chicas y 10 chicos, para que participasen en el estudio y hacer uso de su trabajo para la investigación. La clase que formaban estos alumnos era étnica y lingüísticamente diversa. Cinco de los alumnos hablaban un segundo idioma y dos de ellos presentaban importantes dificultades en la compresión del inglés (idioma oficial en el aula). Durante las intervenciones realizadas en el aula, estos alumnos recibieron ocasionalmente atención individualizada en su lengua materna.

Trabajo de campo

El trabajo de campo se desarrolló durante cinco sesiones de duración variable, de 50 minutos en promedio, en diferentes momentos dentro del horario escolar. La segunda sesión tuvo lugar dos meses después de la primera. Entre la segunda y la tercera transcurrieron 15 días. También entre la tercera y la cuarta pasaron 15 días. La quinta sesión se realizó dos meses después de la cuarta.

La actividad en el aula, en la mayor parte de los casos, consistió en realizar tareas escritas y discusiones. La primera sesión estuvo dirigida a detectar la comprensión del signo igual que manifestaban el grupo de alumnos con el que íbamos a tratar, al considerar igualdades numéricas abiertas. En las cuatro sesiones restantes se trabajó con igualdades numéricas abiertas y sentencias numéricas que, incluyendo el signo igual, unas eran verdaderas y otras falsas. Dichas igualdades y sentencias eran, unas de acción y otras de no acción,[2] y fueron elaboradas considerando las sugerencias dadas por Carpenter *et al.* (2003). Estos autores proponen el uso de este tipo de igualdades y sentencias basadas en relaciones o propiedades aritméticas básicas (ej. $4 \times 7 = 3 \times 7 + 7$; $27 + 48 - 48 = 27$), sugiriendo la inclusión ocasional de números grandes para disuadir a los alumnos de realizar los cálculos.

Para el diseño de las actividades de cada sesión se tuvieron en cuenta los resultados de los datos recogidos en la sesión anterior. En algunos casos se consideraron sentencias que habían sido propuestas por los alumnos en intervenciones previas.

Datos

Como recomiendan Confrey y Lachance (2000) para este tipo de experimento de enseñanza, se llevó a cabo una recopilación de datos exhaustiva que permitió capturar con detalle las interacciones ocurridas en el aula; fue necesaria la realización de evaluaciones individuales para poder valorar el aprendizaje y evolución de los alumnos. Realizamos grabaciones en video, tomamos notas de lo ocurrido en el aula y recogimos las hojas de trabajo de los alumnos. Además, a lo largo del proceso de investigación se recogió información sobre el punto de vista de las dos investigadoras que participaban en el trabajo y sobre la justificación de las decisiones tomadas. La mayoría de los datos recogidos son de tipo cualitativo.

[2] En este trabajo distinguimos entre igualdades o sentencias de acción y de no acción de manera similar a como lo hacen Behr *et al.* (1980). Denominamos igualdades o sentencias de no acción a aquellas igualdades o sentencias que no incluyen ningún signo operacional (ej. $3 = 3$, $\square = 12$), o que incluyen signos operacionales en ambos miembros (ej. $3 + 5 = 7 + 1$, $8 + 4 = \square + 5$). Por otra parte, las igualdades o sentencias de acción son aquellas que incluyen signos operacionales y éstos aparecen en tan sólo uno de los miembros de la igualdad (ej. $13 - 7 = 6$, $25 = 10 + \square$).

Análisis de los datos

El análisis de datos se realizó en varias etapas, de acuerdo con lo establecido por el diseño de investigación empleado: un análisis preliminar y continuo tras cada sesión, y un análisis final. El primero de ellos consistió en el análisis de los datos de cada intervención. Los resultados de este análisis condujeron a la toma de decisiones con respecto a las siguientes intervenciones y facilitó la revisión y el desarrollo de la conjetura de investigación. Estos resultados se tomaron como referencia para la continuación del proceso. El análisis final fue el análisis de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos. Este análisis condujo a la construcción de una historia coherente de la evolución de la conjetura y de la evolución de los alumnos a lo largo de la intervención.

CRÓNICA DE LAS SESIONES

1ª Sesión

Para la primera sesión se elaboró una prueba escrita que los estudiantes realizaron de manera individual. La intención de esta tarea era evaluar la comprensión del signo igual de los alumnos y detectar posibles indicios del uso de pensamiento relacional. Mientras los alumnos resolvían la actividad escrita, dos de ellos fueron entrevistados para conocer las estrategias empleadas en la resolución de las igualdades. Una vez que los alumnos acabaron de resolver individualmente dicha actividad, se llevó a cabo una discusión sobre esas igualdades con todo el grupo de alumnos.

Características de la prueba escrita

La prueba estaba compuesta por cinco igualdades de no acción y una igualdad de acción, todas ellas abiertas. Las igualdades de no acción fueron construidas de manera que la diferencia entre dos de los sumandos en los distintos lados del signo igual era de una unidad. Se incluyó la igualdad con la operación suma $8 + 4 = \square + 5$, utilizada por Falkner *et al.* (1999), otra semejante para la operación de resta, $13 - 7 = \square - 6$, y otras tres construidas variando la posición de la cantidad por averiguar, considerando las cuatro posiciones posibles en la expresión $a \pm b = c \pm d$.

Sólo se incluyó una igualdad de acción de la forma $c = a \pm b$, con la respuesta a la operación en el lado izquierdo en vez de en el derecho, como es habitual en la mayoría de las actividades aritméticas escolares.

Análisis de la 1ª sesión (N = 14)

En las respuestas de los alumnos se identificaron, entre otras, las siguientes conductas: solían interpretar el signo igual como un comando para realizar una operación y aplicaban dicha interpretación siempre que les era posible. En igualdades de la forma $a \pm b = c \pm d$, solían considerar que el número situado tras el signo igual (c) era la respuesta a la operación expresada en el lado izquierdo del signo igual. Leían las igualdades de izquierda a derecha y, al encontrar una operación, procedían rápidamente a su cálculo, completando el recuadro con dicho resultado, incluso antes de mirar completamente la parte derecha del signo igual. Así sucedió especialmente con las igualdades de no acción $8 + 4 = \square + 5$ y $13 - 7 = \square - 6$, que la mayoría resolvió escribiendo en el recuadro el resultado de realizar la operación situada en el miembro izquierdo de la igualdad (llegando a escribir las expresiones $8 + 4 = 12 + 5$ y $13 - 7 = 6 - 6$). En las igualdades $12 + 7 = 7 + \square$ y $14 + \square = 13 + 4$ algunos alumnos dieron como respuesta el resultado de operar todos los números de la igualdad (llegando a las expresiones $12 + 7 = 7 + 26$ y $14 + 31 = 13 + 4$); esta actuación también ha sido detectada por Falkner *et al.* (1999) y Freiman y Lee (2004). Otras respuestas a las igualdades de no acción fueron la suma o resta de dos de los términos. Esta respuesta fue, en la mayoría de los casos, resultado de ignorar uno de los términos y resolver la igualdad de tres términos resultante (ej. la respuesta 5 a la igualdad $12 + 7 = 7 + \square$).

En la discusión generada sobre la igualdad $8 + 4 = \square + 5$ todos los estudiantes se mostraron de acuerdo en que la respuesta era 12. Cuando se les indicó que esta respuesta no era correcta, un estudiante sugirió modificar la igualdad escribiendo $5 + 8 + 4 = 17$.

En este primer día ningún alumno reconoció, consistentemente, la necesidad de equivalencia entre ambos miembros de las igualdades. Sólo cinco alumnos dieron la respuesta esperada en alguna igualdad.

En las entrevistas realizadas, uno de los alumnos verbalizó repetidamente la interpretación del signo igual como un *estímulo para dar una respuesta* (preferentemente a la operación representada a la izquierda del signo igual).

En $\square + 4 = 5 + 7$ respondió que en el recuadro habría que poner 1 y explicó "conseguí una pista de la respuesta (señalando al 5) porque dice más 4, igual a 5. Sólo 4 más 1 es 5". En la igualdad $14 + \square = 13 + 4$ explicó: "Es difícil, porque necesitas un menos... porque 14 menos 1 es igual a 13". Afirmó darse cuenta de que 13 era una unidad menos que 14. Al preguntarle qué debíamos poner en el recuadro para hacer verdadera dicha igualdad respondió: "Puedo poner menos 1". Para $12 + 7 = 7 + \square$ respondió que en el recuadro había que poner 26 y explicó: "12 más 7 es igual a 19 y entonces pone igual a 7, y entonces hay un signo más de nuevo, pero si movemos éste [7] aquí [a la izquierda del signo igual] va a ser 12 más 7 más 7".

En la discusión de la igualdad $14 + \square = 13 + 4$ tuvo lugar la primera manifestación de pensamiento relacional al explicar un alumno el modo en que obtuvo la respuesta 3 haciendo referencia a la relación de compensación de la suma: "Miré a este lado y... los han cambiado [...], el 3 y el 4".

Conclusiones de la 1ª sesión

El uso del signo igual en estas igualdades no era natural para estos estudiantes. Consideraron que todos los números y las operaciones debían estar en el lado izquierdo y reservaron el lado derecho para el resultado de dichas operaciones. No veían la igualdad como un todo, sino que consistía en una (o más de una) operación por realizar y dar, a continuación, la respuesta. Algunos alumnos ignoraron términos de la igualdad y los que no lo hicieron solían operarlos todos juntos. Uno de los alumnos preguntó por qué el signo igual estaba en el medio. Tanto en la discusión como en las entrevistas y las respuestas a la actividad escrita, se puso de manifiesto la gran dificultad que suponía, para estos estudiantes, dar significado a estas igualdades. En diversas ocasiones expresaron que dicha actividad era difícil.

2ª Sesión

Dos meses después se llevó a cabo la segunda sesión. En esta sesión se analizó la estabilidad de los significados que habían mostrado los alumnos sobre el signo igual, se comprobó si manifestaban o no las mismas dificultades que en la actividad de la 1ª sesión, se inició la negociación de la comprensión de la igualdad como un todo y se detectaron indicios del uso de pensamiento relacional.

Se diseñó una clase dividida en cuatro etapas. En la primera etapa se realizó una actividad individual escrita, con una colección de sentencias para las cuales los alumnos debían indicar si eran verdaderas o falsas y escribir versiones correctas para aquellas que eran falsas. Las sentencias respondían a las formas:

$$a = a \qquad c = a + b \qquad a + b + c = d + e \qquad a + b = c + d$$

A continuación se realizó una discusión sobre dichas sentencias. En tercer lugar se les propuso escribir igualdades (sentencias verdaderas) que correspondieran a una de las tres formas:

$$\_ + \_ = \_ + \_ \qquad \_ - \_ = \_ - \_ \qquad \_ + \_ = \_ - \_$$

Finalmente, se discutieron brevemente algunas de las igualdades escritas por los alumnos, y se eligieron especialmente aquellas que pudieran favorecer el uso de pensamiento relacional en su resolución.

Análisis de la 2ª sesión (N = 15)

Las respuestas de los alumnos a la primera tarea mostraron que la dificultad mayor se presentó en las sentencias de la forma $a = a$. Nueve alumnos consideraron falsa la igualdad $3 = 3$ corrigiéndola en algunos casos escribiendo: $3 + 0 = 3$; $0 + 3 = 3$; $3 + 3 = 6$. En la discusión mostraron su extrañeza ante la ausencia de signos operacionales en este tipo de sentencias.

Cinco alumnos consideraron falsa la igualdad $10 = 4 + 6$ y la sustituyeron por $4 + 6 = 10$ o por $6 + 4 = 10$.

En la igualdad $2 + 2 + 2 = 3 + 3$ se manifestaron también importantes dificultades. Nueve alumnos la consideraron falsa y en la discusión se aportaron explicaciones variadas. Una alumna dijo que es cierta y explicó “es cierta porque 2 más 2 más 2 es igual a 6 y también lo es 3 más 3”. Otros alumnos explicaron que creían que era falsa: “pensé que debía ser 2 más 3 igual a 5” o “pensé que era falsa porque el signo igual está en el medio”. Cuando se les preguntó dónde les gustaba ver el signo igual, explicaron que al final.

La mayoría de las correcciones propuestas por los alumnos eran de la forma $a \pm b \pm ... = z$, salvo dos alumnos que generaron las igualdades $34 = 34$ y $6 + 7 = 4 + 9$. Estos alumnos resolvieron la mayoría de las sentencias dando la respuesta que conducía a la equivalencia numérica de ambos miembros. En total sólo 3 de los 17 alumnos respondieron de este modo la mayoría de las sentencias.

La discusión permitió seguir negociando la comprensión del signo igual mediante el intercambio de las opiniones de los alumnos y las diferentes formas sugeridas para corregir las igualdades. Una alumna explicó: una igualdad "es como si tienes una balanza y tienes que poner la misma cantidad de ambos en cada lado para que sea igual". Esta alumna explicó de este modo su comprensión del signo igual transfiriendo su significado del signo igual del sistema de representación del simbolismo aritmético, en el que se trabajó en el aula, a un sistema de representación icónico, la balanza. Esta discusión nos permitió también observar que los alumnos se esforzaban por realizar y entender el trabajo que estaban realizando.

En cuanto al pensamiento relacional, en esta sesión obtuvimos la segunda muestra de uso de pensamiento relacional. Un alumno explicó "$34 = 34 + 12$ es falsa porque 34 más 12 va a ser más que 34" justificando su respuesta sin realizar los cálculos, basándose en su conocimiento de la operación suma y la observación de una diferencia de magnitud entre las expresiones a ambos lados del signo igual.

Quince de los 17 alumnos construyeron igualdades de la forma pedida con, al menos, cuatro términos (véase figura 3), aunque algunos necesitaron una ayuda inicial porque estaban escribiendo sólo igualdades de acción. En algunos casos, las igualdades escritas sugerían cierto uso de pensamiento relacional, al estar basadas en relaciones aritméticas básicas, pero los alumnos no lo verbalizaron cuando se les cuestionó sobre cómo habían construido las igualdades. Concretamente, una alumna escribió un grupo de igualdades con la operación resta que se correspondía con la forma $a - b = (a + 1) - (b + 1)$ (véase figura 4) y que sugería que pudo haber considerado, para su construcción, relaciones entre los miembros de cada igualdad o entre los números de distintas igualdades.

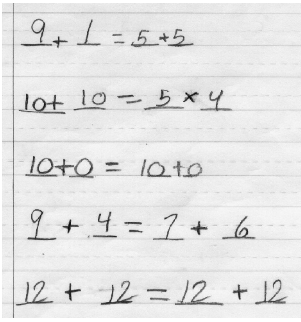

Figura 3 Ejemplo de la producción de un alumno

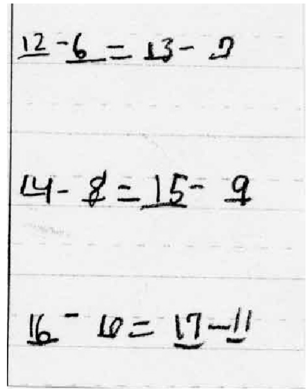

Figura 4 Producción de una alumna que muestra cierto uso de pensamiento relacional

En la discusión de algunas de las igualdades construidas por los alumnos que podían favorecer el uso de pensamiento relacional, tales como $8 + 8 = 9 + 7$ y $18 - 2 = 19 - 3$, ningún alumno justificó las igualdades refiriéndose a relaciones entre los dos miembros sino a cálculos concretos.

Conclusiones de la 2ª sesión

Se constató que inicialmente persistía en los escolares la necesidad de operar cuando tenían delante una igualdad o sentencia numérica, y la creencia de que todos los números por operar debían estar en el miembro izquierdo de ella y el resultado de la operación en el miembro derecho. La mayoría de los alumnos siguió mostrando el uso de un significado operacional de la igualdad.

Se pusieron de manifiesto algunos significados de los alumnos, como pensar que las igualdades de la forma $c = a \pm b$ son falsas por estar al revés o sus dificultades con la presencia del signo igual en mitad de la igualdad.

La discusión de las sentencias verdaderas y falsas y la construcción de igualdades se mostraron potentes para negociar con los escolares sobre elementos relacionados con la comprensión del signo igual.

Con respecto al desarrollo de pensamiento relacional no se observaron importantes avances. La explicación de un alumno mostró el surgimiento de manera natural de este pensamiento.

3ª Sesión

En esta sesión se realizó una discusión con todo el grupo sobre varias sentencias verdaderas y falsas y una actividad individual de evaluación.

Se consideró que una discusión en la que participase toda la clase sería beneficiosa para los alumnos, algunos podrían consolidar la comprensión del signo igual como un todo y, otros, mejorarla escuchando a sus compañeros. Se les instó a resolver las igualdades sin hacer cálculos ("*sin hacer la aritmética*") con el objetivo de fomentar el establecimiento y verbalización de las relaciones.

Para la evaluación, se consideraron tres actuaciones: insertar un número para hacer cierta una igualdad, estudiar tres sentencias e indicar si eran verdaderas o falsas, y generar una igualdad. Para estas tareas se incluyeron igualdades y sentencias de las formas que se habían discutido en clase $a = a$, $c = a \pm b$, $a \pm b = c \pm d$, $a \pm b = c \pm d \pm e$.

Análisis de la 3ª sesión (N = 18)

En la igualdad $20 + 20 = 20 + 20$, un alumno explicó "es verdadera porque son los mismos números, y no hace falta escribir la respuesta". En el caso de $7 + 15 = 100 + 100$, todos los alumnos respondieron que era falsa, alguno explicó "es falsa porque 7 más 15 es pequeño y 100 más 100 es 200", y otro dijo "7 más 15 no es ni siquiera 100". En la discusión de la igualdad $12 + 11 = 11 + 12$ surgieron dos explicaciones: "Es verdadera porque tiene los mismos números: El 12 está delante y después detrás, y el 11 esta detrás y después delante" y "Es verdadera porque han cambiado de orden los números".

Dos alumnos dieron ese tipo de explicaciones que consideramos basadas en pensamiento relacional. Otras explicaciones estuvieron basadas en el cálculo de las operaciones. Por ejemplo en la igualdad $10 - 7 = 10 - 4$ un alumno explicó: "Es falsa porque 10 menos 7 es igual a 3, y 10 menos 4 es igual a 6".

A diferencia de la sesión anterior, durante esta discusión la mayoría de las correcciones sugeridas por los alumnos no fueron de la forma $a \pm b = c$ sino que incluían al menos dos términos en cada miembro (ej. $7 + 193 = 100 + 100$, $10 - 7 = 7 - 4$, $15 + 3 = 15 + 3$).

En cuanto a la evaluación, 12 de los 18 alumnos resolvieron al menos 5 de las 6 igualdades dadas, considerando el signo igual como la expresión de una equivalencia numérica. Tres alumnos continuaron dando muestra de considerar el signo igual como un estímulo para dar una respuesta aceptando, además, igualdades de la forma $c = a \pm b$. Otros tres alumnos mostraron dificultades en la comprensión de las igualdades y no mostraron con claridad ningún significado del signo igual. Dos de ellos no habían estado presentes en la sesión anterior.

En la construcción de una sentencia verdadera, todos aquellos alumnos que habían resuelto al menos cinco igualdades correctamente escribieron igualdades con dos términos a cada lado del signo igual tales como: $9 \times 2 = 9 + 9$ y $3 + 1 = 6 - 2$. El resto de los alumnos escribieron igualdades de la forma $a + b = c$. Por el contrario, hubo dos alumnos que escribieron igualdades de forma incorrecta dándolas como correctas: $55 = 5 \times 11 = 2 + 9 = 3 \times 3 = 2 + 2 = 1 + 1$ y $30 + 40 = 70 + 10$.

Conclusiones de la 3ª sesión

La discusión mostró un avance importante en la comprensión de los niños al considerar las igualdades como un todo. No sólo eran capaces de evaluar las igualdades propuestas correctamente, sino que además usaban el signo igual con un significado no operatorio, como expresión de una equivalencia numérica, sin que se les hubiese requerido expresamente. En todas las igualdades hubo explicaciones basadas en el cálculo de las operaciones a ambos lados del signo igual y, en numerosas ocasiones, se verbalizaron justificaciones basadas en pensamiento relacional.

4ª Sesión

Dos semanas después se llevó acabo una discusión en grupo con el objetivo de fomentar pensamiento relacional, ya que durante la sesión anterior la mayoría de los alumnos había mostrado comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica.

Se consideraron sentencias verdaderas y falsas que se discutieron una a una en el encerado, dando tiempo a los alumnos para pensar previamente en ellas.

Análisis de la 4ª sesión ($N = 18$)

En esta discusión, seis alumnos pusieron de manifiesto pensamiento relacional. Por ejemplo en la expresión $27 + 48 - 48 = 27$ dijeron "es cierto, porque hay un más 48 y un menos 48 [...] y eso va a ser cero". En cuanto a la igualdad $103 + 205 = 105 + 203$ expresaron "es verdadera porque 5 más 3 son 8 y hay dos ochos haciendo juego y entonces tenemos 308 y en el otro lado 308", o también, "han cambiado el 5 y el 3". Para la expresión $12 - 7 = 13 - 8$, dijeron "es cierto porque han sumado 1 al 7 y han sumado 1 al 12".

También tuvieron lugar algunas explicaciones basadas en el cálculo de las operaciones a ambos lados del signo igual que mostraron que los alumnos no estaban aplicando únicamente pensamiento relacional.

Las explicaciones dadas por los alumnos eran, en ocasiones, confusas. Tenían mayor dificultad en comunicar su pensamiento cuando éste se refería a relaciones entre los términos que cuando se refería a la realización de operaciones concretas. En estos casos la investigadora tuvo un papel primordial, motivando la clarificación de las explicaciones y haciendo de "traductora" para el resto de la clase.

Conclusiones de la 4ª sesión

Se observó, fundamentalmente, que el uso de pensamiento relacional era frecuente en este grupo de alumnos, aunque aún era un tercio del grupo los que lo manifestaban. En ocasiones este tipo de explicaciones eran espontáneas y en otras eran motivadas por preguntas de la investigadora, como si podían resolver las igualdades sin hacer la aritmética o sin sumar.

5ª Sesión

Dos meses después de la cuarta sesión, se realizó una prueba escrita similar a la realizada en la primera sesión, con números ligeramente diferentes. El objetivo era determinar la durabilidad de los significados del signo igual mostrados por los alumnos y el uso de pensamiento relacional. Se incluyó la igualdad $238 + 49 = \square + 40 + 9$, en la que, además de rellenar el recuadro, era necesario explicar cómo se había resuelto. Suponíamos que el hecho de que en la igualdad apareciesen números “grandes” haría los cálculos más complejos y favorecería la tendencia a utilizar pensamiento relacional.

Análisis de la prueba (N = 15)

Dos alumnos mostraron que consideraban que las igualdades debían ser de la forma $a \pm b = c$, aunque aceptaban algunas igualdades de la forma $c = a \pm b$. Otro alumno no resolvió la prueba de manera satisfactoria, dando respuestas que eran resultado de la com-binación de dos de los términos de la igualdad de formas diversas, sin respetar la disposición de los términos en la igualdad. El resto de los alumnos resolvió sin dificultades las igualdades propuestas.

Las igualdades que presentaron un mayor número de respuestas incorrectas fueron las siguientes: $\square = 16 - 50$, $15 - 5 = \square - 6$ y $238 + 49 = \square + 40 + 9$. Las causas de los errores parecían estar en no realizar bien el cálculo o en operar juntos todos los números de la igualdad para rellenar el hueco.

La mitad, aproximadamente, de los alumnos emplearon pensamiento relacional al menos en la resolución de una de las igualdades.

ANÁLISIS FINAL

A continuación presentamos un análisis de la evolución de la comprensión del signo igual y del uso de pensamiento relacional que ponen de manifiesto los alumnos a lo largo de las cinco sesiones realizadas. Esta evolución atiende a los cambios detectados en el modo de abordar la resolución de las sentencias e igualdades puesto de manifiesto por los alumnos. No obstante, debido a la complejidad que caracteriza el desarrollo de significado de un concepto matemático, no debemos suponer que el progreso general detectado sea estable y permanente.

Evolución de la comprensión del signo igual

Analizando la evolución de los alumnos a lo largo de las cinco sesiones en las que llevamos a cabo nuestra intervención en el aula, se aprecian tres formas de entender las igualdades o tres significados del signo igual.

- *Estímulo para una respuesta*: Los alumnos entienden que hay que operar todos los números y dar el resultado como respuesta. Proceden de izquierda a derecha y, en la mayoría de los casos, consideran que las operaciones han de situarse a la izquierda del signo igual y la respuesta a la derecha de éste. Sólo aceptan igualdades de la forma $a \pm b \pm \ldots = z$.
- *Expresión de una acción:* los alumnos sólo aceptan igualdades que expresan cadenas de operaciones y su resultado, no importando la colocación de éste. En otras palabras, sólo aceptan igualdades de acción. En este caso, siguen interpretando el signo igual como un estímulo para dar una respuesta, pero reconocen la simetría de las igualdades.
- *Expresión de equivalencia:* Los alumnos reconocen la relación de igualdad que expresan las igualdades y aceptan igualdades de todas las formas consideradas en este estudio, derivadas de la expresión $a \pm b = c \pm d$.

A lo largo de las cinco sesiones la comprensión de los alumnos fue evolucionando, pasando en la mayoría de los casos por estos significados, aunque algunos alumnos no mostraron el significado intermedio "expresión de una acción". Tres alumnos adoptaron la "expresión de equivalencia" después de la 1ª sesión, y nueve más lo hicieron para el final de la 3ª sesión. Tres alumnos necesitaron trabajar durante las cinco sesiones para desarrollar hasta ese punto su comprensión de las igualdades. Los otros tres alumnos no llegaron a entender las igualdades como un todo; dos de ellos no mostraron con claridad ningún significado del signo igual generando diversos tipos de respuestas.

Entre la 1ª y 2ª sesión, seis alumnos modificaron su comprensión del signo igual. Una alumna parece retroceder: en la 1ª sesión resolvió correctamente la igualdad $\square = 25 - 12$ mostrando el significado "expresión de una acción" y, en la 2ª sesión consideró falsa la igualdad $10 = 4 + 6$. Los otros cinco alumnos avanzaron en su compresión: tres de ellos resolvieron la mayoría de las igualdades haciendo uso del significado del signo igual "expresión de equivalencia" y los otros dos mostraron aceptación de igualdades de la forma $c = a \pm b$.

De la 2ª a la 3ª sesión, nueve alumnos más mostraron considerar la igualdad como un todo y dos alumnos mostraron cierto avance aceptando igualdades de la forma $c = a \pm b$.

Entre la 3ª y 5ª sesión dos alumnos mostraron un retroceso. Estos alumnos, que en las discusiones de la 3ª y 4ª sesión pusieron de manifiesto el significado "expresión de equivalencia", respondieron al menos cinco de las siete igualdades considerando el signo igual como un estímulo para dar una respuesta. Tres alumnos mejoraron su desempeño de la 3ª a la 5ª sesión mostrando en la mayoría de las igualdades de la 5ª sesión el significado "expresión de equivalencia".

Evolución de los alumnos con respecto al uso de pensamiento relacional

Las evidencias que poseemos sobre el uso de pensamiento relacional, al tratar los hechos numéricos presentes en las igualdades, corresponden a las verbalizaciones realizadas durante el desarrollo de las discusiones en el aula y a las respuestas de la última igualdad de la prueba escrita de evaluación de la 5ª sesión. En total 11 de los 18 alumnos que participaron en este estudio dieron alguna muestra oral o escrita de hacer uso de pensamiento relacional. Otros alumnos construyeron sentencias o resolvieron las actividades de modo que nos hacen sospechar que estaban empleando pensamiento relacional, pero no llegaron a manifestarlo explícitamente.

Las igualdades y sentencias en las que tuvieron lugar estas explicaciones fueron: $14 + \square = 13 + 4$, $34 = 34 + 12$, $7 + 15 = 100 + 100$, $12 + 11 = 11 + 12$, $15 + 3 = 15 + 2$, $76 = 50 - 14$, $27 + 48 - 48 = 27$, $20 + 15 = 20 + 10 + 5$ y $12 - 7 = 13 - 8$. Las relaciones expresadas con más frecuencia por los alumnos fueron la propiedad asociativa en situaciones de descomposición de uno de los términos de la igualdad y relaciones basadas en la magnitud de los términos involucrados en las que se ponía en juego el conocimiento de los alumnos sobre las operaciones de suma y resta.

Todos aquellos alumnos que usaron pensamiento relacional habían mostrado previamente que veían la expresión de la igualdad como un todo.

Del desempeño de los estudiantes, ante las distintas tareas, deducimos que la forma de los distintos tipos de igualdades influye especialmente en el modo de abordarlas por parte de los escolares. En las igualdades abiertas, los alumnos tendían a realizar los cálculos y a no considerar la totalidad de la igualdad, en cambio, en las sentencias les resultaba más sencillo apreciar esta totalidad y utilizar pensamiento relacional.

CONCLUSIONES

El diseño de investigación adoptado para este trabajo obliga a ir revisando la conjetura establecida durante el proceso de la investigación, por si fuese necesaria una reelaboración de ella. Dicha revisión, realizada a la luz de los datos de cada sesión, permitió ir identificando los tipos de dificultades que manifestaban los alumnos y nos llevó a mejorar la planificación de la posterior intervención en el aula y a refinar nuestra conjetura inicial, permitiéndonos formularla finalmente de la siguiente manera:

Los alumnos de educación primaria encuentran dificultades en la compresión del significado del signo igual, el cual suelen concebir como un comando para dar una respuesta. Esta dificultad se ve favorecida por una fuerte tendencia computacional por parte de los alumnos y por la tendencia a proceder de izquierda a derecha. Las actividades de resolución de igualdades abiertas permiten evaluar dicha comprensión. De acuerdo con los resultados obtenidos, concluimos que el trabajo con sentencias numéricas verdaderas y falsas basadas en relaciones o propiedades aritméticas básicas, en el que se da prioridad a la discusión y explicación de lo realizado por parte de los alumnos, favorece y desarrolla la comprensión de las igualdades en los estudiantes de dicho nivel escolar. En este contexto los alumnos pueden desarrollar pensamiento relacional, al buscar estrategias con las que resolver las tareas propuestas y de este modo hacer explícito y desarrollar su conocimiento sobre las operaciones aritméticas. Actividades de construcción de igualdades, por parte de los alumnos, les permiten desarrollar su comprensión del signo igual al hacer un uso activo de este símbolo. Un obstáculo principal que hay que salvar en el desarrollo de dicha comprensión es la necesidad de encontrar expresado en la igualdad el resultado de las operaciones contenidas en ella, lo que suele denominarse “falta de clausura” de las expresiones.

El aprendizaje del algoritmo horizontal, tanto de la suma como de la resta de números naturales, donde los números que intervienen en la operación están en el lado izquierdo del signo igual y el resultado de la operación a la derecha de éste, es un obstáculo para la visión de la igualdad numérica como un todo. En los estudiantes con los que hemos trabajado, dicho obstáculo se ha mostrado persistente, algunos alumnos retrocedían de unas sesiones a otras en el nivel de sus producciones.

Durante la investigación, los escolares que tomaron parte del estudio trabajaron con igualdades abiertas y sentencias verdaderas y falsas, diseñadas con la intención de promover pensamiento relacional. Esto, creemos, tiene otra ventaja, que es la de permitir fomentar el desarrollo del sentido numérico. Pensamos que las habilidades de cálculo aritmético, implícitas en el manejo y trabajo con las sentencias propuestas, constituyen aprendizajes importantes sobre ideas y hábitos de pensamiento relacional.

Para que los escolares realicen con éxito tareas en las que aparezcan igualdades del tipo $a \pm b = c \pm d$, con todas sus variantes, y establezcan relaciones entre los números, se requiere, por su parte, la comprensión del signo igual como indicador de una relación de equivalencia.

De los resultados obtenidos, nos aventuramos a afirmar que los alumnos de tercer curso de educación primaria con una escolarización normal pueden entender el significado de la igualdad como un todo y establecer relaciones entre los dos miembros de ésta para ver si se trata de una proposición verdadera o falsa. Estos resultados contradicen la delimitación del periodo de 10 a 13 años como el umbral para la comprensión del signo igual como expresión de una equivalencia numérica. Para promover el desarrollo de una amplia comprensión de este símbolo, se sugieren una cuidada introducción del signo igual y un trabajo continuo, en los que se aborde la multiplicidad de significados de este signo y, en especial, su significado *equivalencia numérica*.

También se ha observado que estos alumnos establecen relaciones numéricas empleando los hechos numéricos básicos si se les presenta una motivación para ello.

En la enseñanza de la aritmética, un trabajo adecuado con igualdades numéricas puede favorecer el desarrollo de la comprensión de las igualdades, facilitar el aprendizaje de la aritmética pensada y contribuir a la adquisición de una buena base de conocimiento de la estructura de la aritmética, de gran utilidad en el posterior estudio formal del álgebra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baroody, A.J., y H.P. Ginsburg (1983), "The Effects of Instruction on Children's Understanding of the 'Equals' Sign", *The Elementary School Journal*, vol. 84, núm. 2, pp. 199-212.

Bastable, V., y D. Schifter (en prensa), "Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early-Algebra", en J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (eds.), *Employing Children's Natural Power to Build Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics*, Englewood Cliffs, Laurence Erlbaum Associates.

Behr, M., S. Erlwanger y E. Nichols (1980), "How Children View the Equal Sign", *Mathematics Teaching*, núm. 92, pp. 13-15.

Blanton, M., y J. Kaput (2004), "Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking", en M. Johnsen y A. Berit (eds.), *Proceedings of the 28th*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, vol. 2, pp. 135-142.

Booth, L.R. (1999), "Children's Difficulties in Beginning Algebra", en B. Moses (ed.), *Algebraic Thinking. Grades K-12,* Readings from NCTM'S school-based journals and others publications, Reston, NCTM, pp. 299-307.

Byers, V., y N. Herscovics (1977), "Understanding School Mathematics", *Mathematics Teaching,* núm. 81, pp. 24-27.

Carpenter, T. P., M. L. Franke y L. Levi (2003), *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School,* Portsmouth, Heinemann.

Carraher, D., A.D. Schliemann y B.M. Brizuela (2000), "Early-Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions", XXII Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson, AZ.

Confrey, J., y A. Lachance (2000), "Transformative Teaching Experiments Through Conjecture-driven Research Design", en A.E. Kelly y R.A. Lesh (eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education,* New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 231-265.

Falkner, K.P., L. Levi y T.P. Carpenter (1999), "Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra", *Teaching Children Mathematics,* núm. 6, pp. 232-236.

Freiman, V., y L. Lee (2004), "Tracking Primary Students' Understanding of the Equal Sign", en M. Johnsen y A. Berit (eds.), *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Bergen University College, vol. 2, pp. 415-422.

Gallardo, A., y T. Rojano (1988), "Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico", *Reserches en Didactique des Mathémathiques,* vol. 9, núm. 2, pp. 155-188.

Hejny, M., D. Jirotkova y J. Kratochvilova (2006), "Early Conceptual Thinking", en J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Praga, República Checa, vol. 3, pp. 289-296.

Kaput, J. (1995), *A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform?,* North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus.

——— (1998), *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding,* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

——— (2000), *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum,* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kieran, C. (1992), "The Learning and Teaching of School Algebra", en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (A Project of the NCTM),* Nueva York, Macmillan, pp. 390-419.

——— (1981), "Concepts Associated with the Equality Symbol", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 12, pp. 317-326.

Kindt, M. (1980), "Als een kat om de hete algebrij", *Wiskrant,* vol. 5, núm. 21.

Knuth, E.J., M.W. Alibali, N.M. McNeil, A. Weinberg y A.C. Stephens (2005), "Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence and Variable", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik [International Reviews on Mathematics Education],* vol. 37, núm. 1, pp. 68-76.

Koehler, J. (2002), *Algebraic Reasoning in the Elementary Grades: Developing an Understanding of the Equal Sign as a Relational Symbol,* Tesis de maestría inédita, Wisconsin, University of Wisconsin-Madison.

——— (2004), *Learning to Think Relationally: Thinking Relationally to Learn,* Tesis doctoral inédita, Wisconsin, University of Wisconsin-Madison.

Lee, L. (en prensa), "What is Algebra?", en J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (eds.), *Employing Children's Natural Power to Build Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics,* Englewood Cliffs, Laurence Erlbaum Associates.

Liebenberg, R., M. Sasman y A. Olivier (1999), *From Numerical Equivalence to Algebraic Equivalence,* Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI), V Congreso Anual de la Asociación de Educación Matemática de Sudáfrica (AMESA), Puerto Elizabeth.

Mevarech, Z.R., y D. Yitschak (1983), "Students' Misconceptions of the Equivalence Relationship", en R. Hershkowitz (ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Rehobot, Israel, Weizmann Institute of Science, pp. 313-318.

Molina, M. (2006), *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria,* Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF.

National Council of Teacher of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* Reston, NCTM.

Pirie, S., y L. Martin (1997), "The Equation, the Whole Equation and Nothing but the Equation! One Approach to the Teaching of Linear Equations", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 34, núm. 2, pp. 159-181.
Sáenz-Ludlow, A., y C. Walgamuth (1998), "Third Graders' Interpretations of Equality and the Equal Symbol", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 35, núm. 2, pp. 153-187.
Sisofo, E. (2000), "Can the Instruction of the Davydov Curriculum Develop American Children's Notion of the '=' Symbol as a Relational Symbol Rather than an Operational 'Do Something' Symbol?", Propuesta de tesis doctoral, descargado el 19 de abril de 2004 de http://ematusov.soe.udel.edu/educ820.00s/
Van Reeuwijk, M. (en prensa), "A Dutch Perspective", en J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (eds.), *Employing Children's Natural Power to Build Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics*, Englewood Cliffs, Laurence Erlbaum Associates.
Warren, E. (2003), "Unknowns Arithmetic to Algebra: Two Exemplars", en A. Cockburn y E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Inglaterra, vol. 4, pp. 362-369.

AGRADECIMIENTOS

La investigación que aquí se presenta ha sido realizada dentro de un proyecto (SEJ2006-09056) financiado por el Plan Nacional de I + D + I del Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Económica Europea.

DATOS DE LAS AUTORAS

Encarnación Castro
Departamento de Didáctica de la Matemática,
Universidad de Granada, España
encastro@ugr.es

Marta Molina
Departamento de Didáctica de la Matemática,
Universidad de Granada, España
martamg@ugr.es