UNA EVOLUCIÓN DE LA MIRADA SOBRE LA COMPLEJIDAD DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Vicenç Font
Universitat de Barcelona
vfont@ub.edu
http://www.pagvf.esy.es
http://enfoqueontosemiotico

OBJETIVO

- En esta conferencia se explica la evolución de una agenda de investigación sobre la complejidad de los objetos matemáticos que se quieren enseñar, la cual se inició, en mi caso, con el artículo *Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide*, publicado en la revista Educación Matemática.

- Font, V.; Peraire, R. (2001) Objetos, prácticas y ostensivos asociados. el caso de la cisoide, *Educación matemática*, 13(2), 55-67.

CONTEXTO EN EL QUE SE DESARROLLÓ LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA CISOIDE

- Cuando escribimos este artículo, en el 2001, estábamos interesados en ampliar la investigación sobre las diferentes representaciones de un objeto matemático con análisis históricos y no limitarla solamente a investigaciones cognitivas.

- Nos interesaba generar una línea de investigación, sobre el papel de las diferentes representaciones de los objetos matemáticas en la enseñanza de las matemáticas, de tipo pragmatista que fuese una alternativa a la investigación de tipo cognitivo sobre las representaciones, que era la dominante entonces

LA MIRADA COGNITIVSTA A LAS REPRESENTACIONES

- En aquella época, las investigaciones en didáctica de las matemáticas de tipo cognitivo se interesaban sobre el efecto que producen las diferentes representaciones sobre la comprensión que genera el alumno y **entendían la comprensión de un objeto matemático, básicamente, en términos de integración de representaciones mentales**, junto con las relaciones funcionales entre ellas. Esta integración es la que aseguraba la competencia en el uso de las representaciones externas asociadas al objeto matemático.
- Desde esta perspectiva COGNITIVISTA, un objetivo central en la enseñanza de las matemáticas consistía en conseguir que "**los estudiantes sean capaces de pasar desde una representación a otra sin caer en contradicciones**" (Hitt, 1998, p. 124).
- Este objetivo era asumido por muchos investigadores en la Didáctica de las Matemáticas y lo podíamos encontrar formulado en términos parecidos, tanto para la enseñanza como para el aprendizaje, en muchas publicaciones. Por ejemplo, con relación al aprendizaje, en Duval (2002, p. 318) se decía: **"La conversión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas**".
- Para las investigaciones de tipo cognitivo la **dualidad interno/externo era una noción clave**. Las representaciones cognitivas internas (o mentales) se introducían como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que podían construir los estudiantes sobre las representaciones externas. Las representaciones internas no se podían observar directamente, sino que eran inferidas a partir de conductas observables sobre las representaciones externas.

Una perspectiva pragmatista sobre las representaciones

- En cambio, los autores del artículo sobre la cisoide estábamos interesado en el desarrollo de una línea de investigación en la Didáctica de las Matemáticas sobre las representaciones de los objetos matemáticos de tipo pragmatista, que también daba mucha importancia al uso de diferentes representaciones, aunque las razones para ello eran diferentes a las que daban las investigaciones de tipo cognitivo.
- Mientras que en las segundas las representaciones se analizaban básicamente desde la perspectiva representacional (algo por algo), en las primeras primaba el aspecto instrumental (lo que se podía hacer con la representación). El valor representacional lleva a entender la representación de una manera elemental o unitaria "algo" por "algo". En cambio, el valor instrumental lleva a entender la representación de una manera sistémica, como el detonante de un sistema complejo de prácticas que dicha representación permite realizar (otra representación diferente permitiría otro tipo de prácticas).

- Para ello, utilizando como contexto de reflexión el caso de la cisoide, nos interesaba ilustrar la complejidad de las relaciones que se establecen entre:

  un objeto matemático,

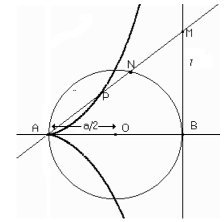
  sus ostensivos asociados,

  las prácticas que permiten manipular estos ostensivos y

  las situaciones en las que se usa el objeto (juntamente a sus ostensivos y prácticas asociadas) para organizar fenómenos.

- Dicha complejidad llevaba a formularse las preguntas siguientes**: La cisoide ¿es una o son muchas? ¿Se trata siempre del mismo objeto representado de diferentes maneras?**

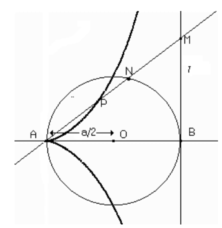
- Sea C una circunferencia de radio $a/2$ y centro O, AB un diámetro de C y l la recta tangente a C en B. Para cada recta AM, $M \in l$, consideramos su intersección N con C y un segmento AP, $P \in AM$, de igual longitud que MN. El lugar geométrico de los puntos P así obtenidos es una curva llamada *Cisoide de Diocles.*



Un ejemplo: la cisoide

- Tomemos como ejemplo la cisoide y la consideramos definida como lugar geométrico en el marco de la geometría sintética.
- Dentro del programa de la geometría sintética se puede realizar la "conversión" entre el lenguaje verbal de la definición y el "lenguaje geométrico" de la figura.
- Además se pueden realizar diferentes prácticas en las que interviene la "representación gráfica" (figura) de la cisoide.

- Sea C una circunferencia de radio $a/2$ y centro O, AB un diámetro de C y l la recta tangente a C en B. Para cada recta AM, $M \in l$, consideramos su intersección N con C y un segmento AP, $P \in AM$, de igual longitud que MN. El lugar geométrico de los puntos P así obtenidos es una curva llamada *Cisoide de Diocles.*



- Esta forma de representación (desde la perspectiva actual) de la cisoide permite obtener información significativa sobre esta curva:

1) Es simétrica respecto del eje de abscisas,
2) La recta $x = a$ es una asíntota vertical ,
3) Es algebraica,
4) Es de grado 3,
5) En el origen de coordenadas presenta una singularidad de orden 2,
6) Es irreducible
7) Es racional

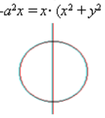
- Se puede sacar la conclusión de que los griegos descubrieron un objeto matemático (la cisoide) que tiene todas estas propiedades

Que es simétrica respecto del eje de abscisas y que tiene una asíntota vertical es visualmente inmediato. Que la curva es algebraica no es tan evidente, pero al obtenerse por una sucesión de movimientos escalonados se puede afirmar que lo es . Para comprobar que la curva es de grado tres basta observar que el máximo número de puntos de intersección de la cisoide con una recta genérica (por ejemplo, la recta r) es tres .

Esta figura también nos permite observar que el origen es un punto singular de orden dos ya que, en el caso que la recta r pase por el origen de coordenadas, ella corta la curva como máximo en dos puntos.

La figura obtenida utilizando el programa Cabri es irreducible porque no puede ser considerada como la unión de dos curvas algebraicas diferentes, lo cual si es posible en el siguiente ejemplo:

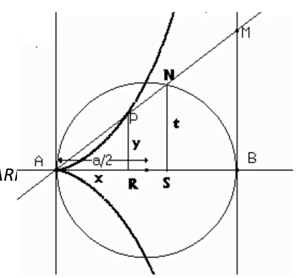
Ejemplo: la curva plana dada por la ecuación $x^3 + y^2x - a^2x = 0$ tiene dos componentes irreducibles: la recta de ecuación $x=0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - a^2 = 0$; ya que admite la descomposición: $x^3 + y^2x - a^2x = x \cdot (x^2 + y^2 - a^2)$



Intuitivamente una curva es racional si es parametrizable por funciones racionales. Esta propiedad se puede visualizar gráficamente como una "casi-biyección" (una aplicación biyectiva entre la curva y una recta, salvo quizás en un número finito de puntos). Esta biyección se observa claramente en la construcción de la cisoide con el programa Cabri ya que a cada punto M de la asíntota le corresponde un único punto P de la curva

- *Gráfica* $\Rightarrow$ *Expresión simbólica (algebraica)*
- En la "Geometrie", Descartes se plantea hallar la expresión simbólica de una curva.

- Los triángulos *ARI*



$$\frac{y}{x} = \frac{t}{a - x}$$

- La circunferencia tiene por ecuación:

$$t^2 = ax - x^2$$

- Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones se obtiene la ecuación de la a cisoide:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{x} = \dfrac{t}{a-x} \\ t^2 = ax - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^3 + y^2x - ay^2 = 0$$

- La traducción "GRÀFICA $\Rightarrow$ ECUACIÓN ÍMPLÍCITA" es una técnica que forma parte de un programa de investigación, iniciado por Descartes en la Géométrie, que (según Boss) consta básicamente de tres partes:

  1) Primeramente, Descartes ha de determinar cuáles **son las curvas que serán estudiadas** (las geométricas).

- 2) En segundo lugar, ha de postular **un criterio claro para distinguir las curvas simples de las que no lo son** (la aplicación del álgebra le permite obtener ecuaciones, el grado de las cuales puede ser usado como un indicador de simplicidad).
- 3) Finalmente, ha de encontrar **un método para hallar la curva más simple posible** mediante la cual se puede resolver un problema dado.

- Este "programa de investigación" permite la conversiön del registro gráfico al simbólico.
- Permite algunas traducciones entre expresiones simbólicas, pero al ser un programa **global** en el que el estudio **local** no se contempla, no permite otras
- Por ejemplo, permite la traducción ***Implícita*** $\Rightarrow$ ***Implícita***

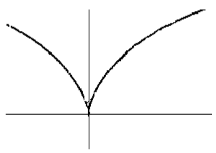
  Con el siguiente cambio de coordenadas:

  $$x = y_1 ,\ y = -x_1$$

  la expresión implícita de la cisoide es:

  $$y_1^3 + x_1^2\, y_1 - a\, x_1^2 = 0$$

  y ahora, la traza de la cisoide es la gráfica de una función:



- Este programa de investigación no permite la traducción ***Implícita ⇒ Explícita***
- Mientras nos limitemos a buscar la expresión implícita nos estamos situando en en un punto de vista GLOBAL.
- Para Buscar la forma explícita estamos obligados a introducir razonamientos de tipo LOCAL.
- Situados dentro de este nuevo “programa de investigación” (perspectiva local), las técnicas de desarrollo en series de potencias nos permiten obtener expresiones explícitas de la cisoide.

- En la expresión $y_1^3 + x_1^2\, y_1 - a\, x_1^2 = 0$, el teorema de la función implícita nos asegura que, en un entorno de un punto no singular (x,y) de la cisoide, la curva se puede parametrizar en la forma $(x\,,\, h\,(x))$.

$$h(x+\varepsilon) = h(x) + \frac{2ax - 2h(x)x}{3h(x)^2 + x^2}\,\varepsilon + \frac{(2h(x)-2a)3x^2(3ah(x)+3h(x)^2+3x^2)}{(3h(x)^2+x^2)^3}\,\frac{\varepsilon^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots$$

- La fórmula de Taylor no es aplicable en un entorno de un punto singular.
- Nos hemos de situar en un nuevo programa de investigación (La geometría Algebraica) que estudia las singularidades
- Los desarrollos de Puiseux permiten solucionar el problema ya que nos permiten obtener, en un entorno del punto singular de la cisoide $y_1^3 + x_1^2\, y_1 - a\, x_1^2 = 0$, la expresión:

$$y(x) = a^{1/3}x^{2/3} - \frac{x^{4/3}}{3a^{1/3}} + \frac{x^{8/3}}{81a^{5/3}} + \ldots\ldots\ldots$$

Problematización de la mirada platónica sobre los objetos matemáticos

- Otro aspecto que estaba presente, de manera incipiente, es este artículo sobre la cisoide era la importancia para la Didáctica de la Matemáticas de problematizar la visión platónica sobre los objetos matemáticos. El punto de vista platónico sobre las representaciones ostensivas de los objetos matemáticos es que éstas son secundarias y relativamente “neutras”, ya que se consideran como diferentes significantes de objetos matemáticos a-históricos.
- El efecto que producen las diferentes representaciones ostensivas en la producción de sentido es un tema que no preocupa en demasía a la concepción platónica, ya que este posible efecto corresponde al "contexto de descubrimiento" y no al "contexto de justificación".
- La problematización del punto de vista platónico iba de la mano con otro aspecto que también estaba presente, de manera incipiente, es este artículo sobre la cisoide: **la importancia para la Didáctica de la Matemáticas de tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos.**

UN MARCO TEÓRICO PARA PROFUNDIZAR EN ESTA PROBLEMÁTICA: EL EOS

- El hecho de que el EOS fuese uno de los marcos teóricos que más se había interesado en reflexionar sobre la complejidad de los objetos matemáticos y de su emergencia a partir de las prácticas; y en buscar una explicación de cómo éstos emergen en el aula que no fuese de tipo platónico, me llevó a reflexionar sobre estos aspectos utilizando como marco teórico el EOS.
- En concreto, participé activamente en dar una respuesta a dos de las preguntas que ha sido el motor de desarrollo del EOS: ¿Qué es un objeto matemático y cuál es su significado una determinada institución? ¿Cómo emergen los objetos matemáticos a partir de las prácticas?

Dos alternativas para adoptar un marco teórico

- La alternativa, que metafóricamente podemos llamar tipo secta, cuyo funcionamiento más o menos es el siguiente:

  Primero, eliges un enfoque o te lo impone tutor, b) publicas artículos utilizando dicho enfoque, lo cual quieras o no te llevando a asumirlo cada vez más, c) comienzas a tener una identidad compartida con las otras personas del enfoque; d) vas adoptando las propuestas de la tribu que usa el enfoque, c) desarrollas argumentos para darles razonabilidad y d) finalmente, escoges algunos hechos para reafirmar los argumentos. Este te permite incluso a poder llegar a pelearte con las otras tribus que tiene un enfoque diferente.

  Ese es, exactamente, el camino de la “identificación identitaria con un enfoque”, no tiene nada que ver con el camino supuestamente ideal para la elección de un enfoque:

- La alternativa racional o ideal

  Examinas los hechos, b) sacas conclusiones sobre ellos, y c) escoges un enfoque teórico que explique estos hechos y conclusiones y que, sobre todo, las explique mejor que otros enfoques.

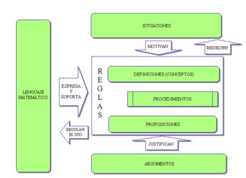
- Uno de los corolarios más importantes de esta caracterización identitaria es que lo que importa es la identidad de la que se parte, y lo que menos importa son que los constructos y los hechos que la sustenten, sean útiles, verdaderos o falsos. Todo se reduce a <<nosotros (los bien orientados) y ellos (los mal orientados o despistados)>>

Dos niveles de emergencia de objetos a partir de las prácticas

- En Font, Godino y Gallardo (2013) se da una respuesta a la pregunta: ¿Cómo emergen los objetos a partir de las prácticas? en la que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial.
- En este artículo se considera que el camino por el cual los objetos matemáticos emergen a partir de las prácticas es complejo y deben ser distinguidos, al menos, dos niveles de emergencia. En un primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos (llamados objetos primarios en el EOS), que se organizan en configuraciones llamadas epistémicas.

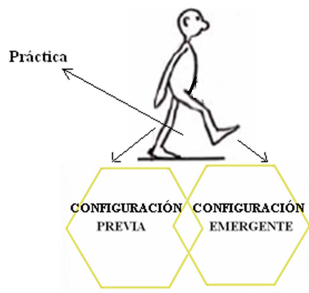
REALIZACIÓN DE UNA PRÁCTICA: OBJETOS PREVIOS Y EMERGENTES

- La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.).
- Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones, sujetas a reglas matemáticas, orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, **objetos y procesos matemáticos.**



LA METÁFORA <<SUBIR UNA ESCALERA>>

- Para explicar cómo emergen nuevos objetos primarios a partir de las prácticas, nos será muy útil la metáfora “subir una escalera”.
- Cuando subimos una escalera siempre nos estamos apoyando en un pie, pero cada vez el pie está en un escalón superior.
- La práctica matemática la podemos considerar como “subir la escalera”. El escalón en el que nos apoyamos para realizar la práctica es una configuración de objetos primarios ya conocida, mientras que el escalón superior al que accedemos, como resultado de la práctica realizada, es una nueva configuración de objetos en la que alguno (o algunos) de dichos objetos no era conocido antes.



Naturaleza de los objetos primarios: Una perspectiva convencionalista

- Con relación a la naturaleza de dichos objetos primarios, en el EOS, en consonancia con la filosofía de la matemática de Wittgenstein (1978), se considera que el tipo de existencia de las definiciones, proposiciones y procedimientos es el que tienen las reglas convencionales.
- Desde este punto de vista, los enunciados matemáticos son reglas (gramaticales) para el uso de cierto tipo de signos porque de hecho se usan como reglas.
- No describen propiedades de objetos matemáticos con algún tipo de existencia independiente de las personas que quieren conocerlos y del lenguaje que se usa para conocerlos, aunque lo pueda parecer.

PERO NO SE IGNORA que implícitamente se está sugiriendo, en los procesos de enseñanza, una visión DESCRIPTIVA/REALISTA de las matemáticas.

- Si bien es cierto que en el EOS se adopta un punto de vista convencionalista sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, no se ignora que implícitamente se está sugiriendo, en los procesos de enseñanza, una visión descriptiva/realista de las matemáticas.
- Para poder explicar cómo se genera dicha visión es necesario considerar un segundo nivel de emergencia, en el cual emerge un objeto matemático, por ejemplo el objeto función, que es considerado como un objeto que se constituye por diferentes representaciones, que puede tener varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc.

SEGUNDO NIVEL DE EMERGENCIA DE UN OBJETO MATEMÁTICO

- Esta segunda emergencia es el resultado de diferentes factores. Los principales son los siguientes:

1) La objetividad de las matemáticas

2) El éxito predictivo de las ciencias que usan las matemáticas

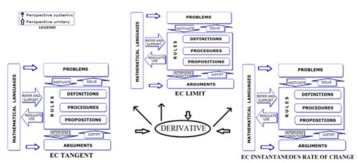
3)Simplicidad, intencionalidad y reificación

4)Uso de la metáfora objetual

5)Diferentes representaciones de un mismo objeto

6) Representaciones bien formada sintáticamente que no representan ningún objeto matemático

- Según el EOS, el objeto derivada (por ejemplo) hay que situarlo en el segundo nivel de emergencia de objetos considerado en este enfoque.
- Se trata de la emergencia de una referencia global asociada a diferentes configuraciones de objetos primarios, las cuales permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos –en los cuales la derivada se ha interpretado como límite, como pendiente de la recta tangente o como velocidad instantánea, además como un operador que transforma una función en otra–, lo cual lleva a entender que la derivada se puede definir de diversas formas, representar de formas diferentes, etc.
- El resultado, según el EOS, es que se considera que hay un objeto, llamado derivada, que juega el papel de referencia global de todas las configuraciones de objetos primarios. Ahora bien, dicha referencia global, en la actividad matemática, se concreta en una configuración de objetos primarios determinada. Por tanto, lo que se puede hacer con este objeto de segundo nivel está determinado por esta configuración. En el EOS, el objeto que juega el papel de referencia global, se puede considerar como único por razones de simplicidad y, a la vez, como múltiple ya que, metafóricamente, se puede decir que estalla en una multiplicidad de objetos primarios agrupados en diversas configuraciones que permiten diferentes prácticas.



Investigaciones sobre la complejidad

- Participé en diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos:

  Números naturales (Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche, 2009),

  Media aritmética (Rondero y Font, 2015),

  Límite (Contreras, García y Font, 2012),

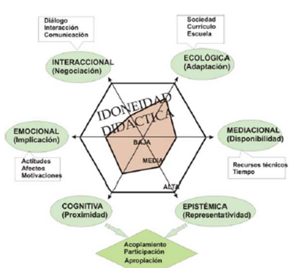
  Optimización (Balcaza, Contreras y Font, 2017),

  Teorema de Tales (Font, Breda y Seckel, 2017)

  Derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011) y de la Antiderivada (Gordillo y Pino-Fan, 2016; Pino-Fan, et al., 2017), así como la comprensión que tienen los estudiantes de dicha complejidad (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda, 2017; Pino-Fan, Godino y Font, 2018).

Idoneidad didáctica

- En estas investigaciones se llegó a la conclusión de que los profesores tenían que tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos que enseñaban para conseguir una enseñanza más eficaz, lo cual me llevó a interesarme por la manera de incorporar la problemática de la complejidad de los objetos matemáticos en la formación de profesores.
- En particular me llevó a desarrollar, conjuntamente con otros investigadores que también utilizan como referente teórico el EOS, el constructo idoneidad didáctica de un proceso de instrucción. Dicho constructo se compone en seis criterios de idoneidad parciales, uno de los cuales es el criterio de idoneidad epistémica, desglosados en componentes e indicadores; siendo uno de los componentes del criterio de idoneidad epistémica tener en cuenta la complejidad del objeto que se quiere enseñar (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).



Componentes y descriptores de la Idoneidad Epistémica

Componentes	Descriptores
Errores	✓ No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	✓ No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	✓ La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. ✓ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. ✓ Para uno (o varios significados parciales), se propone una muestra representativa de problemas. ✓ Para uno (o varios significados parciales), se hace uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), y de tratamientos y conversiones entre los mismos.

EL COMPONENTE <<REPRESENTATIVIDAD DE LA COMPLEJIDAD DEL OBJETO MATEMÁTICO>> EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

- En diferentes procesos de formación de profesores de matemáticas de España, México, Brasil, Ecuador, Chile, Panamá, Costa Rica, Venezuela y Argentina, se han realizado un conjunto de investigaciones que tienen como finalidad investigar el uso del constructo *criterios de idoneidad didáctica* como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su práctica, cuando esta reflexión está orientada hacia la valoración y mejora de la práctica, con el objetivo de desarrollar en los profesores la subcompetencia de análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.

- Estas investigaciones han puesto de manifiesto los siguientes aspectos: 1) aunque no se incorpore explícitamente la enseñanza de los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, algunos de ellos, y en particular el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>>, están presentes de manera implícita cuando los profesores o futuros profesores hacen valoraciones de propuestas didácticas (suyas o de otros) (Breda, 2016; Breda y Lima, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017). 2) Incorporar el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático>> para valorar la idoneidad epistémica de un proceso de enseñanza y aprendizaje, no es tarea fácil, ni para los formadores ni para sus alumnos (futuros profesores o profesores en servicio), pero se puede enseñar como parte del proceso de formación del profesorado. En estos dispositivos formativos, se hace hincapié en la necesidad de realizar un estudio preliminar orientado a la reconstrucción de un significado global sobre el objeto matemático que se quiere enseñar para poder ser conscientes de su complejidad.

Lecturas para profundizar

- Breda, A.; Font, V.; Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255–278.
- Breda, A., Pino-Fan, L & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 13(6), 1893-1918.
- Font, V. (2016). Coordinación de teorías en Educación Matemática. El caso del Enfoque Ontosemiótico. *Perspectivas da Educaçao Matemática,* 9(20), 256-277
- Font, V.; Breda, A. y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 10(2), 1-23.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82, 97–124.* The final publication is available at www.springerlink.com.
- Font, V.; Peraire, R. (2001) Objetos, prácticas y ostensivos asociados. el caso de la cisoide, *Educación matemática*, 13(2), 55-67.
- Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., & Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education.*, 16(6), 1091–1113 doi: 10.1007/s10763-017-9826-2.
- Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29-49.