Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad

M. Carmen Penalva, José Adolfo Posadas y Ana Isabel Roig

Resumen: El objetivo de la investigación presentada aquí es caracterizar la actividad de planteamiento de problemas en el dominio de la probabilidad por estudiantes universitarios. Nosotros describimos los recursos, los heurísticos y el tipo de razonamiento de los estudiantes cuando planteaban problemas de probabilidad condicional e identificamos la demanda cognitiva de los problemas propuestos. Los estudiantes tenían que resolver un problema y generar un problema original a partir de una situación dada, involucrando en ambas tareas determinados conceptos de probabilidad. Los resultados indican que la relación entre la manera de resolver los problemas y la actividad de formular problemas es compleja, pero proporciona información sobre los procesos de aprendizaje de la probabilidad en los estudiantes universitarios.

Palabras clave: planteamiento de problemas, heurísticos en el planteamiento de problemas, tareas sobre probabilidad, contexto de aprendizaje.

Resolution and approach of problems: Contexts for learning of the probability

Abstract: The main goal of the research presented here is to characterize the undergraduate students' activities of problem posing in the domain of probability. We describe the resources, heuristics, and type of reasoning when students posed conditional probability problems and we identify the cognitive demand of the problems formulated by students. Students had to solve a problem and create an original problem from a given situation, involving in both tasks concepts of probability. The findings indicate that the relation between the way of solving problem and the activity of problem posing is complex but it provides information about undergraduate students' probability learning.

Keywords: problem posing, problem posing heuristics, tasks about probability, learning context.

Fecha de recepción: 26 de marzo de 2010.

INTRODUCCIÓN

Un ámbito relevante de investigación en Didáctica de la Matemática es el aprendizaje de las matemáticas en distintos contextos. Las tareas relativas a la resolución y al planteamiento de problemas son instrumentos que posibilitan indagar sobre aprendizajes específicos de los estudiantes universitarios. De esta manera, en las investigaciones sobre el aprendizaje, la resolución de problemas tiene su complemento ideal en el planteamiento de problemas, ya que el trabajo de los estudiantes cuando resuelven y plantean problemas de matemáticas proporciona información sobre los procesos de construcción y uso del conocimiento. Por una parte, los procesos de resolución de problemas activan el razonamiento y la comprensión de los conceptos, mientras que los procesos de planteamiento de problemas añaden a lo anterior un mayor nivel de abstracción y la necesidad de utilizar adecuadamente el lenguaje natural y formal (Schoenfeld, 1992; Silver, 1994). Esta situación no es diferente para el caso de la resolución y planteamiento de problemas de probabilidad.

Por otra parte, los estudiantes que ingresan en la universidad tienen una serie de creencias erróneas sobre probabilidad que dificulta notablemente su comprensión de esta materia (Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 2005). Diversas investigaciones muestran que sólo una minoría de estudiantes universitarios analiza los fenómenos aleatorios desde el punto de vista formal de la teoría de la probabilidad y utiliza correctamente los procedimientos necesarios para el cálculo de la probabilidad de un suceso (Díaz, 2003; Guisasola y Barragués, 2002; Jones, Langrall y Money, 2007).

La presente investigación se integra en la intersección de dos líneas: por una parte, las investigaciones sobre el planteamiento y la resolución de problemas (Castro, 2008; Crespo, 2003; Kilpatrick, 1987) y, por otra parte, las investigaciones sobre la comprensión de los contenidos de probabilidad (Batanero y Sánchez, 2005; Jones, Langrall y Money, 2007; Jones y Thorton, 2005). Esta investigación se centra en el trabajo que desarrollan estudiantes universitarios de los estudios de Ciencias Empresariales de la Universidad de Alicante cuando resuelven y plantean problemas de probabilidad, lo que permite, además, identificar rasgos generales de su actividad matemática desarrollada en los procesos de resolución y planteamiento de problemas.

Sobre el aprendizaje de la probabilidad

La investigación centrada en el análisis del pensamiento probabilístico se ha desarrollado fundamentalmente en las últimas cinco décadas. En las décadas de 1950 y 1960 la investigación fue acometida por Piaget e Inhelder y por psicólogos con distintas orientaciones teóricas. Si bien los estudios no estaban directamente referidos a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, el alcance de sus investigaciones, la metodología y las conclusiones obtenidas por Piaget e Inhelder fueron tan profundas que sus estudios han sido fundamentales en las investigaciones posteriores (Jones y Thornton, 2005). El periodo entre las décadas de 1970 y 1980 fue una continuación del trabajo de Piaget. Los psicólogos estuvieron interesados en la probabilidad desde una perspectiva cognitiva y epistemológica y sus investigaciones tuvieron implicaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad. Investigadores como Fischbein y Gazit (1984) mostraron un gran interés en la naturaleza de las concepciones e intuiciones probabilísticas. Fischbein resaltó la importancia de que los estudiantes tengan la oportunidad de afrontar cuanto antes situaciones en las que las ideas probabilísticas entren en juego y, de esta manera, posibilitar un adecuado desarrollo de ellas.

Con la llegada de las reformas curriculares en educación matemática a partir del decenio de 1990, hubo un pujante crecimiento en investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad. Los investigadores han seguido la línea trazada por Piaget y Fischbein y han estudiado la manera como piensa la gente ante situaciones aleatorias. La investigación ha avanzado más allá, describiendo los heurísticos y las ideas equivocadas que se dan en el desarrollo cognitivo de un rango amplio de conceptos de probabilidad. La investigación sobre el aprendizaje de la probabilidad está dirigida por la necesidad de que los profesores tengan conciencia de los conocimientos probabilísticos y de las creencias de los estudiantes.

El aprendizaje de conceptos como experimento aleatorio, equiprobabilidad, independencia, etcétera, ha sido investigado detenidamente en el nivel de enseñanza secundaria (por ejemplo, Batanero, 2005; Batanero, Henry y Parzysz, 2005). En estas investigaciones, el análisis de los obstáculos que han ido surgiendo en la historia sobre la formación de los conceptos ayuda a conocer las dificultades de los estudiantes cuando aprenden matemáticas. Es evidente que los conceptos de azar y aleatoriedad presentan un reto duradero a los estudiantes de todas las edades (Jones, Langrall y Money, 2007). El concepto de espacio muestral es también parte fundamental del proceso de utilizar los fenómenos aleatorios de manera matemática. Es un descriptor importante de los resultados de los experimentos aleatorios y también da la base para medir las probabilidades de los sucesos. Para construir y utilizar convenientemente el espacio muestral, hay que reconocer los diferentes caminos para obtener resultados y saber generar todos los posibles resultados de modo exhaustivo.

Un concepto que tiene una significación importante en la investigación sobre tópicos de probabilidad es el de probabilidad condicionada y la utilización correcta del teorema de Bayes. Diversas investigaciones identifican las distintas concepciones sobre la probabilidad condicionada. Por ejemplo, Díaz y De la Fuente (2005, 2007) muestran la existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de este concepto que ponen de manifiesto los estudiantes. Por otra parte, Falk (1986) analizó las dificultades de los estudiantes para distinguir adecuadamente entre la probabilidad del suceso A condicionado al suceso B, $P(A|B)$, y la probabilidad del suceso B condicionado al suceso A, $P(B|A)$, lo que denominó la falacia de la condicionada transpuesta; y Gras y Totohasina (1995) pusieron de manifiesto que algunos estudiantes interpretan la probabilidad condicionada como una relación temporal, donde el suceso condicionante B siempre precede al suceso A. Díaz y Batanero (2008), además de resumir las dificultades que encuentran en este concepto los estudiantes de los últimos cursos de bachillerato y universidad, observan en un amplio número de estudiantes de Psicología que, aunque la comprensión formal de la probabilidad condicionada mejoró con la práctica docente, algunos de los errores descritos en la literatura permanecieron y no mejoraron con la instrucción. Díaz y De la Fuente (2006) y Díaz, Ortiz y Serrano (2007) realizan un estudio sobre las dificultades de estudiantes de Psicología en la resolución de problemas mediante el cálculo de probabilidades condicionadas inversas utilizando el teorema de Bayes y concluyen que, como afirmaron Tversky y Kahneman (1974), los estudiantes no usan el teorema de Bayes de manera intuitiva, parte de la dificultad está en la representación escogida para resolver el problema. En la investigación realizada (Posadas, 2008, y Penalva y Posadas, 2009) se muestra la dificultad que presentan los estudiantes de Ciencias Empresariales a la hora de realizar una correcta partición del espacio muestral, no en cuanto a que los sucesos que la formen sumen la unidad, sino a que sean incompatibles, aunque identifican adecuadamente los sucesos que intervienen en el teorema de Bayes y organizan de manera adecuada sus cálculos.

Otros investigadores, como por ejemplo Sánchez (2002) y Sánchez e Inzunza

(2006), han resaltado la importancia del propio conocimiento de la probabilidad por parte de los profesores y promueven el uso de un software adecuado por sus potenciales posibilidades didácticas para el entendimiento de conceptos, tales como experimento aleatorio y distribución de una variable aleatoria que, según estos investigadores, los profesores suelen pasar por alto.

Sobre la resolución y planteamiento de problemas

Resolver un problema no es sólo descubrir un procedimiento para llegar desde los "datos" a las "metas" del problema, conlleva el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual por lo general supone varios ciclos iterativos de expresar, hacer pruebas y revisar interpretaciones matemáticas, y de ordenar, combinar, modificar, revisar o refinar conceptos matemáticos (Lesh y Zawojewski, 2007; Polya, 1970). Polya (1970), al describir este proceso, identificó cuatro fases por las que debe pasar la resolución de un problema: comprender el problema, diseñar un plan, poner en ejecución el plan y verificar la solución obtenida. No obstante, Schoenfeld (1992) señaló que las caracterizaciones de Polya no proporcionan el detalle suficiente para permitir al resolutor implementar aquellas estrategias con las que no esté familiarizado y recomienda que cada heurístico convencional derivado del trabajo de Polya sea descompuesto en una larga lista de estrategias más específicas.

Por otra parte, el planteamiento de problemas también ha sido identificado como un aspecto importante de la educación matemática y ha empezado a recibir una atención creciente en dicho ámbito. Para realizar una tarea en la que se pretende resolver un problema aplicando un "algoritmo estándar", los estudiantes necesitan entender qué algoritmos aplican y utilizar el procedimiento o conjunto de procedimientos para su resolución. En contraste, una tarea de planteamiento de problemas abiertos a distintas posibilidades seguramente no podrá ser resuelta siguiendo un "algoritmo estándar". Una tarea de planteamiento de un problema abierto puede no requerir la ejecución de un procedimiento conocido, sino una exploración de la situación a la que se referirá el problema y su solución. Los estudiantes no tienen una rutina que seguir cuando generan problemas a partir de unas condiciones dadas, sino que deben reflexionar sobre su manera de resolver problemas y considerar cómo podría modificarse, ampliarse y clarificarse de modo eficiente (Kontorovich y Koichu, 2009).

Sin embargo, se sabe poco sobre los procesos cognitivos de los estudiantes cuando plantean problemas de matemáticas. Según señala Silver (1994), aunque las tareas de planteamiento de problemas posibilitan a los investigadores indagar sobre aprendizajes específicos de los estudiantes, no ha habido una investigación sistemática sobre el proceso de plantear problemas Así, aunque el planteamiento de problemas puede verse como una faceta complementaria de la resolución, se conoce mucho menos sobre los procesos cognitivos implicados cuando los resolutores generan sus propios problemas (Cai, 1998, 2003; Cai y Hwang, 2002). Estos trabajos indican que, al investigar cómo plantean problemas los estudiantes, se obtiene información sobre cómo resuelven los problemas y viceversa (Silver, 1994). Otra dirección importante en este trabajo es la de investigar sobre la posible relación entre la resolución y el planteamiento de problemas ya señalado por otros autores (Cai, 1998; Kilpatrick, 1987; Silver y Cai, 1996).

En la investigación realizada, el planteamiento de problemas se considera vinculado a la generación de nuevos problemas y a la reformulación de algún problema dado. El planteamiento de problemas puede ocurrir dentro del proceso de resolución de problemas, cuando el resolutor, al resolver un problema no trivial, se implica de modo que se puede decir que plantea un nuevo problema de alguna manera para hacerlo más accesible y poderlo resolver. Una segunda forma de planteamiento de problemas más evidente es cuando el objetivo es la creación de un nuevo problema a partir de una situación dada. El planteamiento de problemas también puede ocurrir después de haber resuelto un problema particular, cuando el estudiante debe examinar las condiciones del problema para generar problemas relacionados alternativos (Silver, 1994; Silver y Cai 1996). De este modo, la expresión "planteamiento de problemas" se aplica por lo general a tres formas distintas de actividad cognitiva matemática:

- *Planteamiento de presolución*. Se generan problemas originales desde una situación-estímulo presentada.
- *Planteamiento en solución*. Se reformula un problema a partir de la resolución efectuada.
- *Planteamiento postsolución*. Se modifican los objetivos o las condiciones de un problema ya resuelto para generar nuevos problemas.

En esto coinciden otros investigadores como Stoyanova (1998), que define el planteamiento de problemas matemáticos como el proceso por el cual, con base en situaciones concretas, se formulan problemas matemáticos significativos.

Con estas referencias, los objetivos de esta investigación fueron:

- Identificar características de la actividad matemática que desarrollan los estudiantes cuando resuelven y plantean problemas de probabilidad.
- Estudiar posibles relaciones entre los comportamientos de los estudiantes cuando resuelven y plantean problemas de probabilidad.

MARCO CONCEPTUAL

Se considera que el trabajo cooperativo de los estudiantes puede conducir a obtener mejores soluciones que las que se obtienen en los trabajos individuales. Cuando los estudiantes están tratando de aprender, se benefician de compartir sus ideas, especialmente cuando tienen diferentes puntos de vista. Sin embargo, introducir una dimensión social en una situación de aprendizaje contribuye a un incremento en la complejidad de la situación, ya que se introduce un problema adicional al puramente matemático. La importancia de la interacción entre alumnos para el aprendizaje matemático ha sido subrayada recientemente (Pijls *et al.*, 2007), lo que ha hecho necesario caracterizar la resolución de problemas como actividad matemática y los procesos de razonamiento desencadenados en situaciones de interacción cuando se resuelven problemas. Así, para identificar las características de la actividad matemática generada por estudiantes universitarios al resolver y plantear problemas de probabilidad, consideramos referencias cuya complementariedad aporta información sobre cómo interpretar las conductas de los estudiantes. Estas referencias son las categorías de Schoenfeld para analizar la actividad matemática durante la resolución de problemas y la caracterización de razonamiento matemático y superficial.

La resolución de problemas como actividad matemática

Schoenfeld (1985) describe un marco para el análisis de la actividad matemática que se desarrolla durante la resolución de problemas, estableciendo cuatro categorías: los recursos, los heurísticos, el control y el sistema de creencias.

Los *recursos* son los conocimientos matemáticos que tiene el estudiante y que puede utilizar durante la resolución del problema. Por ejemplo:

- Intuiciones y conocimiento informal con respecto al dominio del problema.
- Hechos y definiciones.

- Procedimientos algorítmicos.
- Procedimientos no algorítmicos "rutinarios".
- Conocimientos sobre las reglas acordadas para trabajar en el dominio matemático particular.

En la investigación realizada, las tareas de resolución y de planteamiento de problemas sirven como un medio para indagar qué conocen y cómo usan los estudiantes los contenidos de probabilidad cuando resuelven y plantean problemas por parejas. En esta situación, si dos estudiantes están intentando resolver un problema en el que dos sucesos A y B son independientes y deben emplear la probabilidad de la intersección de los sucesos contrarios, $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$, y para poder utilizarla como producto de las probabilidades deben comprobar que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes, estos estudiantes disponen de información como:

Si A y B son independientes:

- $P(A|B) = P(A)$ siempre que $P(B) > 0$
- $P(A|B) = P(B)$ siempre que $P(A) > 0$
- $P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right)$

Además, si los estudiantes han recibido enseñanza sobre la probabilidad del suceso contrario, las leyes de Morgan, la probabilidad de la unión de dos sucesos..., algunos considerarán todos estos contenidos como ciertos; otros, en el momento de resolver el problema, "recordarán" sólo algunos supuestos y otros no los tendrán en cuenta. En este caso, la información relevante es esencial para la resolución del problema.

Los *heurísticos* son las estrategias y técnicas que usan los estudiantes para resolver el problema y permiten descubrir caminos para proseguir cuando se encuentran ante una dificultad. Los problemas de probabilidad pueden incluir algunas estrategias como:

- Dibujar gráficos.
- Introducir una notación apropiada.
- Utilizar problemas relacionados.
- Usar algún contraejemplo.
- Reducción al absurdo.
- Utilizar algún caso particular.
- Diagramas en árbol.

- "Ordenar" el problema de manera secuencial.
- Usar procedimientos de prueba y verificación.

La tercera categoría que establece Schoenfeld (1985) para caracterizar la actividad matemática de los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas es el *control*. Esta categoría de comportamiento tiene relación con la manera en que los estudiantes usan la información a su disposición y se refiere a las decisiones globales que toman con vistas a implementar los recursos (conocimiento de hechos y procedimientos relativos al contenido de probabilidad) y los heurísticos. Estos comportamientos de control incluyen hacer planes, seleccionar objetivos y subobjetivos, verificar y evaluar las soluciones tal como desarrollan el problema, y revisar o abandonar los planes iniciados cuando las evaluaciones indican que eso es lo que debe hacerse. Por último, el *sistema de creencias* de cada individuo establece el entorno dentro del cual operan los recursos, los heurísticos y el control. El sistema de creencias se refiere al conjunto de determinantes del comportamiento individual, es decir, a la perspectiva con la que se abordan las matemáticas y las tareas matemáticas.

En el contexto de la resolución de problemas como una actividad matemática, la investigación necesita focalizarse en las interpretaciones, representaciones y reflexiones de los estudiantes, así como en los cálculos que efectúan. Es decir, es imprescindible estudiar los procesos de razonamiento que emplean, las habilidades que desarrollan y las reglas y procedimientos que ellos aprenden a ejecutar. Se trata de dar una visión de la resolución de problemas y el aprendizaje desarrollado a partir de la interpretación matemática de una situación planteada (Lesh y Zawojewski, 2007).

Razonamiento matemático, razonamiento superficial

No siempre los argumentos que muestran los estudiantes cuando resuelven problemas son los esperados. Lithner (2000) examinó el razonamiento matemático de estudiantes universitarios de primer año en tareas de resolución de problemas con la única ayuda de una calculadora gráfica, es decir, en una situación similar a la de los exámenes. Los resultados obtenidos señalan que las estrategias más utilizadas por los estudiantes fueron las relacionadas con lo que les es familiar y que sólo recuerdan de manera superficial los contenidos matemáticos implicados en los problemas propuestos (Lithner, 2004). Lithner argumenta que resolver una tarea matemática puede ser vista como resolver un conjunto de subtareas de diferentes características. Lithner (2004) utiliza el término *razonamiento* para significar la línea del pensamiento, la manera de pensar adoptada para producir aseveraciones y alcanzar conclusiones. Desde esta perspectiva, la *argumentación* implícita o explícita a la hora de elegir e implementar la estrategia que se va a seguir es la parte del razonamiento con la que pretende convencerse a uno mismo o a los demás de que el razonamiento es apropiado. Lithner (2004) clasifica el razonamiento en *matemático* y *superficial*. Un razonamiento *es plausible o matemático* cuando la argumentación:

- se funda en propiedades matemáticas de los elementos que aparecen en el razonamiento y
- se tiene intención de guiar hacia lo que probablemente es la verdad, sin que sea necesariamente correcto o completo.

Pero, según Lithner, los estudiantes no suelen desarrollar estrategias elaboradas relacionadas con los conceptos implicados en el problema que pretenden resolver, más bien utilizan un razonamiento superficial basado en experiencias previas y que los lleva a repetir, de este modo, algoritmos enseñados o que ya usaron alguna vez con la intención igualmente de llegar a la solución del problema. Elegir una estrategia y llevarla a cabo llega a ser una acción familiar para el estudiante.

Demanda cognitiva

Smith y Stein (1998) examinan las tareas matemáticas desde el punto de vista de su *demanda cognitiva*, que entienden como la clase o nivel de pensamiento que la tarea exige a los estudiantes para implicarse y resolverla con éxito. Los autores establecen cuatro categorías de demanda cognitiva:

- Tareas de memorización
  - Implican reproducir fórmulas, reglas, definiciones.
  - No pueden resolverse usando procedimientos porque éstos no existen por la naturaleza de la tarea.
  - Hay poca ambigüedad sobre lo que debe ser hecho y cómo hay que hacerlo.
  - No hay conexión con los conceptos.

- Tareas de procedimiento sin conexión
  - Son algorítmicas. El uso de un procedimiento es evidente.
  - Existe poca ambigüedad sobre qué se necesita hacer y cómo hacerlo.
  - Pretenden producir respuestas correctas más que desarrollar comprensión.
  - Tampoco conectan con los conceptos o significados implicados.
- Tareas de procedimiento con conexión
  - Se utilizan procedimientos para aumentar la comprensión de los conceptos.
  - Es necesario relacionar distintas representaciones de los conceptos.
  - Requieren algún grado de esfuerzo cognitivo. Los estudiantes necesitan involucrarse con las ideas conceptuales implícitas en los procedimientos para resolver las tareas con éxito.
- Producir matemáticas
  - Requiere implícita o explícitamente un pensamiento no algorítmico y complejo.
  - Exige comprender los conceptos, los procedimientos y las relaciones matemáticas.
  - Requiere que los estudiantes tengan acceso a conocimiento relevante y hagan un uso apropiado de éste en la resolución de la tarea.
  - Ha de ser analizada atentamente.
  - Requiere un considerable esfuerzo cognitivo.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

PARTICIPANTES

Los participantes en este estudio fueron 156 estudiantes de 2º curso de Ciencias Empresariales que cursaban de forma presencial la asignatura de Estadística II (Introducción al Cálculo de Probabilidades). Los alumnos participaron de manera voluntaria y se organizaron en grupos de entre dos y cuatro estudiantes elegidos por ellos mismos. Los datos proceden de una "práctica de asignatura" realizada por veinte de los grupos de estudiantes. Las "prácticas" se propusieron a través del Campus Virtual de la Universidad y fueron recogidas también mediante esta aplicación. El Campus Virtual es un servicio de apoyo a la docencia y a la gestión académica y administrativa dirigido a toda la comunidad universitaria, el cual ayuda a superar las limitaciones espacio-temporales de las relaciones presenciales y puede influir de manera positiva en la calidad de la docencia, permitiendo la comunicación entre el profesorado y el alumnado. Los estudiantes pueden enviar el trabajo realizado mediante archivos adjuntos, de modo que se conserva toda la información recibida y ésta puede utilizarse convenientemente para su procesamiento.

Instrumento de recogida de datos

Los estudiantes realizaron cuatro tareas organizadas en dos "prácticas". Las tareas hacen referencia a la resolución de problemas, al planteamiento de problemas o a ambas cosas a la vez. Estas tareas estaban dirigidas a que los estudiantes aplicaran sus conocimientos y generaran destrezas y estrategias de pensamiento adecuadas a las situaciones planteadas. La enseñanza de los contenidos probabilísticos a los que se refirieron las prácticas propuestas a los estudiantes se realizó, previamente a éstas, durante cuatro sesiones de teoría de cien minutos cada una, impartidas por un mismo profesor, y cinco de práctica de resolución de problemas, de cincuenta minutos cada una, impartidas por distintos profesores. Los estudiantes no recibieron enseñanza relativa al planteamiento de problemas. Los contenidos estaban relacionados con la noción de experimento aleatorio, espacio muestral y sucesos; concepto e interpretaciones de la probabilidad; definición axiomática y consecuencias de los axiomas; noción de espacio muestral finito y regla de Laplace; probabilidad condicionada; independencia estocástica y teorema de la multiplicidad y, finalmente, el teorema de la probabilidad total y el de Bayes.

Los estudiantes tuvieron un plazo de una semana para la discusión y resolución de cada una de las prácticas. Este artículo se centra en el análisis de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes para resolver la práctica 1 (cuadro 1).

Diseño y características de las tareas

Desde una perspectiva social del aprendizaje, estamos interesados en averiguar cómo podemos promover la construcción compartida del conocimiento de los estudiantes. Un factor que puede contribuir a generar procesos de construcción

Cuadro 1 "Práctica 1" para estudiantes universitarios de Ciencias Empresariales en el ámbito de "Introducción al cálculo de probabilidades"

Tarea 1. Si A y B son dos sucesos pertenecientes al conjunto de sucesos de un determinado espacio muestral, con probabilidades, en ambos casos, distintas de cero, analiza cada una de las siguientes afirmaciones y razona si son ciertas o no: *a)* Si A y B son independientes, entonces A y B son incompatibles. *b)* Si A y B son compatibles, entonces A y B son independientes. *c)* Si A está incluido en B, entonces A y B son dependientes. Cuando sea pertinente, utiliza el experimento que consiste en "lanzar un dado" para mostrar un contraejemplo.
Tarea 2. Enuncia un problema donde aparezcan, entre otros, sucesos que tengan que ver con "visitar el museo MARQ" y "visitar el museo MUA". Para la resolución del problema debe ser necesario utilizar la diferencia de sucesos, alguna de las leyes de Morgan, la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes. Justifica que el problema propuesto reúna las condiciones pedidas.

del conocimiento compartido es el uso de tareas relativamente nuevas para los estudiantes, como es el planteamiento de problemas. La práctica 1, que es el foco de este estudio, estaba formada por dos tareas. La primera tenía como objetivo estudiar cómo conocían y usaban los estudiantes los conceptos de independencia-dependencia de sucesos, incompatibilidad-compatibilidad de sucesos, inclusión de sucesos y probabilidad condicionada. La segunda tarea tenía como objetivo obtener información sobre cómo plantean problemas los estudiantes, en concreto, tratamos que los estudiantes plantearan un problema a partir de dos sucesos dados, dando una interpretación probabilística a algunas de las operaciones con sucesos que se suelen utilizar en los problemas de probabilidad.

Procedimiento de análisis

Para realizar el análisis de las producciones de los estudiantes, usamos la idea de *recursos* y *heurísticos* (Schoenfeld, 1985, 1992) y el *tipo de razonamiento –matemático o superficial* (Lithner, 2004)–. Para la tarea 2, relativa al "planteamiento de problemas", consideramos el nivel de exigencia cognitiva que se requiere para resolver la tarea, *demanda de nivel bajo o alto* (Smith y Stein, 1998).

La demanda cognitiva de los problemas que los estudiantes llegan a proponer se puede considerar una manera de "triangular" las inferencias sobre las características de la actividad matemática generada cuando se resuelven los problemas de probabilidad de la tarea 1 y caracterizada a través del uso de los recursos, heurísticos y niveles de razonamiento matemático.

El análisis, en lo referente a esta práctica, se realizó sobre un total de cuarenta protocolos que corresponden a las soluciones de cada una de las dos tareas aportadas por los veinte grupos de estudiantes. Todos los protocolos se conservan en archivos informatizados que enviaron los alumnos. Cada resolución fue identificada indicando el número de la tarea y el número del grupo. Así la resolución de la tarea 1 del grupo 12 fue denotada (T1, G12).

Para comenzar el análisis, se realizó una primera fase, en la que se llevó a cabo un estudio descriptivo de las respuestas de los grupos de estudiantes para identificar los recursos y heurísticos utilizados en ambas tareas. En una segunda fase, los protocolos fueron analizados para identificar evidencias del tipo de razonamiento realizado en las tareas de resolución de problemas (tarea 1) y sobre el nivel de demanda cognitiva empleado en las tareas de planteamiento de problemas (tarea 2). Por último, se hizo una síntesis de las características de las respuestas aportadas por los grupos de estudiantes a cada tarea considerando los recursos y heurísticos, el nivel de razonamiento matemático y la demanda cognitiva del problema planteado.

Para identificar las ideas y nociones probabilísticas usadas por los estudiantes, se leyó detenidamente la resolución de cada tarea. Además, se intentó identificar cómo relacionaban los estudiantes las ideas y procedimientos usados. Para organizar los resultados de los análisis, utilizamos tablas de doble entrada (cuadro 2).

Una vez construidas las tablas con las dos columnas en las que se asignaba a cada unidad de análisis el tipo de recurso o heurístico empleado para cada tarea y grupo de estudiantes, así como el tipo de razonamiento y el nivel de demanda de la tarea, se realizó un estudio conjunto de toda esta información para identificar las características que parecían mostrar la manera en que los estudiantes resolvían y planteaban los problemas. Estas características globales se generaron teniendo en cuenta las referencias obtenidas en la primera fase del análisis y cuya descripción constituye la sección de resultados siguiente.

Cuadro 2 Ejemplo de organización de la información procedente *de las dos primeras fases de análisis de la tarea 1, resolución de problemas (G3)*

Unidades de información	Recursos, *heurísticos y razonamiento*
Suceso asociado a un experimento aleatorio = cualquier acontecimiento que se puede producir en la realización del experimento. Sucesos compatibles = cuando pueden realizarse simultáneamente los sucesos A y B (tienen que tener elementos en común). Sucesos independientes = $A, B \subseteq \Omega$ *son independientes si* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, *en este caso, se cumple* $P(A \mid B) = P(A)$ *si* $P(B) > 0$ *y* $P(B \mid A) = P(B)$ si $P(A) > 0$. a) Si A y B son independientes, entonces A y B son incompatibles	Definen antes los sucesos que aparecen en la tarea: Sucesos compatibles (X1) y (X2) Sucesos independientes (D2) y (D3)
Falso. Si A y B son independientes y $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, A y B serán necesariamente compatibles, ya que si se diera el caso de que no fueran compatibles, $P(A \cap B) = \varnothing$, nunca podría cumplirse que $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, ya que siendo $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$ nunca $P(A) \cdot P(B) = 0$	Utilizan la caracterización de sucesos independientes. (D3) Evidencian la incompatibilidad (X3) Confunden el suceso imposible, $\varnothing$, con la probabilidad 0. Utilizan todas las condiciones del problema.
b) Si A y B son compatibles, entonces A y B son independientes Falso. Si A y B son compatibles, $P(A \cap B) = \varnothing$,	*Usan y relacionan los conceptos y propiedades adecuadas. Razonamiento matemático.*
no necesariamente A y B han de ser independientes. Por ejemplo: ε = "lanzar un dado" A = "obtener un número par" $P(A) = \frac{1}{2}$ B = "obtener menos de cuatro" $P(B) = \frac{1}{2}$	Utilizan el signo "=" tanto en lenguaje natural escrito como en relaciones matemáticas. *Utilizan un ejemplo como contraejemplo.* *Razonamiento superficial. Al resolver el problema sólo con el ejemplo, lo hacen de manera incompleta.*

Cuadro 2 Ejemplo de organización de la información procedente *de las dos primeras fases de análisis de la tarea 1, resolución de problemas (G3) (conclusión)*

Unidades de información	Recursos, *heurísticos y razonamiento*
A y *B* son compatibles $\left(A\cap B\right)=\left\{2\right\}\rightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{6}$ *A* y *B* son dependientes ya que $P\left(A\cap B\right)\neq P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$ c) Si *A* está incluido en *B*, entonces *A* y *B* son dependientes.	
Verdadero. Si $A\subseteq B$, entonces, cada vez que ocurre *A* también ocurre el suceso *B*, y siendo $P\left(A\right)>0$, entonces: • $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)$ • $P\left(B\mid A\right)=\frac{P\left(A\right)}{P\left(A\right)}=1$	Como antes, utilizan la caracterización de independencia. Caracterizan la inclusión a partir de la verificación de sucesos (I1) Expresan una consecuencia de la inclusión de sucesos (I3)
Entonces $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\mid A\right)$, o lo que es lo mismo, $P\left(A\right)=P\left(A\right)$, es decir que si el suceso *A* está incluido en el suceso *B*, entonces los sucesos *A* y *B* serán siempre dependientes. O visto desde otro punto de vista: $P\left(A\cap B\right)\neq P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$, ya que siempre $P\left(A\right)\neq 1\cdot P\left(B\right)$, debido a que $P\left(B\right)>0$, $P\left(A\right)>0$ y $P\left(A\right)\neq P\left(B\right)$.	Utilizan la ley del producto (C3) Utilizan la caracterización de sucesos independientes (D3) *Resuelven teniendo en cuenta el significado de los conceptos.* *Razonamiento matemático.* Identificación de los conceptos: *Ponen en juego la probabilidad condicionada.* *Utilizan todas las condiciones del problema.* *Resuelven el problema mediante un razonamiento a veces matemático, otras superficial y sólo utilizan el ejemplo como contraejemplo.* *Aplican las caracterizaciones fundamentales.*

Cuadro 3 *Ejemplo de organización de la información procedente de las dos primeras fases de análisis de la tarea 2, planteamiento de problemas (G3)*

Unidades de información	Recursos, *heurísticos y nivel de demanda*
El pasado mes de octubre, 25% de los jubilados de la Pensión Manolita de la Ciudad de Alicante visitaron el Museo Arqueológico de Alicante, 15% visitaron el MUA y 10% ambos museos.	Datos iniciales: *$P(M) = P(A) = P$ (visitar el MARQ) $P(U) = P(E) = P$ (visitar el MUA) $P(M \cap U) = P$ (visitar los dos museos)
a) Si se elige un jubilado al azar ¿cuál es la probabilidad de que haya visitado el MARQ y en cambio no haya visitado el MUA? DIFERENCIA	
$A =$ "visita el MARQ" $P(A) = 25\%$	Enunciado adecuado de una diferencia de sucesos.
$E =$ "visita el MUA" $P(E) = 15\%$	
$P(A \cap E) = 10\%$	Plantean la diferencia de sucesos con $M \cap \bar{U}(A \cap \bar{E})$ (D1)
$P(A \cap \bar{E}) = P(\bar{E} \mid A) \cdot P(A)$	
$P(E \mid A) + P(\bar{E} \mid A) = 1$	Ponen de manifiesto el concepto de suceso contrario (SC)
$P(\bar{E} \mid A) = 1 - P(E \mid A)$	Usan la probabilidad condicionada (C2)
$P(\bar{E} \mid A) = 1 - \left(\dfrac{P(A \cap E)}{P(A)}\right)$	*Utilizan la ley de las probabilidades compuestas, la probabilidad del suceso contrario condicionado a otro suceso y hacen un uso adecuado de la probabilidad condicionada.*
$P(\bar{E} \mid A) = 1 - \left(\dfrac{0.1}{0.25}\right)$	
$P(\bar{E} \mid A) = 1 - 0.4$	*Utilizan caminos que conectan con distintos conceptos. Nivel de demanda alto.*
$P(\bar{E} \mid A) = 0.6$	
$P(A \cap \bar{E}) = 0.6 \cdot 0.25 = 0.15$	

* Nota: Aunque los estudiantes utilicen otros símbolos, por coherencia en el análisis se utilizan siempre para los sucesos iniciales las letras U y M: U: "visitar el museo MUA" (museo de la Universidad) y M: "visitar el museo MARQ".

Cuadro 3 *Ejemplo de organización de la información procedente de las dos primeras fases de análisis de la tarea 2, planteamiento de problemas (G3) (continuación)*

Unidades de información	Recursos, *heurísticos y nivel de demanda*
b) si se elige un jubilado al azar ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado ni el MARQ ni el MUA? MORGAN $\overline{A \cup E} = \overline{A} \cap \overline{E}$	Conocen y utilizan una de las leyes de De Morgan, tanto en el planteamiento, correcto, como en la resolución que hacen. (LM) *Usan un pequeño esquema.*
$P\left(\overline{A \cup E}\right) = 1 - P\left(A \cup E\right)$ $= 1 - \left(P\left(A\right) + P\left(E\right) - P\left(A \cap E\right)\right)$ $= 1 - \left(0.25 + 0.15 - 0.10\right)$ $= 0.70$	*La tarea exige comprender los conceptos y las relaciones matemáticas. Nivel de demanda cognitiva alto.*
$P\left(\overline{A} \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{A} \mid \overline{E}\right) \cdot P\left(\overline{E}\right)$	
$P\left(\overline{A} \mid \overline{E}\right) + P\left(A \mid \overline{E}\right) = 1$ $P\left(\overline{A} \mid \overline{E}\right) = 1 - P\left(A \mid \overline{E}\right)$ $P\left(\overline{A} \mid \overline{E}\right) = 1 - \left(\frac{P\left(A \cap \overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)}\right)$ $P\left(\overline{A} \mid \overline{E}\right) = 1 - \left(\frac{0.15}{0.85}\right)$ $P\left(\overline{A} \mid \overline{E}\right) = 0.8235$ $P\left(\overline{A} \cap \overline{E}\right) = 0.8235 \cdot 0.85$ $P\left(\overline{A} \cap \overline{E}\right) = 0.70$	Relacionan bien las propiedades y operan de manera adecuada.

Cuadro 3 *Ejemplo de organización de la información procedente de las dos primeras fases de análisis de la tarea 2, planteamiento de problemas (G3) (conclusión)*

Unidades de información	Recursos, *heurísticos y nivel de demanda*
c) Si se elige un jubilado al azar ¿cuál es la probabilidad de que, habiendo visitado el MARQ, también haya visitado el MUA? P. CONDICIONADA	
$P\left(\frac{E}{A}\right)=\frac{P(A\cap E)}{P(A)}=$ $\frac{0.10}{0.15}=0.67$	En el planteamiento involucran la probabilidad condicionada (C2)
d) En la Pensión Manolita, 60% son mujeres y 40%, caballeros. Y 10% de los caballeros y 15% de las mujeres visitaron el MARQ. Si se elige al azar un jubilado que ha visitado el MARQ, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?	*Reproduce la definición. Nivel de demanda bajo.*
TEOREMA DE BAYES	Plantean una probabilidad *a posteriori*.
MARQ $P(A)=10\%$ Caballero $P(V)=40\%$ Señora $P(M)=60\%$ MARQ $P(A)=15\%$	*El enunciado (planteamiento) es elaborado y requiere cierto grado de esfuerzo cognitivo; exige tener en cuenta las condiciones de las hipótesis del teorema y, aunque la resolución reproduce la fórmula del teorema, consideramos que se ha utilizado un nivel de demanda alto.*
$P(V/A)=$ $=\frac{P(V)\cdot P(A/V)}{P(V)\cdot P(A/V)+P(M)\cdot P(A/M)}$ $=\frac{0.4\cdot 0.1}{0.4\cdot 0.1+0.6\cdot 0.15}=30.77\%$	Utilizan la fórmula del teorema de Bayes (TB) *En todos los apartados los enunciados son claros y el lenguaje natural y el matemático son adecuados. Todos los planteamientos tienen solución.* *Notación matemática.*

RESULTADOS

Características de la actividad matemática

Resolver y plantear problemas de probabilidad se han considerado dos contextos en los que se genera una determinada actividad matemática. Las características de la actividad matemática identificadas vienen definidas por la manera en que los estudiantes trataron en los dos contextos los significados de los conceptos implicados y el modo como utilizaron determinados heurísticos. De manera específica, en el contexto de la resolución de problemas, los tipos de razonamiento identificados aportaron información sobre la comprensión de los conceptos y, en el contexto del planteamiento de problemas, la demanda cognitiva de los planteados permitió completar la descripción de las características de la actividad matemática de los estudiantes. El análisis de la realización de estas tareas permitió identificar las características siguientes:

- Los estudiantes utilizan *la formulación de los conceptos y sus caracterizaciones fundamentales antes que los significados intrínsecos de dichos conceptos,* como dependencia/independencia de sucesos, compatibilidad/incompatibilidad de sucesos, y tienen dificultades para caracterizar la inclusión de sucesos. Así por ejemplo en el siguiente protocolo:

Si A y B son independientes y $P(A)>0$ *y* $P(B)>0$*,* $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$*, A y B serán necesariamente compatibles, ya que, si se diera el caso de que no fueran compatibles,* $P(A\cap B)=0$*, y nunca podría cumplirse que* $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$*, ya que, al ser las probabilidades de A y de B mayores que 0, nunca* $P(A)\cdot P(B)=0$ (T1a, G3)

La *independencia* de sucesos, la mayoría de estudiantes la identifican con la probabilidad de la intersección igual al producto de probabilidades. Sólo cuatro grupos hacen constar que la realización de un suceso puede influir o no en la probabilidad de la realización de otro. En el caso de la *incompatibilidad* de sucesos, el recurso utilizado por los estudiantes es “no tienen elementos comunes” y “la probabilidad de la intersección de los sucesos es cero”.

- Tienen preferencia por determinados heurísticos: expresiones y algoritmos, uso de tablas, y utilizan el ejemplo propuesto para resolver la tarea.
- El *razonamiento superficial* predomina sobre el *razonamiento matemático* (Lithner, 2004), si bien encontramos grupos de estudiantes que hacen uso de *razonamiento matemático*, sobre todo al usar y relacionar bien las propiedades matemáticas de la independencia, incompatibilidad e inclusión de sucesos.

Por ejemplo, los estudiantes del grupo 1 utilizan razonamiento superficial al resolver el 2º apartado de la tarea 1, usando sólo el ejemplo, aquí como un contraejemplo. Lo hacen de manera correcta, pero en este caso, el razonamiento superficial los lleva a un resultado incompleto.

Se lanza un dado.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
A = "Sacar un número par"
$P(A) = \frac{3}{6}$
B = "Obtener el número dos"
$P(B) = \frac{1}{6}$
A y B son dependientes $\Rightarrow P(A|B) \neq P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)} = 1 \neq P(A)$$

A y B en este ejemplo son dos sucesos dependientes, por tanto, la afirmación de que A y B son independientes, sabiendo que son compatibles, es falsa.
(T1b, G1)

Sin embargo, el grupo G17 utiliza razonamiento matemático en la resolución de esta misma tarea. Usan correctamente la compatibilidad de los sucesos y la caracterización de independencia de sucesos y razonan teniendo en cuenta las hipótesis del problema:

> *Según esta afirmación, son compatibles, por tanto, pueden suceder a la vez y* $A \cap B = \emptyset$, *y la* $P(A \cap B)$ *es distinta de cero.*
>
> *Para que sean además independientes, se debe cumplir que* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, *y esto si* $P(A \cap B) \neq 0$ *se puede cumplir, porque* $P(A) \neq 0$ *y* $P(B) \neq 0$, *pero la igualdad no tiene por qué darse siempre. De tal manera que esta afirmación es FALSA, ya que los sucesos compatibles pueden ser independientes y dependientes.*
>
> (T1b, G17)

La demanda cognitiva de los problemas generados por los estudiantes

Los problemas de *nivel alto de demanda cognitiva* indican que los estudiantes tienen una comprensión "amplia" de los diferentes conceptos, recursos y heurísticos que utilizan y son capaces de establecer relaciones explícitas entre ellos. Puesto que el objetivo de nuestra investigación era caracterizar la actividad matemática generada en los contextos de resolución y planteamiento de problemas de probabilidad e inferir posibles relaciones, nos centramos en esta sección únicamente en los grupos de estudiantes que plantearon problemas con una alta demanda cognitiva. Los problemas generados por los estudiantes se han agrupado en tres categorías: problemas que requieren algún grado de esfuerzo cognitivo estableciendo relaciones explícitas entre los conceptos implicados, problemas que requieren la comprensión de los conceptos pero estableciendo sólo algunas relaciones entre los conceptos y, por último, problemas que únicamente refuerzan la comprensión de los conceptos sin claras evidencias de tener que establecer relaciones entre ellos.

Un ejemplo de problema que requiere algún grado de esfuerzo cognitivo y ha de ser analizado atentamente es el siguiente:

> *En la capital de nuestra provincia existen dos museos: el Museo Arqueológico (MARQ) y el Museo de la Universidad de Alicante (MUA). Los jóvenes que visitan el MARQ equivalen a 40%, mientras que los que visitan el MUA son 30% y 10% visita los dos. Se sabe que de los jóvenes que visitan alguno de estos museos, 70% son universitarios, y de los que no visitan dichos museos, 20%. Calcula la probabilidad de que un universitario elegido al azar vaya a algún museo. (T2, G12)*

En este problema los estudiantes plantean una situación no trivial al dar la información de los jóvenes que visitan *alguno* de los dos museos y utilizan de esta manera los sucesos $(M \cup U)$ y $(\overline{M \cup U})$ para formar un sistema completo de sucesos y poder aplicar el teorema de Bayes. Este problema requiere analizar bien el enunciado cuyo planteamiento es $P(M \cup U | Universitario)$. Los estudiantes que plantearon este tipo de problemas fueron, además, capaces de resolverlo.

El segundo grupo de problemas estuvo constituido por aquellos cuyo planteamiento exigía comprender los conceptos y algunas relaciones matemáticas. Un ejemplo de este tipo de problemas fue el siguiente:

De los turistas que visitan Alicante, 30% visita el MARQ, 20% visita el MUA y 15% visita ambos museos. Si se elige un turista aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguno de los dos museos? (LEY DE MORGAN):

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$$
$$= 1 - (0.2 + 0.3 - 0.15) = 0.65$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$
$$P(\bar{A} | \bar{B}) + P(A | \bar{B}) = 1$$
$$P(\bar{A} | \bar{B}) = 1 - \left(\frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \right)$$
$$P(\bar{A} | \bar{B}) = 1 - \left(\frac{0.5}{0.7} \right) = 0.928571$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.928571 \cdot 0.7 = 0.65 \qquad \text{(T2, G11)}$$

Para poner de manifiesto una de las leyes de Morgan, los estudiantes operan las dos expresiones, el complementario de la unión y la intersección de los complementarios de los sucesos, poniendo en juego también las probabilidades de sucesos contrarios, la probabilidad de la unión, la ley del producto y la probabilidad condicionada.

Por último, consideramos los problemas que refuerzan la comprensión de los conceptos implicados. En esta categoría, los problemas indican que los estudiantes se han centrado en describir una situación que pusiera de manera evidente un concepto de manera aislada, sin mostrar evidencias de la necesidad de establecer relaciones entre los conceptos. Un ejemplo de esta manera de proceder es el siguiente:

> *Probabilidad de que la familia Sánchez visite, solamente, uno de los dos museos. En este caso, buscamos la probabilidad de que vaya, o bien al museo MUA, verificando la primera hipótesis y no cumpliendo la segunda, o viceversa. Para resolverlo utilizaremos la diferencia de sucesos:*

$$P\left[\left(A_1 \cap \overline{A_2}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2\right)\right] = P\left(A_1 \cap \overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right) = 0.1 + 0.5 = 0.6$$

$$P\left(A_1 \cap \overline{A_2}\right) = P\left(A_1\right) - P\left(A_1 \cap A_2\right) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

$$P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right) = P\left(A_2\right) - P\left(A_1 \cap A_2\right) = 0.7 - 0.2 = 0.5$$

(T2, G20)

En este ejemplo, los estudiantes ponen en evidencia la diferencia de sucesos, pero al no hacer referencia sólo al MARQ o sólo al MUA sino a cualquiera de los dos museos, hacen intervenir dos veces la probabilidad de un suceso intersección, el contrario del otro y la unión de los dos sucesos así formados, con lo que el concepto "diferencia de sucesos" sale reforzado.

Estas características de los problemas están relacionadas, ya que cuando se utilizan de manera correcta las distintas relaciones matemáticas implicadas en el problema propuesto, se usan también distintos caminos que conectan con los conceptos y, de este modo, aumenta la comprensión que se tiene de dichos conceptos. Por ello, hemos considerado que la demanda cognitiva de las tareas corresponde a un nivel alto.

Sobre la relación entre el planteamiento y la resolución de problemas

Una vez identificadas las características de la actividad matemática en la resolución y planteamiento de problemas, tratamos de inferir la posible existencia de relaciones. Para indagar sobre la posible relación entre el planteamiento y la

Cuadro 4 Características de la actividad matemática en los grupos con nivel alto de demanda en la tarea planteada

Grupo 3	Grupo 11	Grupo 12	Grupo 16	Grupo 20
• Caracterizan los conceptos. Usan formulación. • Utilizan el ejemplo como contraejemplo. • Utilización adecuada del lenguaje matemático y natural. • *Resuelven el problema mediante un razonamiento a veces matemático, otras, superficial.*	• Apenas utilizan formulación. • Expresan el significado de algunos conceptos. • No utilizan el ejemplo. • Prácticamente no justifican nada. • Escasa notación. • *Razonamiento superficial.*	• Caracterizan los conceptos. Usan formulación. • Usan también los significados de los conceptos. • Utilizan el ejemplo como contraejemplo y como comprobación. • Lenguaje matemático y natural adecuado. Notación correcta. • *Razonamiento superficial.*	• Caracterizan los conceptos. Usan formulación. • Utilizan el ejemplo como contraejemplo. • Notación adecuada. • *Razonamiento matemático.*	• Caracterizan los conceptos. Usan formulación. • Utilizan el ejemplo como comprobación. • Usan un gráfico. • Notación adecuada. • *Razonamiento superficial.*

resolución de problemas, consideramos en primer lugar los resultados relativos a los cinco *grupos de estudiantes que plantean problemas con un nivel alto de demanda cognitiva*. En el cuadro 4 mostramos, de manera resumida, cómo han resuelto estos grupos la tarea 1 de resolución de problemas:

Observamos que el tipo de razonamiento matemático que estos estudiantes han utilizado al resolver el problema ha sido dispar; de hecho, dos de ellos, los grupos G3 y G16, han resuelto el problema con razonamiento matemático, ya que en sus argumentos emplean y relacionan bien las propiedades matemáticas pertinentes, con un uso apropiado del ejemplo. Los otros tres grupos utilizan sólo razonamiento superficial, basando fundamentalmente la resolución del problema en la utilización del ejemplo para comprobar los resultados sin justificación alguna.

A continuación (cuadro 5), consideramos cinco grupos que han hecho un planteamiento del problema con un nivel de demanda bajo.

Cuadro 5 Características de la actividad matemática en los grupos con nivel bajo de demanda en la tarea planteada

Grupo 5	Grupo 8	Grupo 14	Grupo 17	Grupo 18
• No ponen de manifiesto los conceptos. • Utilizan el ejemplo para resolver el problema. • No usan una adecuada notación. • *Razonamiento superficial.*	• No ponen de manifiesto algunos conceptos. • Usan formulación, pero escasa. • No utilizan el ejemplo. • Escasa notación. • *Razonamiento superficial.*	• Usan las caracterizaciones de algunos conceptos, pero hay conceptos que no ponen en evidencia. • Utilizan el ejemplo para resolver el problema. • No justifican los resultados. • Escasa notación. • *Razonamiento superficial.*	• Caracterizan los conceptos. Usan formulación. • No utilizan el ejemplo. • Utilizan un gráfico. • Usan notación adecuada. • Razonamiento matemático.	• Caracterizan los conceptos. Usan formulación. • Utilizan el ejemplo como contraejemplo y directamente para resolver el problema. • Notación correcta. • *Razonamiento a veces matemático, otras, superficial.*

Observamos que estos cinco grupos que han planteado problemas con un nivel de demanda bajo tienen también manifestaciones distintas en la resolución de los problemas. Los grupos G5, G8 y G14 mantienen un nivel bajo en las tareas de resolución, mientras que los grupos G17 y G18 caracterizan bien los conceptos, e incluso el grupo G17 usa razonamiento de tipo matemático en la resolución del problema de la tarea 1.

Esperábamos observar en estos grupos que, al plantear con un nivel de demanda inferior al de los grupos anteriores, las características de su actividad matemática fuera menos rica y así observamos que tres grupos no pusieron de manifiesto algún concepto, los estudiantes no lograron explicarlos a partir de los sucesos que ellos expresaron. Pero nos encontramos, como en los casos anteriores, con dos grupos que usaron razonamiento matemático y relacionaron bien las propiedades matemáticas apropiadas con un uso correcto del ejemplo como un contraejemplo, con una justificación válida de sus argumentos.

Del análisis comparativo de las características de la actividad matemática de los grupos de estudiantes que han planteado problemas con un nivel alto de demanda cognitiva y los que lo han hecho con un nivel bajo de demanda, entendemos que no podemos concluir que existan evidencias de una relación entre el tipo de planteamiento efectuado por los estudiantes y la manera como resuelven en grupo los problemas con contenidos de probabilidad.

CONCLUSIONES

Las tareas propuestas han servido para caracterizar la actividad matemática de los estudiantes universitarios de estudios de Ciencias Empresariales en dos contextos específicos: la resolución y el planteamiento de problemas de probabilidad cuando se usan contenidos como la independencia, incompatibilidad e inclusión de sucesos, diferencia de sucesos, leyes de Morgan, probabilidad condicionada, regla del producto y teorema de Bayes.

No se ha encontrado una relación entre los buenos resolutores de problemas y los que mejor realizan los planteamientos. Silver y Cai (1996), en cambio, observan en su investigación que los estudiantes que mejor resuelven problemas plantean problemas más complejos que los que podemos entender como "peores" resolutores de problemas. También Cai (1998) encuentra de nuevo una relación directa entre la resolución y el planteamiento de problemas. Crespo (2003), por su parte, determina en su trabajo que los buenos resolutores de problemas pueden no ser los mejores en plantear problemas. Estos resultados sugieren que la relación entre la resolución y el planteamiento de problemas no está clara y puede seguir siendo una línea de investigación futura de interés.

La enseñanza de la probabilidad no es fácil en el bachillerato y sigue siendo difícil en la universidad. Por tanto, es necesario promover su estudio en los diferentes niveles educativos, usando tareas tanto de resolución como de planteamiento de problemas de probabilidad donde se pongan en juego contenidos como los tratados en este trabajo. Además, como indican Batanero y Sánchez (2005), hay necesidad de reforzar el estudio de la probabilidad condicionada, aunque capacitar en ésta y en otras nociones no puede reducirse a enseñar estructuras conceptuales, ya que se deben desarrollar procesos de razonamiento que generen intuiciones correctas.

Estamos convencidos de lo útiles que pueden resultar nuevas y más detalladas investigaciones sobre la resolución de problemas relativos al teorema de Bayes por estudiantes de los primeros cursos de universidad; y del interés de complementar y mejorar esta información con la aportación derivada de investigar cómo plantean estos problemas. Como Díaz y De la Fuente (2006) señalan:

> *El teorema de Bayes se presenta como un objeto complejo cuya comprensión involucra toda una serie de conceptos y propiedades previas como los de probabilidad simple, compuesta y condicional, partición y complementario, axioma de la unión y regla del producto* (p. 90).

Pocas veces un único teorema aporta tantas posibilidades de análisis. Por ello, las investigaciones deben proseguir con problemas tanto de formato frecuencial como probabilístico y con muestras mayores que posibiliten una mejor toma de decisiones. De los resultados obtenidos en la investigación se desprende la necesidad de usar el planteamiento de problemas como contexto para promover la actividad matemática y desarrollar líneas de investigación en este sentido. Mientras que resolver problemas se identifica fácilmente como un aspecto importante del aprendizaje de las matemáticas, plantear problemas ha sido un aspecto olvidado de la investigación matemática. Encontrar situaciones a las que se refieran los problemas, que sean originales y complejas a la vez, corresponde a una matemática más real que la que se presenta con las tareas de resolución de problemas más tradicionales (Bonotto, 2009). Proporcionar un balance adecuado entre tareas de planteamiento y de resolución de problemas produce un efecto positivo en la enseñanza y promueve el uso de estrategias apropiadas en los distintos niveles de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en particular, relacionadas con el contenido de probabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2005), "Significados de la probabilidad en la educación secundaria", *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* vol. 8, núm. 3, pp. 247-263.

Batanero, C., M. Henry y B. Parzysz, (2005), "The nature of chance and probability", en G. A. Jones (ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning,* Nueva York, Springer, pp. 15-37.

Batanero, C. y E. Sánchez, (2005), "What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability?", en G. A. Jones (ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning,* Nueva York, Springer, pp. 241-266.

Bonotto, C. (2009), "Artifacts: Influencing practice and supporting problem posing in the mathematics classrooms", en M. Tzekaki *et al.* (eds.), *Proceedings*

of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tesalónica, Grecia, vol. 2, pp. 193-200.
Cai, J. (1998), "An investigation of US and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving", *Mathematics Education Research Journal,* vol. 10, núm. 1, pp. 37-50.
——— (2003), "Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 34, núm. 5, pp. 719-737.
Cai J. y S. Hwang (2002), "Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing", *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 21, pp. 401-421.
Castro, E. (2008), "Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España", en R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (eds.), *Investigación en Educación Matemática,* Badajoz, SEIEM, pp. 113-140.
Crespo, S. (2003), "Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practises", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 52, pp. 243-270.
Díaz, C. (2003), "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. Implicaciones para la enseñanza de la Estadística", en *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa,* pp. 3611-3621.
Díaz, C. y C. Batanero (2008), "Students' biases in conditional probability reasoning. ICME", para ser presentado en *ICMI-11, TSG13: Research and development in the teaching and learning of probability,* Monterrey.
Díaz, C. e I. de la Fuente (2005), "Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística", *Épsilon,* vol. 59, pp. 245-260.
——— (2006), "Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes: un estudio exploratorio en estudiantes españoles de Psicología", *Educación Matemática,* vol. 18, núm. 2, pp. 75-94.
——— (2007), "Assessing psychology students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning", *International Electronic Journal of Mathematics Education,* vol. 2, núm. 2, consultado el 6 de junio de 2008 en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/5E3_DIAZ.pdf.
Díaz, C., J. J. Ortiz y J. Serrano (2007), "Dificultades de los estudiantes de Psicología en el cálculo de probabilidades inversas mediante el teorema de Bayes", *Facultad de Educación y Humanidades Campus de Melilla,* vol. 37, pp. 141-156.

Falk, R. (1986), "Conditional probabilities: insights and difficulties", en R. Davidson y J. Swift (eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, Victoria, International Statistical Institute, pp. 292-297.

Fischbein, E. y A. Gazit (1984), "Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?: An exploratory research study", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 15, pp. 1-24.

Gras, R. y A. Totohasina (1995), "Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 15, núm. 1, pp. 49-95.

Guisasola, J. y J. I. Barragués (2002), "Heurísticos y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 20, núm. 2, pp. 285-302.

Jones, G. A., C. W. Langrall y E. S. Money (2007), "Research in probability. Responding to classroom realities", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Information Age Publishing, pp. 909-955.

Jones, G. A. y C. A. Thornton (2005), "An overview of research into the teaching and learning of probability", en G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Nueva York, Springer, pp. 65-92.

Kilpatrick, J. (1987), "Problem formulating: where do good problems come from?", en A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdale, N. J., Lawrence Erlbaum, pp. 123-147.

Kontorovich, I. y B. Koichu (2009), "Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing", en M. Tzekaki *et al.* (eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tesalónica, Grecia, vol. 3, pp. 401-408.

Lesh, R. y J. S. Zawojewski (2007), "Problem solving and modeling", en F. Lester (ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Greenwich, CT, Information Age Publishing, pp. 763-802.

Lithner, J. (2000), "Mathematical reasoning in task solving", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 17, pp. 7-16.

——— (2004), "Mathematical reasoning in calculus textbook exercises", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 23, pp. 405-427.

Penalva, M. C. y J. A. Posadas (2009), "El planteamiento de problemas y la construcción del teorema de Bayes", *Revista de Enseñanza de las Ciencias*, vol. 27, núm. 3, pp. 331-342.

Pijls, M., R. Dekker y B. van Hout-Wolters (2007), "Reconstruction of a collaborative mathematical learning process", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 65, pp. 309-329.

Polya, G. (1970), *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas.

Posadas, J. A. (2008), "Estudio de la comprensión de contenidos de probabilidad de estudiantes universitarios", tesis doctoral inédita, Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, España.

Sánchez, E. (2002), "Teachers' beliefs about usefulness of simulation with the educational software fathom for developing probability concepts in statistics classroom", ICOTS-6, consultado el 6 de junio de 2008, en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/6e2_sanc.pdf.

Sánchez, E. y S. Inzunza (2006), "Meanings' construction about sampling distributions in a dynamic statistics environment", ICOTS-7, consultado el 6 de junio de 2008, en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/7C3_SANC.pdf.

Schoenfeld, A. H. (1985), *Mathematical problem solving*, Orlando, Academic Press.

——— (1992), "Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics", en D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Nueva York, Macmillan, pp. 334-370.

Serrano, L., C. Batanero, J. J. Ortiz y M. J. Cañizares (2005), "Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria", *Educación Matemática*, vol. 10, núm. 1, pp. 7-25.

Silver, E. A. (1994), "On mathematical problem posing", *For the Learning of Mathematics*, vol. 14, núm. 1, pp. 19-28.

Silver, E. A. y J. Cai (1996), "An analysis of arithmetic problem posing by middle school students", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, pp. 521-539.

Smith, M. S. y M. K. Stein (1998), "Selecting and creating mathematical task: From Research to Practice", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 3, núm. 5, pp. 344-350.

Stein, M. K. y M. S. Smith (1998), "Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice", *Mathematics Teaching in the Middle School*, vol. 3, núm. 4, pp. 268-275.

Stoyanova, E. (1998), "Problem posing in mathematics classrooms", en A. McIntosh y N. Ellerton (eds.), *Research in Mathematics Education: A Contemporary Perspective*, Cowan University, MASTEC, pp. 164-185.

Tversky, A. y D. Kahneman (1974), "Judgement under uncertainty: Heuristics and biases", *Science*, vol. 185, pp. 1124-1130.

DATOS DE LOS AUTORES

M. Carmen Penalva
Departamento de Innovación y Formación Didáctica,
Universidad de Alicante, Campus de San Vicente, España
carmina.penalva@ua.es

José Adolfo Posadas
Universidad de Alicante, España
posadas@merlin.fae.ua.es

Ana Isabel Roig
Universidad de Alicante, España
a.roig@ua.es