Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma *si-entonces*

Carmen Samper, Patricia Perry, Leonor Camargo, Óscar Molina y Armando Echeverry

Resumen: En este artículo presentamos algunos avances de un experimento de enseñanza, realizado en un curso universitario de geometría para profesores en formación con el objetivo de atender una problemática, que han informado varios investigadores, relacionada con la comprensión y el uso que los estudiantes dan a las proposiciones condicionales durante procesos de producción de conjeturas y justificaciones. En particular, nos centramos en el tipo de tareas diseñadas para un entorno de geometría dinámica que favorecen el proceso de comprensión de una proposición condicional como aquella que expresa una dependencia entre propiedades, a fin de propiciar la construcción del significado matemático de ésta. Analizamos las conjeturas que producen los alumnos como resultado de su interacción con la geometría dinámica.

Palabras clave: proposición condicional, geometría dinámica, actuaciones problemáticas de los estudiantes, tareas de aprendizaje, formación de profesores de matemáticas.

Dynamic geometry: Its contribution to understanding conditionals of the form *if-then*

Abstract: In this article we present some results of a teaching experiment carried out in a university geometry course for pre-service teachers, with the purpose of attending to the problematic performances, reported by various researchers, related to the comprehension and use students have of conditional propositions during conjecturing and justifying processes. Particularly, we focus on the type of tasks, designed for a dynamic geometry environment, that favour the process of understanding a conditional proposition as that which expresses dependency relations among properties, with the purpose of propitiating the construction of its mathematical meaning. We analyze student conjectures, product of their interaction with dynamic geometry.

Fecha de recepción: 31 de julio de 2010.

Keywords: conditional proposition, dynamic geometry, problematic student performances, learning tasks, mathematics teacher education.

INTRODUCCIÓN

Nuestro grupo de investigación ha asumido la tarea de estudiar la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el nivel universitario, en particular, la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Esto con miras a fundamentar los esfuerzos de diseño curricular de los cursos de geometría de nuestro plan de formación para que los estudiantes, futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria, desarrollen, por una parte, su capacidad de actuación en contextos relacionados con las matemáticas y, por otra, su capacidad para generar ambientes de aprendizaje de las matemáticas escolares.

En el curso de geometría plana del plan de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), se usa por lo regular la geometría dinámica con varios objetivos (Camargo, Samper y Perry, 2007); el principal es propiciar la participación de los estudiantes de manera pertinente y relevante en la construcción de un sistema teórico, con ideas que son fruto de la solución que ellos dan a situaciones especialmente diseñadas, ya que ni el profesor ni un libro de texto son fuente de la teoría que se desarrolla (Perry, Samper y Camargo, 2006; Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2008; Perry, Camargo, Samper, Molina y Echeverry, 2009).

Para poder formular conjeturas, determinar si las propuestas por otros estudiantes son aceptables, encontrar relaciones geométricas entre las partes de una figura que puedan usarse en una demostración y, en general, reconocer el papel fundamental que desempeñan las proposiciones de la forma *si-entonces* como estructura lógica subyacente en los enunciados matemáticos y como componente de esquemas de razonamiento válido propios de un discurso deductivo para la justificación matemática, es necesario que los estudiantes superen la interpretación que dan desde la lógica cotidiana a una condicional, lleguen a ésta desde la matemática y diferencien el estatus operatorio de cada parte de la proposición condicional en un proceso deductivo (Duval, 2007). Puesto que ese paso no es espontáneo ni sencillo, no es sorprendente que, en las producciones iniciales de los estudiantes, se manifieste comprensión limitada o distorsionada de la condicional y se den actuaciones problemáticas, es decir, acciones que se alejan del uso y la comprensión que la comunidad de discurso matemático tiene de este objeto matemático. Sin ser fuente exclusiva para percatarse de dicha comprensión deficiente y de las actuaciones problemáticas, la geometría dinámica constituye una fuente muy importante, gracias a su potencial para hacer ostensivo el contexto interno del estudiante (Mariotti, 2000). Los profesores debemos comprender las diferencias entre las maneras de argumentar matemática y cotidianamente, e identificar las dificultades que ese cambio genera en los estudiantes, a fin de poder gestionar ambientes que realmente favorezcan la argumentación matemática.

En este artículo presentamos primero un marco de referencia sobre la problemática de la comprensión y el uso de la condicional identificada por algunos investigadores, así como los acercamientos didácticos que algunos de ellos proponen. Luego, exponemos la problemática específica que nos motivó a planear y llevar a cabo el experimento de enseñanza que informamos en este artículo, identificando algunas actuaciones problemáticas de nuestros estudiantes frente al uso y la comprensión de la condicional cuando trabajan con geometría dinámica. A continuación, mencionamos el contexto del experimento y las hipótesis que pusimos en juego y damos ejemplos de tareas de aprendizaje que apoyan, por una parte, el proceso de entender la proposición condicional como expresión de una relación de dependencia y la práctica de usarla en razonamientos deductivos y, por la otra, el proceso de reconocer la diferencia del papel que representa cada proposición de la condicional. Por último, damos una visión general de los resultados encontrados.

MARCO DE REFERENCIA

La problemática asociada al uso y la comprensión de proposiciones condicionales ha sido objeto de estudio desde la didáctica de la matemática, aunque, al parecer, no de manera extensa. Investigadores como Duval (1991), Laudien (1999), Jones (2000), Hoyles y Küchemann (2002) y Durand-Guerrier (2003) señalan que la condicional es una noción compleja cuyo aprendizaje parece no darse *per se* con la maduración intelectual del sujeto o con su uso en la lógica cotidiana, también denominada lógica natural. Algunas investigaciones se han centrado en establecer las diferencias entre la condicional usada en la lógica natural y la condicional en matemáticas, mientras que otros han analizado el efecto de las experiencias escolares sobre el asunto.

De acuerdo con Duval (1991), aunque la lógica cotidiana hace uso de formas lingüísticas y conectivas proposicionales propias de la lógica matemática, la condicional, en el uso cotidiano, no se considera como un enunciado compuesto de dos proposiciones cuya formulación o uso exige tener la seguridad de que existen las condiciones suficientes, expresadas en el antecedente, para asegurar el consecuente como resultado necesario de ellas, aspecto propio de la demostración matemática. Es decir, para usar de manera adecuada un enunciado condicional no matemático no se requiere realizar operación alguna para verificar si se tienen las condiciones suficientes establecidas en el antecedente de la condicional para así poder concluir el consecuente. Según el investigador, la manera de operar en la argumentación cotidiana lleva a no discriminar el estatus operatorio –la función– de cada proposición involucrada en un paso de deducción, incluidas la premisa y la conclusión de una condicional. En ese sentido, el autor está en desacuerdo con suponer que la familiaridad de los estudiantes con la condicional en la lógica cotidiana sea un factor positivo para que éstos comprendan la condicional matemática y aprendan a usarla.

En consonancia con el problema mencionado por Duval (1991), Laudien (1999) encontró evidencia empírica para apoyar la tesis de que los estudiantes interpretan la condicional *si-entonces* con el significado de la bicondicional *si y sólo si*. Explicamos este asunto así: en el uso cotidiano, la condicional está compuesta por dos proposiciones que, tácita o explícitamente, se consideran verdaderas; esto lleva a que tanto la condicional como la recíproca de ésta se asuman como afirmaciones verdaderas. Por ejemplo, si un padre establece para su hijo la siguiente regla: "si sacas promedio por encima de 39, te regalo un teléfono celular", la interpretación que en general se asigna a este enunciado lleva a concluir que, si el papá le regaló un celular, el promedio del estudiante fue superior a 39 y, si el promedio no fue superior a 39, el papá no le regaló un celular. Es decir, se usan la condicional y su inversa (contraria) como equivalentes.

Esa idea limitada de la condicional es problemática a la hora de usarla en deducciones, pues conduce a esquemas de razonamiento no válidos que Laudien (1999) denomina *negación del antecedente* y *afirmación del consecuente*. El primero se refiere a la situación en que, ante la presentación de una condicional ($p \rightarrow q$) y la negación de su antecedente ($\sim p$), los estudiantes concluyen la negación del consecuente ($\sim q$), en lugar de reconocer que los datos dados no permiten decidir, desde la lógica matemática, si un objeto tiene la propiedad q cuando no tiene la propiedad p. Para seguir con el ejemplo, si el hijo saca promedio de 35, el esquema de razonamiento que obedece a interpretar como bicondicional la regla enunciada por el papá lleva a las personas a concluir que éste no le regalará un celular. Pero, si se analiza la situación desde la matemática, revisando la tabla de verdad de la condicional, habría que reconocer que es imposible determinar lo que hará el papá. En vista de la interpretación dada por los estudiantes, es difícil que ellos comprendan que, en la matemática, dadas una condicional y la negación de su antecedente, es igualmente posible concluir que el consecuente se da o no (la situación $p \rightarrow q$ verdadero y p falso se da tanto cuando q es verdadero como cuando es falso). El segundo esquema de razonamiento no válido da cuenta del caso en que, frente a una condicional ($p \rightarrow q$) y la afirmación de su consecuente (q), los estudiantes concluyen que p es verdadero, de nuevo desconociendo la imposibilidad de determinar si el antecedente se da o no. En el ejemplo, la interpretación de la regla establecida por el papá lleva a que los estudiantes afirmen que, puesto que el papá le regaló un celular a su hijo, el promedio de éste tuvo que haber sido superior a 39. De nuevo, si se trata de una condicional analizada según la tabla de verdad, es imposible saber si el antecedente es verdadero o no. En resumen, el razonamiento no válido, en ambos casos, surge porque en el imaginario de los estudiantes no existe la idea de que la combinación antecedente falso y consecuente verdadero determina una condicional verdadera desde el punto de vista matemático. Las respuestas de los estudiantes, producto de los esquemas de razonamiento no válidos, serían adecuadas para las preguntas hechas si se tuviera un enunciado bicondicional.

Hoyles y Küchemann (2002), en un estudio longitudinal que involucró a más de dos mil estudiantes de alto rendimiento escolar de escuelas de secundaria en Inglaterra, obtuvieron un resultado que va en la misma dirección que el hallazgo de Laudien (1999), al encontrar que una proporción considerable de estudiantes creía que la condicional dada y su recíproca daban el mismo mensaje. En busca de una explicación relacionada con el efecto de la enseñanza, y no sólo por la asociación con la lógica cotidiana, destacan que, en lo que concierne al desarrollo del razonamiento deductivo, las experiencias escolares de los estudiantes se reducen por lo general a la interpretación de la condicional lógica como una proposición hipotética cuyo enunciado es de la forma "Si p, q" y que, en general, se refiere al caso en el que el antecedente es verdadero. Deloustal-Jorrand (2002) denomina esta concepción de condicional como *concepción causal de la condicional* y menciona que tal interpretación induce a los estudiantes a centrarse en el carácter de temporalidad de la condicional y no en el efecto del valor de verdad de cada proposición p y q ni en el valor de verdad de la expresión condicional $p \rightarrow q$.

Como una estrategia para lograr que los estudiantes tengan una comprensión de la condicional más cercana a la de la lógica matemática, Durand-Guerrier (2003) propone hacer un acercamiento más pragmático a la indagación acerca del valor de verdad de proposiciones condicionales que el que comúnmente se hace en el aula, el cual se basa en buscar contraejemplos para invalidar una afirmación general. En lugar de ello, sugiere formular proposiciones abiertas que exijan buscar dominios en los que una afirmación es verdadera. Esta propuesta, en su opinión, es conveniente si se considera que aprender matemáticas tiene que ver con la exploración de objetos matemáticos para determinar sus propiedades con el propósito de construir una teoría. Así, se propicia el desarrollo del razonamiento plausible. Se puede aprovechar el caso en el que se quiere que el consecuente de una condicional sea verdadero para suscitar una investigación acerca del dominio en el que la condicional sería teorema. Por tanto, si en los cursos de matemáticas se aceptan proposiciones contingentes, aquellas para las cuales no puede decidirse su valor de verdad, se abre un panorama rico en posibilidades de análisis.

Otro intento para favorecer la comprensión de la condicional en el ámbito educativo tiene que ver con el uso de la geometría dinámica como una herramienta para llegar a procesos de deducción, gracias al potencial que brinda para visualizar representaciones de figuras geométricas, no sólo desde el punto de vista puramente perceptual, sino también por las posibles asociaciones que se pueden establecer entre propiedades que determinan el objeto representado. Jones (2000) sostiene que la geometría dinámica permite descubrir un conjunto de condiciones matemáticas suficientes que conducen a que necesariamente la figura sea del tipo esperado. Se juega con el concepto lógico de dependencia entre propiedades o relaciones, aspecto invaluable para comprender el estatus operatorio de cada proposición en una condicional y el reconocimiento de cómo operan éstas en una demostración. El contexto que hace significativas las tareas de formular conjeturas expresadas explícitamente como condicionales y construir una demostración es la permanencia de algunas de las características bajo el arrastre cuando la construcción realizada es robusta (Healy, 2000), hecho que favorece la identificación, dentro del universo de figuras que se visualizan, de cuáles propiedades geométricas son invariantes y cuáles no.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el curso *Elementos de Geometría* del plan de formación inicial de profesores de matemáticas, que sirvió de contexto a nuestra investigación, se usa por lo regular la geometría dinámica, lo que permite afirmar que, en el momento de realizar el experimento de enseñanza, los estudiantes ya han logrado un buen nivel de aprehensión operativa (Duval, 1998) del razonamiento visual que ponen en juego al resolver los problemas propuestos. Los estudiantes deben formular enunciados condicionales a manera de conjeturas y determinar si los propuestos por otros estudiantes son aceptables. En diferentes grupos de estudiantes que han tomado este curso de geometría, hemos podido evidenciar diversos tipos de actuaciones problemáticas relacionadas con la formulación de enunciados condicionales. En este artículo, nos concentramos en situaciones en las que los estudiantes deben proponer una condicional como conjetura a partir de la exploración realizada sobre una figura que han construido en un programa de geometría dinámica, según unas condiciones establecidas en el enunciado de la situación propuesta. Con frecuencia encontramos que, contrario a nuestras expectativas, la construcción hecha y la exploración realizada no conducen a la formulación de una condicional que asocie de manera apropiada el antecedente de ésta con las propiedades que se usaron en la construcción o se impusieron por arrastre de los objetos libres, ni tampoco al consecuente de la condicional con las propiedades que se descubren en la exploración.

Las actuaciones problemáticas al respecto consisten en formular: *a)* una condicional en la que no se mencionan, en la hipótesis o en la tesis, las condiciones establecidas en el enunciado de la situación propuesta o las que se generan por la construcción; *b)* una condicional cuyo antecedente está compuesto por las relaciones que se obtuvieron y no por las dadas o las construidas, es decir, la conjetura enuncia la proposición recíproca de la condicional modelada en la geometría dinámica; *c)* una condicional que generaliza una propiedad a partir de un caso particular que se evidencia en la construcción hecha; *d)* una condicional que no incluye todas las condiciones que se evidencian en la construcción, desconociendo así que, al representar una situación general, se espera que éstas se registren como resultado.

Para ilustrar las actuaciones problemáticas descritas, hacemos referencia a las producciones de tres estudiantes como respuesta a la tarea: "Investigar la relación entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad *diagonales congruentes*" (cuadro 1).[1]

La producción de Alberto ejemplifica la actuación problemática *a*, pues aunque el estudiante construye un cuadrilátero y sus diagonales, ni en la hipótesis ni

[1] Al presentar públicamente las conjeturas, se les pidió que describieran la construcción, además de formular el enunciado.

Cuadro 1 Producciones de tres estudiantes

Recuento de la construcción con geometría dinámica	Conjetura formulada
Alberto	
"Construí un polígono cualquiera y sus diagonales, luego empecé a mirar las características de las diagonales y los lados para mirar qué tipo de cuadrilátero obtenía cuando movía un punto dependiendo de lo que sucedía con las diagonales."	"El único cuadrilátero que tiene como mediatriz una diagonal con respecto a la otra y además se bisecan es un rombo."
Juan	
"Construí una circunferencia de centro *E*, luego localicé dos puntos *A* y *B* sobre la circunferencia, construí recta *AE* y recta *BE* y luego, con el punto de intersección de la recta *AE* con la circunferencia (el punto *C*) y el punto de intersección de la recta *BE* con la circunferencia (el punto *D*), construí los segmentos *AC* y *BD*, asegurando así la congruencia entre esos segmentos. Luego construí el cuadrilátero *ABCD*."	"Si el cuadrilátero es un cuadrado, entonces las diagonales son congruentes."
Doris	
"Construí el cuadrilátero. Tracé diagonales. Tomé las medidas. Moví los vértices hasta que las diagonales fueran congruentes."	"Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces los lados opuestos del cuadrilátero son congruentes."

en la tesis de la conjetura que formula menciona la condición de la congruencia de éstas, lo que lleva a pensar que, en su exploración mediante el arrastre, su observación se dirigió a la perpendicularidad y al punto de intersección entre las diagonales. La producción de Juan ejemplifica la actuación problemática *b*, pues la conjetura no es consistente con la construcción realizada, ya que el alumno construye diagonales congruentes que se bisecan. Esta condición debió ser la hipótesis de su conjetura. Como tesis, debió enunciar el tipo de cuadrilátero que obtuvo como resultado de las condiciones de construcción que impuso, en el caso que él informa, un cuadrado.

La producción de Doris ejemplifica las actuaciones problemáticas *c* y *d*. En primer lugar, la estudiante arrastra los vértices del cuadrilátero que construye hasta que las diagonales sean congruentes y examina la figura resultante. A partir de lo que observa, hace una generalización que no es correcta, pues tanto los trapecios isósceles como los cuadriláteros sin propiedad especial alguna cumplen la congruencia de las diagonales; en el primer caso, éstos sólo tienen un par de lados congruentes, mientras que, en el segundo caso, no hay un par de lados congruentes. En segundo lugar, si la figura que está en la pantalla es un paralelogramo, según lo afirma la estudiante en su conjetura, ella no incluye otras propiedades que podía inferir de su representación: las diagonales se bisecan y el cuadrilátero es un rectángulo; esto evidencia la actuación problemática *d*.

Al analizar estas actuaciones, observamos que, posiblemente, los estudiantes no se percatan lo suficiente de las dependencias creadas entre los elementos de la construcción, que la condicional establece esa relación de dependencia y que, al modificar las condiciones dadas como antecedentes o construidas con geometría dinámica, es posible que la conjetura pierda la posibilidad de ser verdadera dentro del sistema teórico de referencia. En otras palabras, no realizan acciones específicas para verificar que la construcción hecha aporte las condiciones suficientes establecidas en el antecedente de la condicional para concluir el consecuente. Este tipo de análisis nos llevó a ver la necesidad y conveniencia de apoyar, desde la enseñanza, la tarea de producir condicionales a partir de una situación dada. En el experimento de enseñanza que desarrollamos con el objeto de apoyar a los estudiantes, ponemos en juego dos estrategias de las que damos cuenta en la siguiente sección.

EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Para llevar a cabo el estudio, realizamos un experimento de enseñanza en una de las versiones del curso *Elementos de Geometría*. A continuación, describimos el contexto de ésta, damos cuenta de las hipótesis del estudio y las actividades propuestas a los estudiantes.

Contexto

Los veinticinco estudiantes que participaron en el experimento estaban cursando una licenciatura en matemáticas y se preparaban para ser profesores de matemáticas en secundaria. La profesora, una de las investigadoras, propuso sistemáticamente situaciones similares a las aquí presentadas durante todo el semestre. La presentación en público y el análisis de las producciones de los estudiantes, que trabajaban en grupos, se realizaron por lo general en la siguiente sesión de clase de acuerdo con una organización previa hecha por la profesora. Detrás de esta decisión, hay razones didácticas que buscan, por una parte, no quitarle sentido a la presentación y revisión de las diferentes conjeturas y, por la otra, aprovechar la revisión de las diferentes producciones para cubrir una amplia gama de consideraciones.

La asignatura *Elementos de Geometría* es la primera de la línea de geometría; se enfoca hacia el desarrollo del lenguaje geométrico, las habilidades de visualización y el aprendizaje de algunos conceptos básicos de geometría euclidiana plana con los cuales se espera que puedan enfrentar en el curso siguiente, *Geometría Plana,* la tarea de construir colectivamente un sistema teórico. Se presta especial atención al desarrollo de habilidades de visualización para que puedan avanzar desde lo que Duval (1998) llama una aprehensión perceptual hacia una aprehensión discursiva y una aprehensión operativa. Así, se busca que puedan establecer vínculos entre las representaciones figurales y los enunciados geométricos que determinan los objetos representados y que activen o inhiban configuraciones que componen la figura para destacar las que son relevantes. Adicionalmente, se proponen actividades para trabajar en geometría dinámica con el objetivo de que los estudiantes reconozcan las herramientas de exploración del programa y sus efectos en las representaciones de los objetos, distinguiendo entre el comportamiento que se observa motivado por la herramienta que se usa y el motivado por las propiedades geométricas que intervienen en la construcción de tal objeto. Como resultado, los estudiantes adquieren habilidades de visualización para aprovechar el potencial heurístico de las figuras dinámicas en resolución de problemas.

Hipótesis

A manera de hipótesis, consideramos que, si adoptamos dos estrategias, se puede apoyar a los estudiantes, desde la enseñanza, en el proceso de comprensión de una proposición condicional vista desde la lógica matemática y el uso con sentido de ésta en procesos deductivos.

- Se proponen tareas a los estudiantes que: *i)* los lleven a tener consciencia de la dependencia entre propiedades construidas y obtenidas a partir de construcciones mediante la identificación de alguna regularidad en el

comportamiento de las figuras cuando se hace una exploración dinámica de una situación; *ii)* favorezcan el desprendimiento de lo temporal para identificar el estatus de las condiciones involucradas y puedan establecer una generalidad en términos de una condicional.
- Se interviene sistemáticamente para: *i)* solicitarles el recuento escrito de las acciones realizadas (construcción y exploración) con geometría dinámica y el reconocimiento de cuáles fueron las condiciones construidas y cuáles las propiedades resultantes cuando resuelven un problema; *ii)* insistir en que todo enunciado condicional se exprese en la forma *si-entonces* para propiciar la asociación de la hipótesis con las condiciones dadas o construidas y la de la tesis con las propiedades resultantes; *iii)* favorecer una conversación matemática colectiva en la que se analiza si la condicional formulada a manera de conjetura concuerda con el proceso de construcción realizado.

Tareas

Las tareas diseñadas invitan a los estudiantes a reflexionar inicialmente sobre las dependencias que existen entre las propiedades geométricas y a formular mediante condicionales esas dependencias, con el propósito de que "desarrollen significados para las propiedades estructurales de la condicional en matemáticas" (Hoyles y Küchemann, 2002). En la realización de tales tareas, el uso de geometría dinámica desempeña un papel fundamental: con las construcciones y descripciones de éstas y la exploración realizada, surgen oportunidades para que los estudiantes identifiquen el antecedente y el consecuente de proposiciones condicionales. De este modo, se abre un espacio para poner en juego las hipótesis de nuestra investigación. A continuación nos vamos a referir a tres de las tareas propuestas.

Tarea 1

a) Complete el siguiente enunciado, escribiendo como antecedente de la condicional un conjunto de condiciones que garanticen que ésta sea verdadera:
Si ________________, entonces el cuadrilátero *ABCD* es un cuadrado.

b) Construya, con geometría dinámica, una figura que satisfaga las condiciones que usted incluyó en el antecedente.

c) Con el arrastre, determine si la figura mantiene la configuración que espera. Si no es el caso, indique cómo debe transformar el antecedente de la condicional.

Esta tarea tiene como propósito principal motivar el cuestionamiento o la reflexión sobre las propiedades que garantizan que una figura es un cuadrado, a fin de que puedan reconocer la estructura bicondicional subyacente en una definición ($p \leftrightarrow q$) o condicional de un teorema ($p \rightarrow q$). A diferencia de la tarea usual de construir un cuadrado que se propone en geometría dinámica, proponemos a los estudiantes que anticipen el antecedente de la condicional que tiene como consecuente la proposición "el cuadrilátero *ABCD* es un cuadrado" y luego utilicen la construcción para evaluar la expresión condicional que proponen. Por esta vía, los estudiantes identifican las condiciones suficientes que aseguran que la figura es un cuadrado. Los resultados obtenidos al finalizar la tarea dependen de la teoría que se tenga desarrollada en el momento en que se propone. Por ejemplo, podrían caracterizar el cuadrado como un paralelogramo con propiedades especiales o como un cuadrilátero con condiciones especiales para los ángulos y lados. El papel de la geometría dinámica es destacar la importancia de todas y cada una de las condiciones que se escriben en el antecedente de la condicional y los efectos en la figura obtenida que producen la falta o inclusión de alguna propiedad en el proceso de construcción.

Tarea 2

Use geometría dinámica para responder "Sí", "No" o "No se sabe", a las siguientes preguntas. Explique su respuesta. Cuando su respuesta sea "No se sabe", indique qué condiciones tendría que añadir para que fuera "Sí". Escriba la conjetura en el formato *si-entonces*.

a) El ☐*XYZW* es un rombo. ¿Es un rectángulo?
b) Las diagonales del ☐*MNOP* se bisecan. ¿Es un paralelogramo?

Esta tarea atiende la sugerencia de Durand-Guerrier (2003) de poner a consideración proposiciones contingentes que den lugar a un análisis rico en el estudio del valor de verdad de enunciados condicionales que se formulan a partir de la respuesta al interrogante. Ello constituye una diferencia de la tarea usual de construir una figura específica y constatar que corresponde a lo que se pide. El estudiante tiene dos responsabilidades: determinar si las condiciones establecidas en el enunciado dado son suficientes para asegurar la propiedad cuestionada y, en caso contrario, encontrar, apoyándose en la geometría dinámica, el dominio en el cual la condicional que debe formular es verdadera. Por ejemplo, si los estudiantes consideran que no se sabe si el enunciado "si el cuadrilátero *ABCD* es un rombo, entonces es un rectángulo" es una proposición verdadera, deben identificar propiedades adicionales para que el rombo sea un rectángulo, restringiendo el dominio de verdad a aquellos que tienen un ángulo recto. El uso de la geometría dinámica permite la exploración de varios ejemplos que llevan a encontrar las condiciones que faltan para establecer esa restricción.

Tarea 3

Estudie la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad *la bisectriz de un ángulo y la mediana, con extremo en el vértice de ese ángulo, coinciden*. Haga un recuento de la construcción y exploración hechas y escriba una conjetura de la forma *si-entonces*.

Esta tarea ayuda a reforzar el reconocimiento del estatus operatorio del antecedente y del consecuente en la condicional que establece la conjetura, pues el cambio simultáneo de propiedades de la figura, cuando se arrastran elementos libres de la construcción en busca de obtener una propiedad como característica especial, hace visible la dependencia de propiedades. Este cambio simultáneo sólo se puede evidenciar cuando la exploración se hace en un entorno de geometría dinámica. Al hacer una pregunta abierta, se genera la necesidad de explorar, ya sea construyendo un triángulo especial para determinar si tiene la propiedad exigida, o construyendo cualquier triángulo para obligar a que la propiedad se dé con el arrastre. A diferencia de las tareas anteriores, en esta oportunidad, en consonancia con la segunda parte de la estrategia expuesta en la hipótesis que pusimos en juego, les pedimos explícitamente a los estudiantes que hicieran un recuento de la construcción y de su proceso de exploración y que formularan la conjetura como una expresión *si-entonces*. Otra diferencia es que, en las anteriores, hay que complementar el antecedente de una condicional dada para que ésta sea verdadera, mientras que en ésta se tiene que formular por completo la condicional.

ALGUNOS RESULTADOS

Para dar cuenta de la implementación de las estrategias, vamos a referirnos a algunos aspectos específicos de la resolución de cada una de las tareas, ilustrando con respuestas de los estudiantes los aspectos más destacables.

Acerca de la tarea 1

La tarea 1 pide anticipar, por escrito, un conjunto de propiedades que permiten considerar un cuadrilátero *ABCD* como un cuadrado, usar dichas propiedades para hacer una construcción en geometría dinámica y arrastrar los elementos libres para ver si la figura construida es en efecto la representación de un cuadrado.

Al revisar las proposiciones presentadas como antecedentes por los estudiantes, encontramos dos tipos de respuestas: *i)* omiten propiedades imprescindibles, como lo ilustra la respuesta de un grupo: "Si el cuadrilátero *ABCD* tiene sus cuatro lados congruentes, entonces el cuadrilátero *ABCD* es un cuadrado"; *ii)* incluyen las propiedades con las que en general se define cuadrado en el nivel escolar, como lo expresó Cecilia: "Si el cuadrilátero *ABCD* tiene sus cuatro lados congruentes y sus cuatro ángulos rectos, entonces el cuadrilátero *ABCD* es un cuadrado".

En relación con el primer tipo de respuesta, al hacer la construcción con geometría dinámica, algunos estudiantes atendieron la indicación de usar sólo las condiciones incluidas en el antecedente de la condicional y, al hacer el arrastre, se dieron cuenta de que no es suficiente tener cuatro lados congruentes para obtener un cuadrado. En ese caso, les pedimos que revisaran la construcción para detectar cuáles propiedades no tuvieron en cuenta en la anticipación y, gracias a la representación visual que obtuvieron al arrastrar, identificaron que les faltó incluir la perpendicularidad de los lados adyacentes. La discusión que se generó en torno a las producciones escritas de los estudiantes permitió hacer explícito lo que se evidencia con la geometría dinámica: la dependencia entre ciertas propiedades y la conclusión "ser cuadrado". Otros estudiantes no atendieron la indicación del enunciado y usaron en la construcción propiedades que no habían hecho explícitas en la formulación; por ejemplo, utilizaron rectas perpendiculares para trazar los lados del cuadrilátero, aunque no se habían referido a esa propiedad. En la presentación pública de las producciones, se insistió especialmente en que la formulación de la condicional debía incluir las propiedades usadas en la construcción cuando éstas son imprescindibles para que la figura corresponda a lo que se quiere y garantizar de este modo que el antecedente esté completo.

En relación con el segundo tipo de respuesta, la experiencia de realizar una construcción robusta posibilita que los estudiantes cuestionen el sentido de escribir una lista exhaustiva de propiedades como la mencionada en el ejemplo. En la descripción del proceso de construcción, dos grupos de estudiantes se refirieron, respectivamente, a lo siguiente: tres segmentos congruentes ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$) y dos ángulos rectos ($\angle A$ y $\angle B$); y dos segmentos congruentes ($\overline{AB}$ y $\overline{AD}$) y tres ángulos rectos ($\angle A$, $\angle B$ y $\angle D$). Esto dio la oportunidad de reflexionar sobre el conjunto mínimo de propiedades que caracterizan un cuadrado y establecer, con cada grupo de condiciones, lo que se denominaron *definiciones dinámicas de cuadrado*. Esta discusión fue importante porque constituyó un acercamiento a la comprensión de la dependencia entre hechos geométricos y la importancia de tener una base teórica para poder justificar tal dependencia, proceso que se hace en el siguiente curso. Esto porque, dadas las características del curso, en ese momento no se contaba con el andamiaje teórico necesario para demostrar la equivalencia de las definiciones dinámicas con la definición usual.

Acerca de la tarea 2

La tarea 2 exige decidir si una figura puede clasificarse dentro de un tipo especial de cuadrilátero a partir de información dada sobre ella. En la parte *a* se pide considerar si una figura es rectángulo, sabiendo que es rombo. En la parte *b* se pide determinar si es paralelogramo, sabiendo que es un cuadrilátero cuyas diagonales se bisecan.

En relación con la parte *a*, como el enunciado se refiere a un rombo, los estudiantes comenzaron la exploración construyendo una figura robusta que tuviera las propiedades que ellos identificaban como características de un rombo. Utilizaron el arrastre para validar o invalidar las construcciones y, en caso necesario, repitieron la construcción hasta tener la seguridad de que la figura en la que se iban a basar para responder la pregunta era en realidad la representación de un rombo. A continuación, llevaron a cabo dos exploraciones diferentes. Unos estudiantes usaron el arrastre en busca de obtener un rectángulo y centraron la mirada en la variación de los ángulos del rombo. En un momento dado, vieron un ángulo que les pareció recto, condición que sabían imprescindible para que la figura fuera un rectángulo; esto los llevó a medir los otros tres ángulos y a constatar que también eran rectos. Así, obtuvieron evidencia de que, aunque no es verdad el enunciado general *todo rombo es un rectángulo,* sí hay una condición especial según la cual un rombo es un rectángulo. Para verificar que su aproximación era correcta, realizaron una nueva construcción robusta de un rombo con una propiedad adicional: un ángulo recto. De esta manera, respondieron el interrogante con expresiones como la de Carolina: "No se sabe. Si el rombo tiene un ángulo recto entonces es rectángulo".

Otros estudiantes hicieron una exploración más amplia de la figura original. Una vez obtenida una figura que visualmente parecía rectángulo, enfocaron su mirada en propiedades de ésta diferentes a la medida de los ángulos. En particular, dos grupos de estudiantes percibieron propiedades especiales de las diagonales. La respuesta de uno de estos grupos, una vez que construyeron una figura robusta para verificar lo que habían percibido, fue: "No se sabe. Si el rombo tiene las diagonales congruentes, entonces es rectángulo". La respuesta del otro grupo fue: "No se sabe. Si el rombo tiene diagonales perpendiculares, entonces es rectángulo". Desde nuestro punto de vista, estos grupos pudieron restringir el dominio de rombos que son rectángulos a través de otras propiedades. De este modo, mediante la percepción visual de la figura representada con geometría dinámica, llegaron a una condicional que proporciona nueva información sobre los rombos y los rectángulos, y que no está ligada a la definición de rectángulo.

En relación con la parte *b,* los estudiantes hicieron construcciones iniciales diversas: un cuadrilátero sin propiedades especiales y arrastraron hasta que las diagonales se bisecaran; un paralelogramo y verificaron que las diagonales se bisecaban; dos diámetros de una circunferencia y el cuadrilátero cuyos vértices son los extremos de éstos; y dos segmentos que se bisecaban y el cuadrilátero cuyos vértices eran los extremos de éstos. La primera es una construcción blanda (Healy, 2000) y las otras tres, robustas. En el primer caso, los estudiantes se dieron cuenta de que los lados opuestos del cuadrilátero parecían paralelos; dieron una respuesta positiva al interrogante, hicieron la construcción robusta de un paralelogramo y formularon el siguiente enunciado condicional: "Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, el cuadrilátero es un paralelogramo”. En el segundo caso, los estudiantes establecieron la misma conjetura. Esto dio lugar al análisis de la correspondencia entre el proceso de construcción y la conjetura formulada, y, por ende, a la discusión sobre la relación de dependencia que se establece entre las proposiciones que conforman una condicional; así, los estudiantes se percataron de que la conjetura propuesta por ellos no era producto del proceso de construcción realizado, pero que la recíproca sí lo era. En la tercera construcción, los estudiantes impusieron, sin advertirlo, una condición adicional a las diagonales del cuadrilátero: ser congruentes. Conceptuaron que el cuadrilátero debía ser un rectángulo y formularon la siguiente respuesta: “No. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, el cuadrilátero es un rectángulo”. Al discutir esta propuesta, solicitarles un recuento de las acciones realizadas, invitarlos a explorar otras propiedades invariantes en la construcción y formular una condicional con un antecedente que incluyera las propiedades impuestas a la construcción, se dieron cuenta de que la congruencia de las diagonales y la perpendicularidad de los lados se mantenían al arrastrar los vértices del cuadrilátero. Así, elaboraron una nueva condicional: “Si en un cuadrilátero *MNOP* las diagonales son congruentes y se bisecan, el cuadrilátero es un paralelogramo que es un rectángulo”. Puesto que en el curso se definió rectángulo como cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, esta construcción también llevó a descubrir un hecho geométrico: los rectángulos son paralelogramos. Finalmente, la última construcción obedece exactamente a la propiedad impuesta como condición y, por tanto, dio la información suficiente para establecer que el cuadrilátero era en realidad un paralelogramo.

El proceso de análisis de las respuestas a esta tarea dio lugar a dos acciones importantes que favorecen la comprensión de la condicional. En primer lugar, abrió el espacio para marcar la diferencia entre una proposición condicional y su recíproca mediante el estudio de la correspondencia entre las propiedades construidas, las características resultantes de la figura y la condicional formulada. En segundo lugar, proporcionó un alto grado de seguridad respecto a la veracidad de la condicional formulada como conjetura, factor que crea, en los estudiantes, el deseo por, finalmente, encontrar una justificación de dicha condicional.

Acerca de la tarea 3

En la tarea 3, se solicitaba hacer una investigación para determinar la relación de dependencia entre triángulos de cierto tipo y propiedades especiales, hacer un recuento de la construcción y exploración realizadas y escribir la conjetura establecida en la forma *si-entonces*.

Los grupos de estudiantes resolvieron el problema de cinco maneras diferentes:

- Solución 1: anticiparon un resultado apoyados en la intuición o en conocimiento previo y, por ello, construyeron un triángulo isósceles o equilátero para estudiar la relación entre la mediana y la bisectriz con extremo en el mismo vértice.
- Solución 2: construyeron un triángulo isósceles, uno equilátero y otro escaleno, la mediana y la bisectriz de cada uno con extremo en el mismo vértice y observaron si coincidían.
- Solución 3: construyeron un triángulo sin propiedades especiales, la bisectriz y la mediana con extremos en el mismo vértice y usaron el arrastre hasta lograr que el punto medio del lado opuesto perteneciera a la bisectriz; al obtener esa situación, se dieron cuenta de que dos lados del triángulo eran congruentes.
- Solución 4: construyeron un triángulo sin propiedades especiales, la bisectriz y la mediana con extremo en el mismo vértice y usaron el arrastre hasta lograr que los lados que compartían ese vértice fueran congruentes; al lograrlo, notaron que la bisectriz y la mediana coincidían.
- Solución 5: construyeron un triángulo y una de sus medianas, midieron los ángulos que ésta determina y arrastraron hasta que éstos fueran congruentes; al lograrlo, se percataron de la congruencia de dos lados del triángulo.

Sin importar el camino escogido, los estudiantes formularon las siguientes conjeturas: *i)* "Si el triángulo es isósceles, entonces la bisectriz del ángulo y la mediana coinciden"; *ii)* "Si el triángulo es equilátero, entonces la bisectriz del ángulo y la mediana coinciden"; *iii)* "Si el triángulo es isósceles o equilátero, entonces la bisectriz del ángulo y la mediana coinciden", y *iv)* "Si la bisectriz de un ángulo de un triángulo coincide con la mediana correspondiente, entonces el triángulo es isósceles". La solicitud de escribir tanto el recuento de la construcción y la exploración realizadas como la conjetura en la forma *si-entonces* contribuyó a identificar la actuación problemática que queríamos atender y que se presentó en algunos casos, pues no todos los estudiantes examinaron si el antecedente presentaba las condiciones que impusieron a su construcción y si el consecuente daba cuenta de las propiedades que fueron resultado de dichas condiciones. Por eso, algunos estudiantes enunciaron una conjetura recíproca a la condicional modelada en geometría dinámica.

En la presentación pública, se discutieron las propuestas y se hizo especial énfasis en las propiedades usadas en la construcción inicial y en las impuestas por el arrastre. Se destacó la similitud entre la solución 1, al construir un triángulo isósceles, y la solución 4, por cuanto en ambos casos se impuso, por construcción o arrastre, la condición de tener lados congruentes, aunque en el primer caso se haya hecho una construcción robusta y en el segundo, una construcción blanda. Así, en el antecedente de la conjetura, se debía incluir que los lados eran congruentes y, por ello, la formulación debió ser la conjetura *i*. En la solución 1, al construir un triángulo equilátero, los estudiantes restringieron los resultados a un tipo muy especial de triángulo y su conjetura, la *ii*, perdió generalidad. La diferencia entre la solución 2 y las soluciones antes mencionadas es muy sutil; en aquélla, no hubo una idea predeterminada que guiara las acciones de los estudiantes. Al considerar tres tipos de triángulos, simplemente estaban haciendo un estudio global, como si estuvieran trabajando con papel y lápiz. Así, al no generar los triángulos con el arrastre, desconocieron el potencial de la geometría dinámica. La presentación de las primeras tres conjeturas suscitó la discusión acerca de la relación entre triángulo isósceles y triángulo equilátero. Todo ello condujo a aceptar que la conjetura *i* era la más general.

Tanto en la solución 3 como en la solución 5, se impuso, por arrastre, que la bisectriz y la mediana coincidieran, razón por la cual tal condición debía quedar en el antecedente de la conjetura. Pero los procesos fueron diferentes: en la primera de estas soluciones, la bisectriz se convierte en mediana sin perder su condición de ser bisectriz, mientras que, en la segunda, la mediana se convierte en bisectriz. Por ello, cuando los estudiantes comprendieron esa diferencia, se acordó reescribir la conjetura *iv*. De ella surgieron dos conjeturas. Para la solución 3, la conjetura institucionalizada fue: *si la bisectriz de un ángulo de un triángulo contiene el punto medio del lado opuesto, entonces el triángulo es isósceles.* Para la solución 5, se formuló así: *si la mediana de un triángulo biseca el ángulo, entonces el triángulo es isósceles.*

COMENTARIOS FINALES

Al enfocarnos en algunas actuaciones problemáticas de los estudiantes relacionadas con el uso y la comprensión de la condicional, hemos pretendido contribuir a una discusión que la comunidad de educación matemática tiene pendiente respecto al papel que puede desempeñar el estudio de elementos de lógica en el aprendizaje de la demostración y las maneras en que puede hacerse tal estudio (véanse preguntas formuladas al respecto en Hanna y De Villiers, 2008). En particular, este artículo puede ayudar a cuestionar la pertinencia de la teoría de la disciplina formal, ampliamente aceptada por matemáticos y diseñadores de currículo, y explorada recientemente por Inglis y Simpson (2008; 2009). Según dicha teoría, el estudio de matemáticas desarrolla habilidades generales de pensamiento y habilidades de razonamiento condicional. Esto conduce a suponer que no es necesario dedicar esfuerzo especial a apoyar estos desarrollos en los estudiantes. Nuestra posición al respecto es otra. Consideramos que es de particular relevancia, para quienes se están formando como profesores de matemáticas, comprender la condicional y desarrollar sensibilidad hacia las problemáticas asociadas a su uso e interpretación, ya que las proposiciones condicionales desempeñan un papel esencial en la comprensión de las propias matemáticas, en la construcción de demostraciones y en la posibilidad de hacer matemáticas. Además, creemos que un tratamiento didáctico de la condicional, en el que se hace visible la problemática asociada con su uso e interpretación, genera sensibilidad hacia ésta en el futuro docente, le proporciona herramientas para apoyar a sus estudiantes en el proceso de comprender lo que se comunica a través de una condicional y cómo se utiliza para deducir hechos matemáticos, y constituye un ejemplo del tratamiento que se puede dar a situaciones semejantes.

Mediante las tareas de aprendizaje, se proponen el uso de la geometría dinámica, el análisis del proceso de exploración y construcción, y la enunciación de conjeturas en el formato *si-entonces*. De esta manera, se puede abrir el camino desde la interpretación cotidiana de una condicional, punto de partida ineludible, hacia el significado matemático de ésta. En esa vía, la concepción causal de la condicional se convierte en un eslabón entre su interpretación cotidiana y su acepción en el dominio de la matemática, porque esta concepción permite reconocer el papel desempeñado por cada proposición (antecedente y consecuente) de la condicional que se usa como garante en un paso de deducción.

Las descripciones aquí presentadas muestran que las tareas sugeridas impulsan la interacción y favorecen el análisis de la problemática descrita con respecto a la condicional, lo que, desde nuestra perspectiva, posibilita la superación de las actuaciones problemáticas. Al experimentar en nuestros cursos dichas tareas con estudiantes, sin contar con un diseño investigativo formal, siempre hemos obtenido resultados como los que aquí mostramos, lo que nos permite sospechar que esto constituye un camino hacia la meta didáctica que hemos establecido: la apropiación por parte de los estudiantes del significado matemático de la condicional. Lo que presentamos es un avance exploratorio basado en evidencia empírica y reconocemos que falta perfeccionar el proceso de recolección de datos para poner a prueba nuestra hipótesis con mayor rigor.

Gracias a sus diferentes herramientas para la exploración, la geometría dinámica favorece la constitución de un ambiente de indagación en las aulas de matemáticas que, dirigido de manera adecuada, permite avanzar más allá de la identificación de regularidades. Las tareas que proponemos asignan a la geometría dinámica un papel determinante en el proceso de establecer una condicional, ya que su uso permite reconocer el estatus operatorio de cada parte de ésta. Ello podría conducir a la transformación de la interpretación errónea o incompleta dada a una condicional. En otras palabras, las tareas en las que se usa la geometría dinámica propician la construcción de conocimiento, pues permiten que los estudiantes tomen conciencia de sus significados personales para así poder ligarlos a significados matemáticos (Mariotti, 2009).

Si bien la geometría dinámica proporciona un contexto apropiado para trabajar en algunos asuntos problemáticos relacionados con la comprensión de la condicional, para acercarse al significado matemático de la condicional, es necesario entender por qué ésta es verdadera cuando el antecedente es falso y el consecuente verdadero. Para ello, es preciso trabajar en un contexto puramente matemático. Contrario a lo que sucede con el uso corriente de la condicional, el valor de verdad desde la matemática no depende del contenido semántico de cada proposición que conforma la condicional, sino del valor de verdad de éstas. Por ello, usar la geometría dinámica como instrumento para abordar este caso es imposible. Además, en geometría, son pocas las situaciones en que surge la necesidad de considerar ese caso para resolver un problema.

Nuestra experiencia como docentes nos ha mostrado que es necesaria la labor decidida y sistemática del profesor para que el estudiante pueda hacer la transición de la concepción y uso cotidiano de la condicional a la correspondiente en la matemática. La propuesta que presentamos en este artículo incluye tan sólo unas de las varias, diversas y posibles acciones mediante las cuales se puede apoyar el desarrollo de procesos de razonamiento matemático en los estudiantes. Desde nuestro punto de vista, el uso de programas de geometría dinámica constituyó una decisión metodológica eficaz para crear ambientes de aprendizaje donde la condicional adquiere significado, ya que es posible generar situaciones que permiten ver cambios simultáneos en las figuras, evidencia de las dependencias que se registran mediante una condicional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Camargo, L., C. Samper y P. Perry (2007), "Cabri's role in the task of proving within the activity of building part of an axiomatic system", en D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Larnaca, Chipre, pp. 571-580.

Deloustal-Jorrand, V. (2002), "Implication and mathematical reasoning", en A. Cockburn y E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, University of East Anglia, vol. 2, pp. 281-288.

Durand-Guerrier, V. (2003), "Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 53, núm. 1, pp. 5-34.

Duval, R. (1991), "Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, núm. 3, pp. 233-261.

——— (1998), "Geometry from a cognitive point of view", en C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic Publishers, pp. 37-52.

——— (2007), "Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof", en P. Boero (ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*, Países Bajos, Sense Publishers, pp. 137-161.

Hanna, G. y M. de Villiers (2008), "Proof and proving in mathematics education", ICMI Study 19, *ZDM*, vol. 40, núm. 2, pp. 329-336.

Healy, L. (2000), "Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions", en T. Nakahara y M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Universidad de Hiroshima, vol. 1, pp. 103-117.

Hoyles, C. y D. Küchemann (2002), "Students' understandings of logical implication", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 51, núm. 3, pp. 193-223.

Inglis, M. y A. Simpson (2008), "Conditional inference and advanced mathematical study", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 67, núm. 3, pp. 187-204.

——— (2009), "Conditional inference and advanced mathematical study: Further evidence", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 72, núm. 2, pp. 185-198.

Jones, K. (2000), "Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, núm. 1, pp. 55-85.

Laudien, R. (1999), "Misunderstanding of if-then as if and only if", en F. Hitt y M. Santos (eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Columbus, Ohio, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, vol. 1, pp. 225-231.

Mariotti, M. A. (2000), "Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, núm. 1, pp. 25-53.

——— (2009), "Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher", *ZDM*, vol. 41, núm. 4, pp. 427-440.

Molina, Ó., A. Echeverry, C. Samper, P. Perry y L. Camargo (en evaluación), "Proposición condicional: uso por parte de profesores de matemáticas en formación".

Perry, P., C. Samper y L. Camargo (2006), "Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que Cabri juega un papel clave", Ponencia presentada en Iberocabri 2006, Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá, Colombia.

Perry, P., C. Samper, L. Camargo, A. Echeverry y Ó. Molina (2008), "Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores", en *Electronic book of the XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: "Innovando la enseñanza de las matemáticas"*, Toluca, México, Universidad Autónoma del Estado de México.

Perry, P., L. Camargo, C. Samper, Ó. Molina y A. Echeverry (2009). "Assigning mathematics tasks *versus* providing pre-fabricated mathematics in order to support learning to prove", en F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education*, Taipei, Taiwan, National Taiwan Normal University, vol. 2, pp. 130-135.

DATOS DE LOS AUTORES

Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
csamper@pedagogica.edu.co

Patricia Perry
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
pperryc@yahoo.com.mx

Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Óscar Molina
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
ojmolina@pedagogica.edu.co

Armando Echeverry
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia
aecheverri@pedagogica.edu.co