

# Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas

Josep Gascón

La filosofía de la ciencia sin la historia de la ciencia es vacía;  
la historia de la ciencia sin la filosofía de la ciencia es ciega.  
*Imre Lakatos (1971/1982)*

**Resumen:** La construcción de modelos epistemológicos de referencia ha permitido la emancipación de la didáctica de las matemáticas respecto de los modelos epistemológicos dominantes en las diversas instituciones que forman parte de su objeto de estudio y ha hecho visibles nuevos fenómenos didácticos poniendo así de manifiesto la incidencia de la epistemología sobre la didáctica. Estas mismas herramientas pueden utilizarse para posibilitar la emancipación epistemológica de la historia de las matemáticas y para reinterpretar los hechos históricos. Recíprocamente, las investigaciones históricas (así como las investigaciones didácticas) pueden evaluar y corregir los modelos epistemológicos específicos de un ámbito de la actividad matemática.

*Palabras clave:* emancipación epistemológica, fenómenos didácticos, historia de las matemáticas, modelos epistemológicos de referencia.

**Abstract:** The construction of reference epistemological models enables the emancipation of the Didactics of Mathematics from the epistemological models prevailing in the different institutions that are part of Didactics' objects of study. It also makes new didactic phenomena visible, thus highlighting the incidence of Epistemology on Didactics. The same tools can be used to enable the epistemological emancipation of the History of Mathematics and to reinterpret historical facts. Reciprocally, historical research (and didactics research) can evaluate and correct the local epistemological models specific of a given domain of mathematics.

*Keywords:* epistemological emancipation, didactic phenomena, History of Mathematics, reference epistemological models.

---

Fecha de recepción: 11 de agosto de 2013; fecha de aceptación: 15 de noviembre de 2013.

## 1. ORIGEN Y ALCANCE DEL PROBLEMA DE LA EMANCIPACIÓN DE LA DIDÁCTICA

El punto de partida de este trabajo lo constituye el problema de la emancipación epistemológica e institucional de la *didáctica de las matemáticas* con respecto a las instituciones que sirven de hábitat a sus objetos de estudio y que, como tales instituciones, también acaban constituyéndose en objetos de estudio de la didáctica. Este problema aparece por primera vez en los trabajos de Chevallard sobre los fenómenos de transposición didáctica (Chevallard, 1985/1991; Bosch y Gascón, 2007) y está asociado inicialmente al esfuerzo por liberar las investigaciones didácticas de la sujeción a los códigos de la escuela y, en particular, a los que rigen la relación de ésta con las matemáticas como disciplina escolar.

En la conferencia de clausura del Primer Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico, celebrado en Baeza (Jaén) a finales de 2005, Chevallard volvió explícitamente sobre este problema considerándolo, junto al problema de la difusión (y la no difusión) de las praxeologías didácticas, como uno de los grandes problemas que han constituido la razón de ser de la *teoría antropológica de lo didáctico* (en adelante, TAD) (Chevallard, 2007).

En efecto, para tomar los procesos de transposición didáctica como objeto de estudio, el didacta necesita analizar de manera crítica los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las instituciones involucradas y liberarse así de la asunción acrítica de dichos modelos. En esto consiste la *emancipación epistemológica*, mientras que la *emancipación institucional* hace referencia a la necesidad del didacta (y de la ciencia didáctica) de liberarse de las dependencias que acarrearán la posición de “profesor” (sujeto de cierta institución escolar), la de “noosferiano” (sujeto de la noosfera, esto es, autor de libros de texto, de planes de estudio, de documentos curriculares, de textos de formación del profesorado, etc.) e, incluso, la de “matemático guardián de la ortodoxia” (sujeto de la institución productora y conservadora del saber). Obviamente la emancipación epistemológica constituye un aspecto particular, un primer paso esencial, de la emancipación institucional que podría definirse, en general, como la liberación de la sujeción a la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, esto es, la emancipación no sólo del provincianismo epistemológico, sino también de todo provincianismo didáctico, pedagógico y cultural.

Las cuestiones derivadas que surgen de la toma en consideración de este problema son múltiples. En primer lugar aparece el problema de la *construcción de las herramientas teóricas y metodológicas* que se requieren para hacer posible la emancipación de la didáctica de las matemáticas como disciplina. Se trata de un problema central para el desarrollo de la didáctica del que nos ocuparemos con cierto detalle en lo que sigue. Pero, más allá de este problema, surge la cuestión del alcance y los límites de la citada emancipación. En efecto, dado que la emancipación epistemológica requiere, en particular, que el didacta analice críticamente la división de la matemática escolar en *áreas*

y las sucesivas subdivisiones en *sectores* y *temas*,<sup>1</sup> así como la estructura y el contenido de cada uno de ellos, ¿por qué debería asumir el didacta la *clasificación escolar de las disciplinas* y la correspondiente compartimentación del saber enseñado?

De hecho, en sus últimos trabajos, Chevallard propugna muy claramente la necesidad que tiene la didáctica de emanciparse de la subordinación a las disciplinas enseñadas, hasta el punto de considerar la sujeción a éstas como un *obstáculo al desarrollo científico de la didáctica*. Surge así una forma radical de interpretar la emancipación institucional que, más allá de propugnar una posición de *didacta de las matemáticas* liberado de los condicionantes institucionales citados, defiende la construcción de una *ciencia didáctica* sin adjetivos, que no tenga ningún tipo de sujeción particular a ninguna de las disciplinas escolares (Chevallard, 2006).

Así, mientras que Guy Brousseau siempre ha defendido que la didáctica de las matemáticas debería mantenerse muy cercana a las propias matemáticas sin renunciar a la ambición de llegar a ser ella misma una disciplina matemática (Brousseau, 1996), Chevallard postula que el objeto de estudio de cualquier disciplina científica, su *especificidad* como tal disciplina, no está dado de antemano, debe construirse de manera autónoma por la comunidad científica involucrada. Así, propone definir el objeto de estudio de la *ciencia didáctica* o de las *ciencias didácticas* (utilizando el plural en el mismo sentido que se utiliza para hablar de *ciencias matemáticas*, *ciencias físicas* o *ciencias biológicas*) de forma completamente independiente de las cambiantes disciplinas escolares (Chevallard, 2006).

Esta forma radical de considerar la emancipación de la didáctica provoca indirectamente la emergencia de nuevas cuestiones relativas a la emancipación de aquellas disciplinas que, como la *historia de las matemáticas*, comparten con la didáctica de las matemáticas un mismo ámbito empírico: la génesis, el desarrollo y la difusión de la actividad matemática (lo que no significa que estudien los mismos fenómenos ni que formulen los mismos tipos de problemas de investigación). Así, al plantear el problema de la emancipación institucional de la historia, surge la cuestión sobre cuál sería el recorte adecuado de su objeto de estudio: ¿por qué restringirse al ámbito de la historia de las *matemáticas* y no proponer el problema más amplio de la emancipación institucional de la historia de la *ciencia* (o incluso de la *historia* sin más)? Se trata de una cuestión que, inevitablemente, debe plantearse en alguna medida todo historiador de la ciencia:

Siempre que se estudie la historia del desarrollo científico habrá de encontrarse repetidas veces, y en una u otra forma, la cuestión de si las ciencias son una o son muchas. [El historiador de la ciencia], ¿debe abordar las ciencias una por una comenzando, por ejemplo, con las matemáticas, siguiendo con la astronomía, luego con la física, la química, la anatomía, la fisiología, la botánica, etc.? ¿O debe rechazar la idea

---

<sup>1</sup> La subdivisión de la disciplina escolar en *áreas*, *sectores*, *temas* y *cuestiones* es relativa a una institución escolar y a un periodo histórico concreto y hace referencia a los niveles en los que se estructura la disciplina "matemáticas" en la escala de codeterminación didáctica (Chevallard, 2002).

de que su objeto sea una descripción compuesta de los campos individuales para hablar entonces del mero conocimiento de la naturaleza? (Kuhn, 1977/1983, p. 56)

La respuesta de Kuhn a estas cuestiones alude al problema clásico de la unidad o multiplicidad de la ciencia<sup>2</sup> y, por otra parte, empieza a sugerir la necesidad de cierta *emancipación institucional del historiador de la ciencia*:

Se trata de dos tradiciones historiográficas distintas y poco comunicativas (Ibíd., p. 57) [...] Los historiadores que deseen iluminar el desarrollo científico real tienen que detenerse en un difícil terreno intermedio entre las dos opciones tradicionales. Esto es, no pueden suponer que la ciencia sea una sola, pues claramente no lo es. Pero tampoco pueden dar por sentadas las subdivisiones de la materia de estudio comprendidas en los textos de ciencia contemporáneos y en la organización de los departamentos de las universidades de la actualidad. (Ibíd., pp. 58-59)

En resumen, y situándonos en ese difícil terreno intermedio al que se refería Kuhn, pretendemos:

1. Explicitar el *carácter fenomenotécnico de las ciencias* (en particular de la didáctica y la historia), mostrando que los instrumentos que les proporcionan la capacidad de producir fenómenos son, en gran medida, los que posibilitan su emancipación epistemológica (apartado 2).
2. Describir las funciones de los *modelos epistemológicos de referencia* como herramientas teóricas y metodológicas que hacen posible la emancipación epistemológica de la didáctica y que se han desarrollado principalmente en el ámbito de la didáctica de las matemáticas (apartado 3).
3. Mostrar, a partir de una reinterpretación de la obra de Lakatos, que los modelos epistemológicos de referencia pueden considerarse, también en *historia de la ciencia* y, en particular, en *historia de las matemáticas*, como instrumentos de emancipación epistemológica (apartado 4).
4. Mostrar *cómo* la investigación histórica y la investigación didáctica pueden

---

<sup>2</sup> En este trabajo no entraremos en la discusión del problema clásico de la *unidad o multiplicidad de la ciencia* respecto del cual las posturas de los epistemólogos e historiadores son muy diversas. Mientras Karl Popper (1956/2011) afirma que las disciplinas científicas no existen, que sólo existen los problemas y que las disciplinas son inventos o construcciones académicas, otros autores defienden posiciones más matizadas y, posiblemente, más fundamentadas. Así, por ejemplo, Rolando García critica la inadecuación de las dos posiciones extremas que han prevalecido en las múltiples propuestas de clasificación de las ciencias: cuestiona tanto la posición *reduccionista* que borra la especificidad de los fenómenos que pertenecen a cada disciplina, como la posición que erige *barreras infranqueables* sobre la base de la especificidad de los fenómenos. García, de acuerdo con Piaget, defiende una posición *unificada no reduccionista*, compatible con la pluralidad de las ciencias y con la posibilidad de integrar los estudios disciplinarios en la práctica concreta de la investigación interdisciplinaria de los sistemas complejos (García, 1994, 2006).

evaluar y corregir los modelos epistemológicos de un ámbito *específico* de las matemáticas, si bien esta contrastación empírica no puede aplicarse directamente a los modelos epistemológicos *generales* de las matemáticas (apartado 5).

## 2. EMANCIPACIÓN INSTITUCIONAL Y CARÁCTER FENOMENOTÉCNICO DE LAS CIENCIAS SOCIALES

De manera análoga al caso de la didáctica, podemos hablar de la emancipación institucional del resto de las “ciencias sociales” como, por ejemplo, de la historia, de la economía, de la psicología o de la sociología. En cada caso, dicha emancipación puede interpretarse como la liberación de las condiciones que impone la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio. Dicha emancipación es imprescindible para que *la propia comunidad científica pueda construir* (de manera relativamente autónoma) *el objeto de estudio* de la disciplina, sin dejarse condicionar por los códigos imperantes en las citadas instituciones ni, en particular, por la manera como se formulan e interpretan en ellas las cuestiones que forman parte de la problemática científica. Esta construcción del objeto de estudio puede identificarse con la *producción de los fenómenos* (y de los *problemas de investigación* asociados al estudio de dichos fenómenos) que constituyen la razón de ser de la disciplina.

Hay que subrayar en este punto que la emancipación a la que nos referimos, así como la correspondiente autonomía en la construcción del objeto de estudio por parte de las ciencias sociales (o de cualquier ciencia) es siempre, en la práctica científica real, una *autonomía relativa*. Podemos concebir la *autonomía de la ciencia*, en un sentido más amplio, como la liberación no sólo de las condiciones que impone la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, sino también de las *restricciones exteriores* que emanan de los poderes de todo tipo (religiosos, políticos, económicos, mediáticos, etc.) y que amenazan la libertad de la actividad científica.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> En el último libro publicado en vida, Pierre Bourdieu (2001) denuncia la debilitación progresiva de la citada autonomía que la ciencia había conquistado poco a poco y con enormes dificultades a lo largo de su historia. Considera que las ciencias sociales están especialmente expuestas a la *heteronomía* y propugna un *racionalismo historicista* para escapar a la alternativa entre *logicismo* y *relativismo* que, en realidad, son dos tendencias contrapuestas que se retroalimentan. Considera que la particularidad de las ciencias sociales sólo puede entenderse planteando la cuestión de las relaciones entre *cientificidad* y *autonomía* (respecto a las diferentes formas de presión exterior o interior) y propone la *reflexividad*, entendida como el trabajo mediante el cual las ciencias sociales, tomándose a sí mismas como objeto, se sirven de sus propias armas para comprenderse y controlarse, como el instrumento que permitirá dominar las determinaciones sociales a las que están expuestas dichas ciencias y posibilitar así la emancipación del investigador (y de las propias ciencias sociales) de las contingencias sociohistóricas. En este trabajo, lejos de pretender abordar el enorme problema de la *autonomía de las ciencias sociales*, nos centraremos en la emancipación epistemológica de la didáctica y la historia (de las matemáticas) y, sólo tangencialmente, en aquellos aspectos de la emancipación institucional directamente relacionados con la emancipación epistemológica.

Consideramos que todas las ciencias (y en particular las ciencias sociales) tienen, en mayor o menor medida, según su grado de desarrollo, la capacidad potencial de producir los fenómenos que describen y explican, esto es, postulamos que las ciencias tienen un carácter potencialmente *fenomenotécnico* en el sentido de Gaston Bachelard:

[...] un fenómeno es un suceso o proceso tipificable y reproducible [...], desglosable del devenir. En el uso bachelardiano, *fenomenotecnia* significa *arte sabio de producir nuevos fenómenos*, realizando material y manualmente lo concebido en abstracto –típicamente mediante modelos matemáticos– por la inteligencia. (Torretti, 2012, p. 98)

A fin de precisar este carácter potencialmente fenomenotécnico de las ciencias sociales (y, en particular, de la ciencia didáctica) es necesario analizar con más detalle el proceso de construcción de los fenómenos sociales (o fenómenos de la vida social).

Partimos del principio según el cual las ciencias sociales tienen por objeto de estudio los *fenómenos de la vida social*, por lo que parece lógico suponer que los *conceptos* que construyen se utilicen como herramientas para formular con cierta precisión los citados fenómenos y los problemas de investigación asociados.

Max Weber<sup>4</sup> postula que toda ciencia social tiene necesidad de construir “tipos ideales” de conceptos que funcionan como “conceptos límites” o conceptos “ideales”. Estos tipos ideales<sup>5</sup> están caracterizados teóricamente pero no son copias fotográficas de los hechos empíricos, esto es, no existen en estado puro en la realidad histórica. Podemos interpretarlos como *modelos* y, como tales, tienen una función metodológica, heurística, puesto que sirven para compararlos (o contrastarlos) con la realidad empírica, históricamente existente y para generar nuevas cuestiones.

Se trata de nociones o constructos teóricos que aporta la ciencia social para ordenar conceptualmente la realidad empírica. Por ello, no debe confundirse el sistema empírico modelizado, que siempre es infinitamente complejo, con el modelo cuya función no es copiar el sistema sino producir conocimientos sobre el mismo.<sup>6</sup> En este sentido, la construcción de los tipos ideales y su contrastación empírica constituyen una parte fundamental de las técnicas de investigación científica y pueden interpretarse como un

---

<sup>4</sup> Utilizamos la edición española, publicada en 2009 (Weber, 1904/2009).

<sup>5</sup> El adjetivo “ideal” no indica ningún tipo de perfección, esencialidad ni valoración, tiene que ver exclusivamente con la función puramente heurística, de modelo a contrastar empíricamente, que el “tipo ideal” cumple.

<sup>6</sup> Es importante subrayar que los problemas de investigación se formulan en el ámbito y con los elementos que proporciona el *modelo* (esto es, el tipo ideal de fenómeno), aunque en algunas ocasiones y debido a la confusión entre los dos niveles (el sistema empírico modelizado y el modelo teórico de dicho sistema) pueda parecer que se plantean directamente en el ámbito del fenómeno empírico, históricamente existente. Esto no significa que la construcción de los fenómenos deba preceder a la formulación de los problemas de investigación científica; de hecho, como veremos en el caso de la ciencia didáctica, ambos procesos se desarrollan en paralelo, dialécticamente.

primer movimiento hacia la emancipación institucional puesto que, parafraseando a Norbert Elias, el grado de emancipación (o *distanciamiento*) que una comunidad científica puede lograr depende de la forma estándar del saber alcanzado en la época en la que vive y de su capacidad para *formular conceptos* (Elias, 1983/1990).

De hecho, siempre que una disciplina científica introduce un *tipo ideal*, lo hace para utilizarlo en la construcción de fenómenos (ideales) y para poder compararlos con fenómenos emergentes en la realidad histórica a fin de aumentar el conocimiento de éstos. Weber cita como ejemplos de fenómenos la “ética calvinista”, la “economía capitalista”, el “feudalismo occidental”, el “artesano” y el “imperialismo”, entre otros.<sup>7</sup> Considera que caracterizar los tipos ideales permite construir fenómenos (ideales) cuya contrastación o comparación con la realidad histórica posibilita la formulación de cuestiones o problemas dirigidos a aumentar el conocimiento de dichos fenómenos. En general, cuando hablamos de “fenómeno social” nos referimos por una parte al sistema empírico históricamente existente (conjunto de hechos empíricos no muy bien delimitados y que nunca pueden conocerse perfectamente) y, por otra, al modelo construido por la ciencia social en cuestión utilizando uno o varios “tipos ideales” y postulando cierta relación entre ellos.

Según Weber, la *construcción o caracterización de un tipo ideal* se lleva a cabo mediante un proceso creativo que no puede describirse mediante reglas fijas pero que puede esquematizarse como sigue: a partir de un conjunto de hechos aparentemente desligados entre sí, el investigador, utilizando las herramientas (teóricas y metodológicas) que le proporciona una disciplina científica, elige algunos aspectos que presentan en común, en mayor o menor medida, los hechos citados, acentúa algunos de dichos aspectos y hasta incorpora aspectos que sólo están presentes de manera excepcional (e incluso pueden estar ausentes) en el conjunto de hechos de partida. De esta manera, después de postular algunas relaciones entre los aspectos (o variables) seleccionados, el investigador construye teóricamente un tipo ideal.<sup>8</sup>

En la misma línea, Bachelard identifica la *conceptualización*, esto es, la construcción de conceptos, con una operación que denomina “inducción”<sup>9</sup> en el sentido de objetivación de lo particular. Se trata de la operación creativa que consiste en inventar un *concepto general* –que puede asimilarse en cierto sentido a lo que Weber denomina *tipo ideal*– idóneo *para captar lo particular* –lo que Weber denomina “realidad empírica”–, porque se refiere a un fenómeno “desglosable del devenir” de la vida social (Torretti, 2012).

---

<sup>7</sup> Los tipos ideales no tienen que ser necesariamente conceptos abstractos de fenómenos “estáticos”. Los tipos ideales pueden referirse a un proceso evolutivo, esto es, es posible construir un *tipo ideal de evolución* siempre que se distinga claramente entre esta construcción y la historia. Esta construcción puede tener un valor heurístico considerable y, por tanto, ser muy útil para el historiador.

<sup>8</sup> En Gascón (2011b, pp. 13-14) se ejemplifica este proceso en el caso de la caracterización del “enfoque por competencias” como un tipo ideal. En trabajos anteriores hemos caracterizado algunos tipos ideales de *modelos docentes: teóricos, técnicos y procedimentales*, entre otros (Gascón, 1994, 2001a).

<sup>9</sup> Esta operación que Bachelard denomina *inducción* no tiene nada que ver con una forma de inferencia lógica que conduce de premisas particulares a conclusiones universales, lo que, de por sí, es imposible.

En el caso de la didáctica de las matemáticas, hay que subrayar que la noción de *fenómeno didáctico* no desempeña en la actualidad un papel central en la mayoría de enfoques. En los escasos trabajos en los que aparece, lo hace normalmente como una noción *paracientífica*, esto es, como una noción no tematizada que no se toma como objeto de estudio en sí misma. Sin embargo, la noción de fenómeno didáctico desempeñó un papel crucial en el nacimiento de la *teoría de las situaciones didácticas* (en adelante, TSD):

Bien qu'à partir de formulations sensiblement différentes selon les textes, Guy Brousseau (1997) a, dès le début, défini la didactique des mathématiques comme la science qui se donne comme *but essentiel la connaissance des phénomènes didactiques* qui deviennent alors à la fois construction et objet d'étude, de la même manière que la physique étudie cette construction propre que sont les phénomènes physiques, la sociologie les phénomènes sociaux, etc. (avec toutes les controverses historiques autour de la distinction, évolution et délimitation des phénomènes qu'étudie chaque science). (Artigue, Bosch y Gascón, 2011, p. 37)

Fue precisamente Guy Brousseau el primero en propugnar la necesidad, para la didáctica, de crear *conceptos nuevos*, advirtiendo que en algunos casos dicha construcción, imprescindible para responder a las necesidades de la didáctica, podría requerir la modificación de los conceptos importados de otros campos científicos. En ese sentido, se preguntaba de forma retórica:

Existe-t-il une «variété didactique» des concepts de *sens*, de *mémoire*, de *structure*, de *décimal*, etc., inconnue en linguistique, en psychologie ou en mathématique? (Brousseau, 1986, p. 39)

En particular, muchos de los conceptos que ha construido la didáctica de las matemáticas como, por ejemplo, “efecto Topaze” y “deslizamiento metacognitivo” (Brousseau, 1986), pueden considerarse como tipos ideales que designan fenómenos didácticos que, al igual que la “economía capitalista” o el “artesano”, constituyen por sí mismos (una vez descritos y caracterizados) fenómenos (ideales) cuya comparación con la contingencia permite plantear problemas para seguir progresando en el estudio de dichos fenómenos.

En el siguiente apartado mostraremos que los *modelos epistemológicos de referencia* (en adelante, MER) construidos en el ámbito de la TAD pueden considerarse como tipos ideales que han permitido la emancipación de la didáctica de las matemáticas respecto de los modelos epistemológicos dominantes en las diversas instituciones que forman parte de su objeto de estudio y, gracias a su función fenomenotécnica, los MER han hecho visibles nuevos fenómenos didácticos.

### 3. FUNCIÓN FENOMENOTÉCNICA DE LOS MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DE REFERENCIA<sup>10</sup> Y EMANCIPACIÓN EPISTEMOLÓGICA DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

En el caso particular de la didáctica de las matemáticas, la relatividad institucional del saber matemático –puesta en evidencia por la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1985/1991)– y la consiguiente entrada del saber matemático en la problemática didáctica, provocaron que esta disciplina tuviera que asumir explícitamente la responsabilidad de analizar los modelos epistemológicos del saber matemático vigentes en las instituciones que intervienen en los procesos de transposición.

Para llevar a cabo dicho análisis, esto es, para tomar la matemática escolar (y, en general, la matemática institucionalizada) como objeto de estudio de la didáctica, fue preciso construir modelos epistemológicos *específicos* o locales (compatibles con un modelo epistemológico *general* o global)<sup>11</sup> de los diferentes ámbitos de la actividad matemática, a fin de tomarlos, en primera instancia, como sistemas de referencia útiles para analizar los modelos dominantes en las diferentes instituciones:

Toute recherche en didactique qui se propose d'étudier les phénomènes relatifs à un domaine des mathématiques (par exemple l'algèbre élémentaire), et dans une institution didactique donnée, ne devrait pas assumer tel quel le modèle implicite prévalant dans l'institution, mais devrait le prendre en compte en tant qu'objet d'étude, c'est-à-dire comme faisant partie des faits didactiques qui constituent la base «empirique» de la recherche. Pour cela, le chercheur a besoin d'un «point de vue» particulier, c'est-à-dire d'un modèle alternatif du domaine d'activité mathématique enseigné qui lui serve de *cadre de référence* pour interpréter le modèle dominant dans l'institution qu'il étudie. Or, tout modèle local utilisé pour étudier un domaine particulier des mathématiques enseignées va prendre sa place dans un modèle global de l'activité mathématique qui restera, selon les cas, plus ou moins explicité par le chercheur. (Gascón, 1994-1995, p. 44)

A los citados “modelos alternativos”, cuya construcción es responsabilidad de la didáctica, se les asignó desde el principio una función fenomenotécnica y un carácter relativo y provisional:

---

<sup>10</sup> La función fenomenotécnica de los modelos epistemológicos de referencia ha sido analizada en Schneider (2013). Agradezco a la autora el acceso a una versión provisional del texto completo de dicha conferencia.

<sup>11</sup> El *modelo epistemológico general* de las matemáticas que propone la TAD ha ido evolucionando. En estos momentos se formula en términos de la estructura y la dinámica de las *praxeologías matemáticas* (Chevallard, 1999, 2002).

[...] en la interpretación –e incluso en la mera formulación– de los fenómenos didácticos, [...] es imprescindible la utilización de un modelo específico de la forma como se generan y se desarrollan los conocimientos matemáticos involucrados en dichos fenómenos. [...] la tesis anterior, lejos de quitar responsabilidades a los didácticos, las acrecienta puesto que son éstos los responsables en gran medida de elaborar los modelos específicos que precisan para estudiar los fenómenos didácticos [...] estos modelos deben interaccionar (esto es, deben poder ser evaluados, corregidos y contrastados) no sólo con los datos históricos sino también con los hechos didácticos (una vez interpretados como fenómenos). (Gascón, 1993, p. 302)

Y, como es lógico, se subrayó la relación entre esta función fenomenotécnica y el papel de dichos modelos como instrumentos de *emancipación epistemológica* de la ciencia didáctica puesto que, al posibilitar un distanciamiento respecto de los modelos epistemológicos dominantes en las diversas instituciones y la correspondiente emancipación de los condicionantes que éstos conllevan, permiten construir (“hacer visibles”) fenómenos que habían permanecido invisibles:

De esta manera podremos tomar en consideración algunos fenómenos didácticos que no son visibles en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas debido, en parte, al prejuicio que identifica el “álgebra elemental” con la “aritmética generalizada”. Dichos fenómenos, para ser estudiados, deberían ser producidos artificialmente mediante una ingeniería didáctica adecuada. (Ibíd., pp. 326-327)

Además, el *modelo epistemológico dominante* de cierto ámbito del saber matemático enseñado (en una institución determinada) condiciona fuertemente no sólo el tipo de actividades matemáticas que será posible llevar a cabo en dicha institución en torno al ámbito matemático en cuestión, sino también las correspondientes actividades *didácticas* que se materializan en un *modelo docente* (Gascón, 1994, 2001a). En consecuencia, la emancipación epistemológica comporta, en cierta medida, la emancipación respecto del modelo docente dominante en la institución concernida, lo que proporciona autonomía para cuestionarlo y para proponer otros modelos docentes alternativos.

A partir de este momento, pasaron a formar parte integral del objeto de estudio de la didáctica no sólo la incidencia del modelo epistemológico dominante en la institución (habitualmente implícito) sobre la percepción institucional de los “hechos didácticos”, sino también la influencia de los posibles modelos alternativos que construye la didáctica sobre la interpretación de los mismos hechos por parte del didacta.

La recherche en didactique devrait pouvoir expliquer pourquoi un certain modèle implicite existe dans une institution didactique au détriment d'autres modèles possibles; comment ce modèle implicite agit sur la structure et les fonctions des différents dispositifs didactiques; et comment les phénomènes qui s'y produisent dépendent

des caractéristiques de ce modèle. Elle devrait pouvoir expliquer, par ailleurs, comment la perception de ces phénomènes peut varier suivant les différents modèles du savoir mathématique qu'adopte le chercheur. [...] Par conséquent, il serait souhaitable que le modèle épistémologique utilisé soit explicite –ou, en tout cas, potentiellement explicitable–, étant donné qu'il conditionne de façon décisive ce que l'on entendra par «enseigner et apprendre l'algèbre élémentaire» (par exemple) et, par extension, «enseigner et apprendre des mathématiques». (Gascón, 1994-1995, p. 44)

Se pone así claramente de manifiesto la relevancia metodológica de explicitar los modelos epistemológicos alternativos (construidos por la didáctica), cuyo principal referente previo lo constituye la noción de “situación fundamental” específica de un conocimiento matemático (Brousseau, 1986). Esta noción, construida en el ámbito de la TSD, constituye el primer ejemplo de la productividad, para la investigación didáctica, de estos modelos epistemológicos específicos alternativos a los modelos vigentes en la institución escolar. Podemos así caracterizar los enfoques o las teorías didácticas que forman parte del *programa epistemológico* de investigación en didáctica de las matemáticas, inaugurado por la TSD (Gascón, 1998, 2003, 2013), como aquellos que cuestionan los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las diversas instituciones y, lo que es más importante, como aquellos que *elaboran explícitamente modelos epistemológicos alternativos* de los diferentes ámbitos de las matemáticas y los *utilizan como sistema de referencia* para construir fenómenos didácticos y para formular y abordar los problemas didácticos asociados.

Fue a partir del año 2000 que los citados modelos epistemológicos alternativos se denominaron explícitamente modelos epistemológicos de referencia (MER<sup>12</sup>):

Hemos presentado hasta aquí la algebrización hipotética de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad, proceso que tomamos como *modelo epistemológico de referencia*. Utilizaremos ahora este modelo para describir el tipo de ingredientes praxeológicos que componen la actual organización matemática escolar en torno a la proporcionalidad de magnitudes [...] (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, p. 282)

Y, a partir del momento en que se dispuso de la noción de *praxeología* pudo formularse el MER como una arborescencia de praxeologías de complejidad y completitud crecientes (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004):

---

<sup>12</sup> En los últimos desarrollos de la TAD, la noción de MER se ha generalizado a la de *modelo praxeológico de referencia* (MPR). Esta generalización es coherente con la estructura praxeológica de los MER y ha estado motivada por la ampliación del objeto de estudio de las ciencias didácticas (en consonancia con la emancipación radical antes descrita), esto es, para abarcar las condiciones y restricciones de la vida de las sociedades humanas bajo las cuales las *praxeologías de todo tipo* (tanto científicas como no científicas) viven, migran, cambian, operan, desaparecen, renacen, etc., en las instituciones humanas (Chevallard, 2006).

Étant donné un processus didactique sur un thème mathématique déterminé, la première étape de notre technique d'analyse suppose l'adoption de ce que nous appelons un *modèle épistémologique de référence* sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes d'*organisations* ou *praxéologies mathématiques* (Chevallard, 1999). Le modèle épistémologique que nous proposons ici est formé par une suite de trois *types de praxéologies mathématiques* de nature distincte dont chacun peut être considéré comme un développement du précédent. (Bolea et ál., 2005, p. 154)

Retrospectivamente podemos comprobar que todos y cada uno de los MER que se han construido en el ámbito de la TAD han cumplido una función fenomenotécnica: en cada caso, la construcción del MER ha permitido dar visibilidad a ciertos fenómenos didácticos y ha proporcionado herramientas para formular problemas didácticos cuya respuesta ha aumentado el conocimiento de dichos fenómenos.

A título de ejemplo tomaremos uno de los primeros MER descritos en términos de una sucesión de praxeologías matemáticas progresivamente más algebrizadas. Se trata del MER en torno al *proceso de algebrización de la proporcionalidad*, descrito en Bolea, Bosch y Gascón (2001) y citado anteriormente. Partiendo de la organización matemática *clásica* en torno a la *proporcionalidad de magnitudes*, se construyen tres praxeologías situadas respectivamente en niveles progresivos de algebrización y tales que cada una de ellas contiene (y, en cierta forma, modeliza) a la anterior. En el primer nivel se construye una ampliación de la organización matemática clásica mediante la modernización del lenguaje técnico de la proporcionalidad expresada mediante el uso de las ecuaciones como modelos y la consiguiente transformación de las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes en relaciones entre *variables numéricas*; en el segundo nivel se lleva a cabo una *reducción* de todos los tipos de proporcionalidad clásica (directa, inversa, simple y compuesta) a la *función lineal*; y, finalmente, en el tercer nivel se construye una praxeología matemática en torno a la *modelización funcional general*.

La construcción de dicho MER ha permitido hacer visibles (construir y empezar a estudiar) dos importantes fenómenos didácticos emergentes en los actuales sistemas de enseñanza y que hemos designado respectivamente como “evitación del álgebra” y “aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad”. Para estudiar dichos fenómenos hemos formulado problemas didácticos tales como: ¿Por qué los problemas de proporcionalidad tienden a considerarse en la organización matemática escolar como problemas aritméticos alejados del ámbito algebraico? ¿Qué restricciones impiden en la matemática escolar unificar todos los tipos de proporcionalidad clásica (directa, inversa, simple y compuesta) mediante el modelo de la función lineal y alcanzar así el segundo nivel de algebrización de la proporcionalidad descrito en el MER? ¿Qué condiciones se requieren para que la actividad matemática alcance un nivel de algebrización (en términos de los indicadores del grado de algebrización) que haga

necesaria la emergencia de la modelización funcional general descrita en el MER? (Ibíd., pp. 282-289).

Entre los MER *específicos* elaborados por nuestro grupo de investigación podemos citar, haciendo uso de una etiqueta que alude al ámbito de la actividad matemática involucrada en cada caso, los siguientes: divisibilidad elemental (Gascón, 2001b); medida de magnitudes continuas (Bolea et ál., 2005; Sierra, 2006); límites de funciones (Barbé et ál., 2005); proporcionalidad en el ámbito de las relaciones funcionales elementales (García et ál., 2006); sistemas de numeración (Sierra et ál., 2007); modelización matemática (Barquero et ál., 2010; Serrano et ál., 2010) y modelización algebraico-funcional (Ruiz-Munzón et ál., 2011). En otras ocasiones hemos utilizado un MER *general* de la actividad matemática con el objetivo de caracterizar el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la enseñanza secundaria española (Bosch et ál., 2004) o bien para reformular el problema de la metacognición en el ámbito de la TAD (Rodríguez et ál., 2008).

Pero cada uno de dichos MER sólo queda relativamente caracterizado cuando se describen, como en el ejemplo citado anteriormente, los correspondientes fenómenos didácticos asociados y algunos de los problemas didácticos cuyo estudio ha permitido, en cada caso, aumentar el conocimiento de los fenómenos que se han “hecho visibles” (o se han construido) con ayuda del MER.

**Tesis (1):** *Los MER específicos o locales (compatibles con un MER general) se construyen en didáctica de las matemáticas como herramientas heurísticas para hacer visibles ciertos fenómenos didácticos. Su primera función es la de proporcionar los elementos necesarios para formular problemas didácticos cuyo estudio permitirá mejorar el conocimiento de dichos fenómenos. Sólo de esta forma, la didáctica puede emanciparse respecto del modelo epistemológico dominante en las instituciones concernidas y tener la posibilidad de construir de manera autónoma su propio objeto de estudio.*

Para completar esta tesis, debemos tomar en cuenta las siguientes características de los MER:

- a. Un MER específico o local no está asociado simplemente a un ámbito de la actividad matemática, sino a uno o más fenómenos didácticos (que involucran un ámbito más o menos extenso de la actividad matemática). Por lo tanto, si se trata de estudiar diferentes fenómenos didácticos emergentes en un mismo ámbito de la actividad matemática, será necesario construir diferentes MER (Schneider, 2013).
- b. La construcción de un MER, la explicitación de los fenómenos asociados y la formulación de los problemas didácticos correspondientes son procesos simultáneos que se desarrollan dialécticamente.
- c. Un MER es una respuesta tentativa inicial a las cuestiones que forman parte de la *dimensión epistemológica* de los problemas didácticos involucrados (Gascón,

2011a) y, como tal, es imprescindible (en el ámbito de la TAD) para poder formular los problemas didácticos como verdaderos problemas de investigación.

- d. Todo MER es provisional, es una hipótesis científica, y debe ser contrastado empíricamente. Si un MER específico no cumple su función fenomenotécnica, deberá ser revisado y hasta modificado profundamente. La piedra de toque para decidir entre dos MER rivales cuál de ellos es más útil heurísticamente (o para decidir cómo modificar un MER a fin de poder estudiar nuevos aspectos de un fenómeno didáctico), son los hechos didácticos interpretados como fenómenos (véase apartado 5).

Hemos mostrado que la didáctica (de las matemáticas) se sustenta forzosamente en un modelo epistemológico (de las matemáticas), por lo que podríamos decir que la didáctica es *ciega* si ignora que, de hecho, está utilizando un modelo epistemológico determinado, por latente e impreciso que sea, y que este modelo está condicionando fuertemente no sólo los problemas de investigación didáctica que pueden formularse, sino también las respuestas que se considerarán admisibles.

#### 4. EMANCIPACIÓN EPISTEMOLÓGICA DE LA HISTORIA DE LA CIENCIA

En este apartado, a partir de una reinterpretación de la obra de Lakatos, pretendemos empezar a mostrar que las conclusiones relativas al papel de los MER en didáctica de las matemáticas son aplicables, *mutatis mutandis*, al caso de la historia de la ciencia y, en particular, al de la historia de las matemáticas.

La intención de Lakatos en su obra *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales* era la de intentar explicar “[...] de qué modo la historia de la ciencia debería aprender de la filosofía de la ciencia y viceversa” (Lakatos, 1971/1982, p. 11). De manera un poco más precisa, parafraseando a Sierra (2006), podemos decir que Lakatos persigue, al menos, los siguientes objetivos:

- a. Subrayar el *carácter empírico de la filosofía de la ciencia* (negado, por ejemplo, por Popper que no creía que la historia de la ciencia pudiera servir para contrastar las teorías de la filosofía de la ciencia).
- b. Mostrar la necesidad ineludible para la historia de la ciencia de utilizar, de forma más o menos explícita, un *modelo epistemológico del saber científico*.
- c. Contribuir a *emancipar al historiador de la ciencia* y a la *historia de la ciencia* de la sujeción a la ideología vigente en la comunidad científica (y en el resto de instituciones que forman parte de su objeto de estudio), en lo referente a la forma de interpretar la naturaleza de la ciencia.

Cuando Lakatos indica que la filosofía de la ciencia proporciona *metodologías normativas de la ciencia*<sup>13</sup> (o teorías de la racionalidad científica o lógicas del descubrimiento científico o, en definitiva, definiciones de ciencia), podemos interpretar que se está refiriendo a *modelos epistemológicos generales* de la actividad científica.<sup>14</sup> Además, en lo que concierne al trabajo del historiador de la ciencia, Lakatos señala que cada metodología funciona como (o sustenta) una teoría (o programa de investigación) *historiográfica*, esto es, una *teoría metahistórica*.

Hemos expuesto brevemente cuatro teorías de la racionalidad del progreso científico –o lógicas del descubrimiento científico–. Se ha mostrado cómo cada una de ellas proporciona un sistema teórico para la reconstrucción racional de la historia de la ciencia. [...] Cada reconstrucción racional elabora algún modelo característico del desarrollo racional del conocimiento científico. Sin embargo, todas estas reconstrucciones *normativas* deben ser completadas por teorías externas *empíricas* para explicar los factores residuales no racionales. La historia de la ciencia es siempre más rica que su reconstrucción racional. (Ibíd., pp. 37-38)

Aparece aquí una importante analogía con la didáctica porque, al igual que en el caso de ésta, Lakatos muestra que toda investigación relativa a la historia de la ciencia utiliza como referencia, de manera más o menos explícita, una teoría del método científico o MER general que Lakatos denomina “lógica del descubrimiento científico”. Por esta razón, la *explicitación* de dicho MER general es una condición necesaria para hacer posible la crítica científica de los resultados obtenidos por el historiador de la ciencia:

Por supuesto, únicamente se puede criticar la historia interna haciendo explícita la metodología (generalmente latente) del historiador, mostrando cómo funciona en cuanto programa de investigación historiográfica. (Ibíd., p. 66)

Y, como el resto de ciencias sociales, la historia de la ciencia tiene la capacidad potencial de construir los fenómenos históricos y los problemas de investigación histórica asociados al estudio de dichos fenómenos. Pero la interpretación de los hechos históricos y la consiguiente construcción de fenómenos (relativos a la historia de la

---

<sup>13</sup> Las “metodologías *normativas* de la ciencia” de Lakatos equivalen a las “teorías del método científico” o “lógicas de investigación científica” de Popper. Se trata, en definitiva, de teorías epistemológicas del método científico que se materializan en un conjunto de *reglas metodológicas* que definen a la ciencia empírica: “[...] trataré de determinar las reglas (o, si se prefiere, las normas) por las que se guía el científico cuando investiga o cuando descubre algo [...]” (Popper, 1934/1973, pp. 48-49).

<sup>14</sup> El modelo epistemológico general de las matemáticas que propone Lakatos (su “lógica del descubrimiento matemático”) puede considerarse como un tipo ideal de modelo epistemológico que denomina el método de *conjeturas, pruebas y refutaciones* (Lakatos, 1976/1978, pp. 149-150). Se trata de un modelo epistemológico cuasi empírico (véase el apartado 5).

ciencia) dependerán en gran medida del MER general o metodología de la ciencia que se utilice, como pasa en el caso de la didáctica y en el resto de ciencias sociales.

Para subrayar esta idea, después de describir cuatro metodologías de la ciencia (*inductivismo*, *convencionalismo*, *falsacionismo metodológico* y *metodología de los programas de investigación científica*) y caracterizarlas (a modo de tipos ideales) mediante reglas o normas que rigen la aceptación y el rechazo de teorías científicas, Lakatos explica claramente que cada una de ellas determina diferentes *unidades básicas*<sup>15</sup> de análisis histórico (Ibíd., p. 25) y que cada metodología permite hacer “visibles” fenómenos que permanecen “invisibles” para las otras.

La metodología de los programas de investigación científica constituye, como cualquier otra metodología, un programa de investigación historiográfica. El historiador que acepte tal metodología como guía, buscará en la historia programas de investigación rivales, problemáticas progresivas y estancadas. Donde el historiador duhemiano vea una revolución en la simplicidad (como la de Copérnico), aquél buscará un programa progresivo a gran escala que se impone a otro estancado. Donde el falsacionista ve un experimento crucial negativo, aquél “predecirá” que no había tal experimento, que detrás de cualquier supuesto experimento crucial, detrás de cualquier supuesta batalla entre teoría y experimento, hay una lucha oculta entre dos programas de investigación. (Ibíd., p. 31)

En resumen, al igual que en el caso de la didáctica, la utilización de los MER es inevitable en historia de la ciencia. Y, de nuevo, la *ceguera* del historiador (o de la propia historia como disciplina) consistiría en ignorar que, de hecho, se está utilizando tal modelo epistemológico y que, en la medida que sea latente y no explícito, no podrá cumplir plenamente su función de instrumento de emancipación.

**Tesis (2):** *La historia de la ciencia utiliza como modelo de referencia, de manera más o menos implícita, un modelo epistemológico general. La explicitación de este MER general y su utilización para interpretar los hechos históricos como (rasgos de) fenómenos y para formular los problemas de investigación asociados, constituye una condición necesaria para: a) emanciparse de la asunción acrítica del modelo epistemológico dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, b) cuestionar la forma de interpretar los problemas científicos e historiográficos en dichas instituciones, y c) construir de manera autónoma su objeto de estudio.*

---

<sup>15</sup> En el caso de la didáctica de las matemáticas, la elección de la *unidad de análisis* de los procesos didácticos determina en gran medida el tipo de fenómenos que se estudian y los problemas didácticos que se pueden formular (Bosch y Gascón, 2005).

## 5. CONTRASTACIÓN EMPÍRICA DE LOS MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DE UN ÁMBITO *ESPECÍFICO* DE LAS MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA GÉNESIS DEL ÁLGEBRA

¿Cómo se pueden criticar estas construcciones teóricas, estos modelos epistemológicos de la ciencia (o teorías del progreso científico) que utilizan el historiador y el didacta como MER? ¿De qué herramientas dispone la comunidad científica para contrastar su valor heurístico y, en particular, para comparar dos teorías rivales? La respuesta de Lakatos consiste en postular que, dado que todas las metodologías funcionan como teorías historiográficas, pueden criticarse analizando las reconstrucciones históricas racionales a las que ellas conducen.

[...] *la historia* (en un sentido que ha de ser cuidadosamente especificado) *puede considerarse como una "prueba" de sus reconstrucciones racionales.* (Lakatos, 1971/1982, p. 46)

En este punto surge una dificultad importante puesto que no hay acuerdo respecto a la fuerza probatoria de los diversos episodios históricos y, además, cada metodología puede encontrar ejemplos que la vindiquen y ejemplos que no los puede encajar (Iranzo, 2005). Mostraremos en este último apartado que dicha dificultad puede solventarse localmente utilizando, "en un sentido que ha de ser cuidadosamente especificado", los MER *específicos* o locales de los diferentes ámbitos de la actividad matemática.

La tesis de Iranzo (2005) hace alusión a las metodologías generales de la ciencia y está sustentada en la hipótesis implícita según la cual la base empírica de la epistemología se limita a los hechos históricos y, en consecuencia, en que los episodios históricos constituyen el único material disponible para contrastar empíricamente las metodologías o teorías de la ciencia. Para cuestionar esta hipótesis en el caso de las matemáticas, empezaremos por describir brevemente la evolución de la epistemología de las matemáticas como disciplina. Veremos así que dicha evolución está ligada a la ampliación sucesiva de su objeto de estudio y, en consecuencia, al *aumento progresivo de su base empírica* provocado por la evidente inadecuación de ésta para abordar el problema que la epistemología plantea en cada momento. En Gascón (2001a), completando el esquema de los dos grandes tipos de modelos epistemológicos generales de las matemáticas descrito en Lakatos (1978/1981), se propone una reconstrucción racional de la evolución de este problema que sintetizamos brevemente a continuación:

- a. Los modelos epistemológicos clásicos situados dentro del *euclideanismo* (el *logicismo* de Russell, el *formalismo* de Hilbert y el *intuicionismo* de Brouwer) tenían como único objetivo la *justificación lógica* de las teorías matemáticas y no necesitaban ninguna base empírica.
- b. Los modelos epistemológicos *cuasi empíricos* pretendían resolver el problema

más amplio del *desarrollo del conocimiento matemático* y, por esta razón, requerían la utilización, como base empírica, de los *datos históricos*.

- c. La epistemología *constructivista* piagetiana pretendía explicar no sólo cómo se establece que una teoría científica es superior a otra, sino también cuáles son los *instrumentos* y los *mecanismos* que provocan el paso de una teoría de nivel inferior a otra de nivel superior. Este objetivo más amplio requiere utilizar como base empírica los datos de la *psicogénesis*, además de los que proporciona la historia de la ciencia.

En resumen, el problema epistemológico comenzó siendo un problema puramente *lógico*, se convirtió después en un problema *histórico*, y para el constructivismo piagetiano ha acabado teniendo una *dimensión cognitiva* fundamental. En Gascón (1993), hemos puesto de manifiesto la necesidad de ampliar todavía más la base empírica de la epistemología mostrando que la *base empírica mínima* para abordar el problema epistemológico (incluso si aceptamos la versión del mismo que plantea el constructivismo), debe incluir, junto a los datos históricos, los hechos didácticos, esto es, los hechos relativos al *estudio* (de las matemáticas) en el sentido general propuesto en Chevillard, Bosch y Gascón (1997), que tienen lugar en todas las instituciones que intervienen en los procesos de transposición didáctica.

La nueva base empírica de la epistemología (ampliada) de las matemáticas incluye, por tanto, datos de todas las instituciones que intervienen, y que han intervenido a lo largo de la historia, en los procesos de producción, comunicación, utilización y transposición institucional de las praxeologías matemáticas. Podemos concluir así que la epistemología de las matemáticas comparte un mismo ámbito empírico con la didáctica y con la historia de las matemáticas.

Veremos a continuación que esta base empírica común, aunque no permita en primera instancia contrastar, corregir ni evaluar directamente los modelos epistemológicos *generales* de las matemáticas, proporciona medios para contrastar empíricamente los modelos epistemológicos de un ámbito específico de las matemáticas, esto es, los modelos epistemológicos locales.<sup>16</sup> Pretendemos así poner de manifiesto el impacto de la “evidencia histórica” (y de la “evidencia didáctica”) sobre la “teoría filosófica (local) de la ciencia”.

En efecto, al igual que en el caso del didacta, el historiador, además de utilizar un MER general de las matemáticas, debe construir un MER *específico* del ámbito de la actividad científica involucrado en el fenómeno que pretende estudiar. Estos MER específicos (o locales) deben ser, por supuesto, compatibles con el MER general adoptado. Los

---

<sup>16</sup> Esta limitación se explica principalmente porque los hechos y los fenómenos didácticos o históricos siempre se refieren a un ámbito específico de la actividad matemática y, en consecuencia, únicamente permiten contrastar y comparar (en primera instancia) los modelos epistemológicos de dicho ámbito de la actividad matemática. El paso de la contrastación empírica de los MER *específicos* o *locales* a la contrastación (aunque sea indirecta) del MER general que los contiene, constituye un problema delicado que no trataremos aquí.

MER específicos se utilizarán, en primera instancia, como sistemas de referencia para analizar e interpretar los modelos epistemológicos (específicos) dominantes, esto es, las formas vigentes en cada institución y en cada periodo histórico de interpretar los diferentes ámbitos de la actividad matemática. Pero, además, los MER específicos tienen en el caso de la historia (como en el caso de la didáctica) una función fenomenotécnica especialmente importante, puesto que determinan no sólo el *tipo* de fenómenos visibles y el *tipo* de problemas de investigación que se pueden formular, sino también los *fenómenos específicos* y los *problemas específicos* asociados.

Un ejemplo paradigmático del papel que puede desempeñar la investigación histórica (sustentada en un MER alternativo) en la evaluación y corrección de un modelo epistemológico *específico* dominante tanto en la comunidad de historiadores de las matemáticas como en la comunidad de didactas, nos lo proporciona el caso de la *génesis del álgebra*. Durante siglos, el modelo epistemológico dominante en dichas comunidades, MER<sub>1</sub> (y que sigue vigente en la mayoría de libros de texto y manuales de historia de las matemáticas), situaba los orígenes del álgebra en la escuela de Alejandría y, en particular, en la obra de Diofanto. Pero las investigaciones históricas de Jacob Klein, utilizando un MER<sub>2</sub> alternativo, esto es, una nueva definición de “álgebra”, mostraron claramente que la interpretación histórica que hace coincidir la génesis del álgebra con la introducción de “valores indeterminados” representados por letras, no era satisfactoria porque no permitía dar cuenta de determinados fenómenos históricos.

En effet, à partir de l'ouvrage de Jacob Klein, Piaget et Garcia (1982, pp. 135-141) montrent que cette interprétation ne permet pas d'expliquer certains phénomènes historiques importants, tels les difficultés rencontrées par les Grecs dans la solution de nombreux problèmes géométriques, difficultés qui ne peuvent s'expliquer que par l'indisponibilité d'instruments leur permettant de formuler les problèmes géométriques en termes d'opérations. Pour rendre raison de ces phénomènes, il convient de postuler, comme l'observe Klein (1934), que Viète crée une «nouvelle discipline» avec un niveau de généralisation qui n'était pas à la portée des Anciens. Deux démarches indépendantes convergent dans la genèse de cette «nouvelle algèbre»: l'analyse géométrique de Pappus et les méthodes arithmétiques de Diophante –d'où le fait que la nouvelle algèbre de Viète puisse être considérée à la fois comme *arithmétique* et *géométrique*. (Gascón, 1994-1995, p. 47)

Entre los principales rasgos del modelo epistemológico alternativo, MER<sub>2</sub>, de la génesis del álgebra que Jacob Klein construye y utiliza para dar razón de los citados fenómenos históricos, hasta entonces inexplicados, destacamos que, más allá de la designación simbólica de ciertos objetos, el álgebra se caracteriza por hacer un uso sistemático del *cálculo simbólico*, de los *parámetros* y de las *fórmulas* (que se tornan posibles por primera vez), por *tematizar el método* como tal y por interpretar que la génesis del álgebra está ligada, a la vez, a la *aritmética* y a la *geometría*. El MER<sub>2</sub> que

proponíamos provisionalmente en Gascón (1994-1995) como alternativa a la “aritmética generalizada” es completamente compatible con el que utiliza Jacob Klein. Su formulación actual, mucho más detallada, en términos de una red de praxeologías (Ruiz-Munzón et ál., 2011) nos ha permitido, en el ámbito de la investigación didáctica, hacer visibles y empezar a explicar ciertos fenómenos *didácticos*, así como dar razones de por qué el modelo que identifica el álgebra elemental con la “aritmética generalizada” sigue estando vigente en las instituciones didácticas.

Este ejemplo muestra cómo las investigaciones históricas de Jacob Klein sustentadas en cierto  $MER_2$  han corregido la interpretación clásica de la génesis histórica del álgebra sustentada en un  $MER_1$  (y, en consecuencia, han corregido la interpretación del álgebra que proponía el  $MER_1$ ) y cómo, paralelamente, investigaciones didácticas sustentadas en un  $MER'_2$  (muy próximo al  $MER_2$ ) han corregido, a su vez, la interpretación tradicional de la génesis escolar del álgebra que la identifica con una “aritmética generalizada”.

Cada una de las investigaciones citadas en el apartado 3 puede interpretarse como una contrastación empírica de cierto  $MER$  de un ámbito *específico* de las matemáticas escolares. Dichas investigaciones han propuesto modelos alternativos y, en cierta medida, han corregido los modelos epistemológicos específicos que han sustentado tradicionalmente ciertos ámbitos de la matemática escolar como, por ejemplo, la divisibilidad elemental, la medida de magnitudes continuas, los límites de funciones, el papel de la proporcionalidad en el ámbito de las relaciones funcionales, los sistemas de numeración y la modelización algebraico-funcional, entre otros.

Junto a estos ejemplos en el ámbito de las investigaciones didácticas, tenemos los que propone Lakatos (1976/1978) en el ámbito de las investigaciones históricas. Entre otros, el que se refiere a la prueba que dio Cauchy de la conjetura de Descartes-Euler relativa a la característica de los poliedros. En este caso, las investigaciones históricas del propio Lakatos, sustentadas en un  $MER_2$  específico del ámbito matemático en cuestión (compatible con el  $MER$  general de *conjeturas, pruebas y refutaciones*), corrigen las interpretaciones clásicas de los historiadores de las matemáticas sustentadas en un  $MER_1$  (compatible éste, a su vez, con el  $MER$  general que Lakatos designa como *metodología euclídea*).<sup>17</sup>

Estos ejemplos permiten dar una reinterpretación (ampliada al caso de la didáctica) de la tesis, aparentemente circular, según la cual: “[...] dos metodologías rivales pueden ser evaluadas con la ayuda de la historia (normativamente interpretada) [...]” (Lakatos, 1971/1982, p. 11).

Para ello, tomando como ejemplo prototípico el caso de la génesis del álgebra que hemos descrito anteriormente, formularemos la última de las tesis de este trabajo:

---

<sup>17</sup>[...] Euclides ha sido el genio maligno particular de la historia y la enseñanza de las matemáticas, tanto a nivel introductorio como a nivel creativo (Ibíd., p. 163). La *metodología euclídea* ha desarrollado el estilo deductivista que recubre el tema de estudio de un aire autoritario, comienza con una exclusión de monstruos disfrazada con definiciones generadas por la prueba y con el teorema completamente desarrollado [y suprime] la conjetura original, las refutaciones y la crítica de la prueba. El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece [...] (Ibíd., p. 166).

**Tesis (3):** *Supongamos que disponemos de un conjunto de proposiciones que constituyen una explicación  $E_1$  de la génesis, del desarrollo histórico, de la utilización, de la difusión o de la transposición institucional de cierto ámbito de la actividad matemática. Esta explicación, como todas, se sustenta en cierto  $MER_1$  específico de dicho ámbito. Supongamos, además, que aparecen hechos históricos (o didácticos) que no encajan en esta explicación y que, utilizando otro  $MER_2$ , la comunidad científica propone una explicación alternativa<sup>18</sup>  $E_2$  que permite dar cuenta de los hechos (históricos o didácticos) que permanecían inexplicados al tiempo que saca a la luz fenómenos hasta entonces invisibles. Podemos suponer, incluso, que  $E_2$  permite explicar por qué  $E_1$  no era capaz de dar cuenta de los hechos citados y por qué los correspondientes fenómenos permanecían invisibles para la mirada de la comunidad científica. En esta situación diremos que el  $MER_1$  ha sido evaluado (y corregido) con ayuda de la historia (o la didáctica) “normativamente interpretada” por el  $MER_2$ .*

En resumen, la didáctica de las matemáticas puede utilizar, junto a los hechos didácticos, los hechos históricos (una vez interpretados como fenómenos) para elaborar, evaluar y, en su caso, corregir determinados  $MER$  específicos. Análogamente, la historia de las matemáticas (y, por extensión, la historia de la ciencia) puede tomar en consideración ambos tipos de hechos en la construcción, evaluación y posible corrección de los  $MER$  específicos que utiliza. Se pone así de manifiesto que la historia y la didáctica (de las matemáticas), conservando su autonomía relativa, tienen en común una dimensión básica y fundamental: la *dimensión epistemológica*.

## AGRADECIMIENTOS

Investigación financiada por el proyecto EDU2012-39312-C03-03 del Ministerio de Economía y Competitividad de España.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., M. Bosch y J. Gascón (2011), “La TAD face au problème de l’interaction entre cadres théoriques en didactique des mathématiques”, en M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD*, Barcelona, Centre de Recerca Matemàtica, pp. 33-55.

Barquero, B., M. Bosch y J. Gascón (2010), “The ‘ecology’ of mathematical modelling: Constraints to its teaching at university level”, en V. Durand-Guerrier, S. Soury-

---

<sup>18</sup> Es importante subrayar que no sería posible comprender las limitaciones de un  $MER_1$  si no se dispone de un  $MER_2$  alternativo que permita formular (y predecir) fenómenos nuevos, además de reformular los antiguos desde una perspectiva más comprensiva.

- Lavergne y F. Arzarello (eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)*, Lyon, INRP, pp. 2146-2155 ([www.inrp.fr/editions/cerme6](http://www.inrp.fr/editions/cerme6)).
- Barbé, J., M. Bosch, L. Espinoza y J. Gascón (2005), "Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 59, pp. 235-268.
- Bolea, P., M. Bosch y J. Gascón (2001), "La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21, núm. 3, pp. 247-304.
- Bolea, P., M. Bosch, F. J. García, J. Gascón, L. Ruiz-Higueras y T. A. Sierra (2005), "Analyse de «La mesure en CM1» d'après la Théorie Anthropologique du Didactique", en M.-H. Salin, P. Clanché y B. Sarrazy (eds.), *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (Hommage à Guy Brousseau), Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Bosch, M. y J. Gascón (2005), "La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques", en A. Mercier y C. Margolinas (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 107-122.
- (2007), "25 años de transposición didáctica", en L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Jaén, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, pp. 385-406.
- Bosch, M., C. Fonseca, y J. Gascón (2004), "Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 24, núm. 2-3, pp. 205-250.
- Bourdieu, P. (2001), *Science de la science et réflexivité*, París, Editions Raisons d'Agir.
- Brousseau, G. (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 33-115.
- (1996), "La didáctica de les matemàtiques en la formació del professorat", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. 11, núm. 1, pp. 33-45.
- (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1985/1991), *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage (2a. edición 1991).
- (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.
- (2002), "Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation", en J.-L. Dorier, et al. (eds.), *Actes de la 11<sup>e</sup> École d'Été de didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 41-56.
- (2006), "Émanciper la didactique?", exposé présenté le 8 février 2006 dans le cadre du séminaire de l'axe II («Didactique et anthropologie des connaissances scolaires») de l'UMR ADEF.
- (2007), "Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique", en

- L. Ruiz-Higuereas, A. Estepa y F. J. García (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Jaén, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, pp. 705-746.
- Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, ICEUB/Horsori.
- Elias, N. (1983/1990), *Compromiso y distanciamiento*, Barcelona, Ediciones Península.
- García, F. J., J. Gascón, L. Ruiz-Higuereas y M. Bosch (2006), "Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, vol. 38, núm. 3, pp. 226-246.
- García, R. (1994), "Interdisciplinarietà y sistemas complejos", en E. Leff (comp.), *Ciencias sociales y formación ambiental*, Barcelona, Editorial Gedisa, UNAM.
- (2006), *Sistemas complejos. Conceptos, método y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria*, Barcelona, Editorial Gedisa.
- Gascón, J. (1993), "Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 13, núm. 3, pp. 295-332.
- (1994), "El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas", *Educación Matemática*, vol. 6, núm. 3, pp. 52-64.
- (1994-1995), "Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée»", *Petit x*, núm. 37, pp. 43-63.
- (1998), "Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, núm. 1, pp. 7-34.
- (2001a), "Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, vol. 4, núm. 2, pp. 129-159.
- (2001b), "Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria", *Quadrante. Revista de Investigação em Educação Matemática*, vol. 10, núm. 2, pp. 33-66.
- (2003), "From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes?", *For the Learning of Mathematics*, vol. 23, núm. 2, pp. 44-55.
- (2011a), "Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, vol. 14, núm. 2, pp. 203-231.
- (2011b), "¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 31, núm. 1, pp. 9-50.
- (2013), "La revolución brousseauiana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica", *AIEM*, núm. 3, pp. 69-87.
- Iranzo, V. (2005), "Filosofía de la ciencia e historia de la ciencia", *Quaderns de filosofia i ciència*, 35, pp. 19-43.

- Klein, J. (1934/1968), *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, Nueva York, Dover Publications.
- Kuhn, T. S. (1977/1983), *The Essential Tension. Selected Studies in Scientific Tradition and Change*, Chicago, The University of Chicago Press [Trad. española: *La tensión esencial. Estudios selectos sobre la tradición y el cambio en el ámbito de la ciencia*, Madrid, Fondo de Cultura Económica, 1983].
- Lakatos, I. (1971/1982), "History of Science and its Rational Reconstructions", en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.), *PSA 1970*, serie Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 8, Dordrecht, Reidel, pp. 91-136 [Trad. española: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Madrid, Tecnos, 1982].
- (1976/1978), *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press [Trad. española: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Madrid, Alianza Editorial, 1978].
- (1978/1981), *Mathematics, Science and Epistemology*, Philosophical Papers vol. 2, Cambridge, Cambridge University Press [Trad. española: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Madrid, Alianza, 1981].
- Popper, K. (1934/1973), *Logik der Forschung*, Viena, Springer [Trad. española: *La lógica de la investigación científica*, Madrid, Tecnos, 1973].
- (1956/2011), *Post scriptum a La lógica de la investigación científica*, Madrid, Tecnos, 2011.
- Piaget, J. y R. García (1982), *Psicogénesis e historia de la ciencia*, México, Siglo XXI (4a. edición).
- Rodríguez, E., M. Bosch y J. Gascón (2008), "A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the Anthropological Theory of the Didactic", *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, vol. 40, núm. 2, pp. 287-301.
- Ruiz-Munzón, N., M. Bosch y J. Gascón (2011), "Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización", en M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD*, Barcelona, Centre de Recerca Matemàtica, pp. 743-765.
- Schneider, M. (2013), "Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD: quel prix payer?", conferencia impartida en el Cuarto Congreso Internacional sobre la TAD (CITAD 4), celebrado en Toulouse en abril de 2013 (pendiente de publicación).
- Serrano, L., M. Bosch y J. Gascón (2010), "Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process", en V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)*, Lyon, INRP, pp. 2186-2195.
- Sierra, T. A. (2006), *Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas. El caso de los Sistemas de Numeración*, tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

- Sierra, T. A., M. Bosch y J. Gascón (2007), "Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los sistemas de numeración", en L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García, (eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Jaén, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, pp. 359-384.
- Torretti, R. (2012), "Fenomenotecnia y conceptualización en la epistemología de Gaston Bachelard", *Theoria*, núm. 73, pp. 97-114.
- Weber, M. (1904/2009), *La "objetividad" del conocimiento en la ciencia social y en la política social*, trad. de Joaquín Abellán, Madrid, Alianza Editorial, 2009.

## DATOS DEL AUTOR

### Josep Gascón

Universitat Autònoma de Barcelona, España  
gascon@mat.uab.cat  
www.atd-tad.org