

# Caracterización de procesos de significación de símbolos matemáticos en estudiantes universitarios

## Characterizing Meaning Processes of Mathematical Symbols on University Students

María Laura Distéfano<sup>1</sup>  
María Andrea Aznar<sup>2</sup>  
Marcel David Pochulu<sup>3</sup>

**Resumen:** Los símbolos matemáticos no suelen ser habitualmente considerados como objetos de enseñanza en asignaturas de la universidad, aunque su uso es esencial para el quehacer matemático. Se presentan resultados de una investigación centrada en el proceso de construcción del significado para algunos símbolos matemáticos en estudiantes universitarios. Se usaron herramientas y constructos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) para identificar las prácticas matemáticas involucradas en el proceso de construcción de significado y las funciones semióticas ligadas a dichas prácticas. Las mismas orientaron tanto el diseño de un instrumento específico como el análisis de los datos recolectados. El instrumento fue administrado a estudiantes de primer año de algunas carreras de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. A partir de los análisis sobre las producciones escritas de los estudiantes se investigó la secuenciación

---

**Fecha de recepción:** 5 de junio de 2018. **Fecha de aceptación:** 4 de febrero de 2019.

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, [mldistefano@fi.mdp.edu.ar](mailto:mldistefano@fi.mdp.edu.ar), [orcid.org/0000-0002-0122-7317](https://orcid.org/0000-0002-0122-7317)

<sup>2</sup> Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, [maznar@fi.mdp.edu.ar](mailto:maznar@fi.mdp.edu.ar), [orcid.org/0000-0002-1948-9315](https://orcid.org/0000-0002-1948-9315)

<sup>3</sup> Instituto Académico Pedagógico de Ciencias Básicas y Aplicadas de la Universidad Nacional de Villa María, [marcelpochulu@hotmail.com](mailto:marcelpochulu@hotmail.com), [orcid.org/0000-0003-2292-4178](https://orcid.org/0000-0003-2292-4178)

u orden en el que las prácticas identificadas se manifestaron. Los resultados obtenidos pueden constituir una guía para diseñar tareas y gestionar una clase en la que se promueva la construcción de significado de símbolos matemáticos, convirtiéndolos en objeto de enseñanza.

**Palabras clave:** *símbolos matemáticos, prácticas matemáticas, función semiótica, enfoque ontosemiótico, procesos de significación.*

**Abstract:** Mathematical symbols are not usually considered objects of teaching at university level, although they are essential for mathematical work. Results of the research work focused on the process of the construction of meaning of some mathematical symbols on university students are presented. Tools and constructs of the Ontosemiotic Approach of Knowledge and Mathematical Instruction (OSA) were used to identify the mathematical practices involved in the process of construction of meaning. Semiotic functions linked to these practices were also recognized. Mathematical practices and semiotic functions guided both the design of a specific instrument and the analysis of collected data. The instrument was administered to freshmen of some courses of the Universidad Nacional Mar del Plata, Argentina. The analysis of those students' written productions was the starting point to do research and find out a sequence of the above stated practices. The results obtained could be used as a guide for designing new tasks or managing the class in which the construction of meaning of mathematical symbols is promoted, so that they can become objects of teaching.

**Keywords:** *mathematical symbols, mathematical practices, semiotic function, ontosemiotic approach, meaning processes.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática es posible observar dificultades que los estudiantes universitarios manifiestan en la lectura y escritura de expresiones simbólicas (Lacués Apud, 2014; Distéfano, Pochulu y Font, 2015; Bardini y Pierce, 2015). Algunas de esas dificultades son tan elementales como el desconocimiento de algunos símbolos. Otras son de mayor complejidad como la imposibilidad de interpretar una proposición representada en

una expresión simbólica, o la de construir una expresión simbólica que esté correctamente formulada, desde el punto de vista sintáctico. En particular, los estudiantes que inician una carrera universitaria que tiene asignaturas de Matemática en su plan de estudios, revelan desconocimiento de distintos aspectos que constituyen el significado de símbolos matemáticos que son de uso habitual en las asignaturas de este nivel de enseñanza. Es posible detectar que numerosos estudiantes no están familiarizados con las prácticas matemáticas ligadas a la construcción de significado de un símbolo, lo que conduce tanto a dificultades en la lectura de materiales didácticos y bibliografía, como a errores en las producciones escritas. En Argentina, una de las posibles causas atribuibles a esta situación podría ser el hecho de que, los símbolos matemáticos que se requieren en el nivel superior, son utilizados con poca o ninguna frecuencia en la escuela secundaria, lo que provoca limitaciones y obstáculos en los estudiantes que comienzan asignaturas de Matemática en la universidad. Si bien los símbolos constituyen una herramienta fundamental en el quehacer matemático, particularmente en los primeros años de la universidad, no suelen ser objeto directo de enseñanza, y su significado se va generando de manera subsidiaria al de otros objetos matemáticos.

Son numerosas las investigaciones y publicaciones relativas a cuestiones simbólicas focalizadas en la educación primaria o secundaria. Muchas de ellas se centran en la transición de la aritmética al álgebra (Hiebert, 1988; Gómez Granell, 1989; Palarea Medina, 1999; Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Alcalá, 2002; Socas, 2011; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Cerdán, 2010; Rodríguez Domingo, 2015; Fernández Millán y Molina, 2016). En otras se detallan y caracterizan diversos tipos de errores, ligados a distintos factores, tales como la diferencia entre la actividad algebraica y la actividad aritmética, el uso de las notaciones y las convenciones, el significado de letras y variables, y la manipulación de símbolos sin sentido (Booth, 1988; Palarea Medina, 1999; Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Molina González, 2006; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Cerdán, 2010; Rodríguez Domingo y Molina, 2013; Herrera López, Cuesta Borges y Escalante Vega, 2016).

Bardini y Pierce (2015) analizan el uso de los símbolos en la transición entre la escuela secundaria y la universidad, y destacan las dificultades que las diferencias entre ambos niveles provocan en los estudiantes, en relación con los aspectos simbólicos. Situados en el nivel universitario se encuentran los trabajos de Camós y Rodríguez (2009) y de Colombano, Formica y Camós (2012), que analizan las problemáticas originadas en la falta de atención que los docentes

le otorgan al uso simultáneo del registro del lenguaje natural y del registro simbólico, al enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad. También centrado en temáticas del Cálculo, Güçler (2014) presenta un estudio sobre el simbolismo ligado a la noción de límite en estudiantes universitarios que toman el curso, provenientes de distintas carreras. Muestra un paralelismo entre el discurso coloquial del docente y sus formulaciones escritas en la pizarra, así como también comparaciones entre lo que algunos estudiantes declaran y lo que efectivamente escriben. Concluye que es importante no dar por sentado el poder comunicativo de los símbolos y advierte que, si no se atiende a los diferentes significados matemáticos que pueden generarse a partir del mismo símbolo, se podrían generar dificultades de comunicación en el aula.

Como parte del estudio de la complejidad cognitiva que presentan algunas tareas con expresiones simbólicas, Distéfano, Pochulu y Font (2015) identifican categorías en los tipos de respuestas que formulan estudiantes universitarios ante dichas tareas y describen algunos errores frecuentes vinculados a cuestiones simbólicas.

Las publicaciones de Distéfano, Urquijo y González (2010) y de Lacués Apud (2011, 2014) se focalizan en experiencias de enseñanza para mejorar las habilidades en el registro simbólico-algebraico con estudiantes de nivel universitario. Reportan un impacto positivo de distintas intervenciones educativas para favorecer el manejo de expresiones simbólicas, concluyendo que es posible promover una mayor competencia en los estudiantes en la utilización de símbolos matemáticos. Es por esto que resulta de interés estudiar el proceso de construcción de significado de los símbolos matemáticos, con el propósito de favorecer los procesos de significación y simbolización en la clase, cuando ello se estableciera como un propósito de enseñanza del docente.

En este trabajo se presentan algunos resultados de una investigación centrada en la descripción de los procesos de significación y simbolización, tomando la concepción pragmática de significado que adopta el Enfoque Ontosemiótico que propone Godino, Batanero y Font (2009). A partir de la identificación de algunas prácticas matemáticas vinculadas a la construcción de significado de algunos símbolos, se describe una secuenciación de su manifestación. Esta secuenciación podría resultar el punto de partida para el diseño de una intervención didáctica destinada a la enseñanza de los símbolos, como una manera de favorecer la construcción de su significado en los estudiantes.

## 2. MARCO TEÓRICO

Los lineamientos teóricos que han sido fundamento de la investigación que da origen a este artículo provienen del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), de Godino, Batanero y Font (2008).

En este enfoque, se considera una *práctica matemática* a “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino, Batanero y Font, 2009, p.4). Este concepto da origen a la noción de *significado* que se aborda en este enfoque. El significado de un objeto matemático se define como “el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7).

En este contexto, el aprendizaje supone la apropiación por parte del estudiante de los significados validados en el seno de una institución, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009). Por lo tanto, se torna relevante el proceso mediante el cual un sujeto crea un significado, vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Las funciones semióticas son “entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, signifiante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia” (Godino, Batanero y Font, 2009, p.8).

El EOS considera que objeto matemático “es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo, que interviene de algún modo en la actividad matemática” (Godino, Batanero y Font, 2009, p.4). Por consiguiente, en este contexto, es posible considerar a los símbolos matemáticos como un objeto. Particularmente, pueden encuadrarse en una de las categorías de los denominados *objetos primarios*: los elementos lingüísticos. El enfoque distingue seis tipos de objetos primarios, u objetos de primer orden: situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos o definiciones, propiedades, proposiciones y argumentos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). Los distintos objetos no resultan aislados entre sí, sino que se vinculan a través de las funciones semióticas construidas entre ellos, dado que pueden ejercer el rol de antecedente o de consecuente de las mismas (Godino, Batanero y Font, 2009).

### 3. METODOLOGÍA

La investigación que dio origen a los resultados presentados en este artículo es de tipo cuali-cuantitativa. Para llevarla a cabo se seleccionaron algunos símbolos de uso habitual en asignaturas de Matemática en el nivel universitario. El primero de los criterios utilizados para efectuar tal selección fue la frecuencia de uso en los materiales didácticos y en la bibliografía. El segundo criterio estuvo determinado por la categoría a la que pertenecen en el universo de los símbolos matemáticos. Se optó por símbolos que no tienen uso fuera del ámbito matemático y que fueron creados exclusivamente para representar ideas matemáticas. A este tipo de símbolos Pimm (1990) los denomina *logogramas* y Socas (2010) los define como *signos artificiales*. Esta característica de uso conduce a que la construcción de su significado se realice, casi exclusivamente, en el contexto de las clases de Matemática. Los símbolos elegidos para ser estudiados son:  $\in$ ,  $\subset$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\forall$  y  $\exists$ .

En las siguientes subsecciones se describen los aspectos metodológicos centrales de la investigación.

#### 3.1. PRÁCTICAS MATEMÁTICAS IDENTIFICADAS

El estudio de la construcción de significado de estos símbolos en el marco del EOS, requirió la determinación del conjunto de prácticas matemáticas que conforman, como sistema, dicho significado.

Para poder describirlas se partió de la idea de que el significado de un símbolo está ligado a tres elementos: la identificación, la sintaxis y la semántica. La consideración de estos elementos como constitutivos del significado de un símbolo matemático está basada en distintos fundamentos. Por un lado, se consideró que la *identificación* es la primera acción que un sujeto puede realizar con relación a un símbolo y que resulta necesaria para poder efectuar cualquier otra tarea vinculada con ese símbolo. Está basada en el primero, y más elemental, de los procesos cognitivos que Hiebert (1988) postula en relación con el desarrollo de competencias con símbolos matemáticos: *Conectar los símbolos con los referentes*. En relación con la *sintaxis* y la *semántica*, constituyen dos ramas de la semiótica (Peirce, 1986; Morris, 1985) que determinan características propias de un símbolo y que también han sido consideradas por otros autores que han abordado las cuestiones simbólicas en el ámbito de la enseñanza de la

Matemática, con una perspectiva didáctica (Gómez Granell, 1989; Pimm, 1990; Rojano, 1994; Goldin y Kaput, 1996; Palarea Medina, 1999; Alcalá, 2002; Serrano Gómez, 2005; Rodríguez y Zeballos, 2014; Chalé-Can, Font y Acuña, 2017).

La consideración de estos tres elementos condujo a la identificación de las siguientes prácticas matemáticas ligadas a la construcción de significado de un símbolo:

- Identificar en forma escrita u oral el vocablo asociado a un símbolo dado, o, recíprocamente, representar en forma escrita el símbolo asociado a un vocablo dado.
- Escribir una proposición de manera simbólica, respetando las reglas de sintaxis asociadas a los símbolos utilizados.
- Decidir si una expresión simbólica dada está correctamente escrita de acuerdo con las reglas de sintaxis de los símbolos empleados.
- Determinar el valor de verdad de una proposición dada de manera simbólica.
- Efectuar conversiones entre representaciones realizadas en el registro simbólico-algebraico y el registro coloquial.

La primera práctica mencionada está ligada al hecho básico de conocer el símbolo. De manera casi trivial, esta práctica resulta el paso inicial en el proceso de construcción de significado, ya que cualquier otra práctica que implique la utilización del símbolo en cuestión, no sería posible sin la identificación del correspondiente grafismo y sin la asociación con el vocablo del lenguaje coloquial que lo identifica.

La segunda y la tercera de las prácticas enumeradas están vinculadas al aspecto sintáctico, pues aluden al conocimiento de la estructura formal de la sintaxis asociada a un determinado símbolo. Estas prácticas suponen tanto identificar la secuencia correcta en la formulación de una expresión en la que participa el símbolo, como así también el rol que ejerce cada uno de los restantes símbolos que constituyen una expresión. Se las puede relacionar con la actividad cognitiva definida por Duval (2004) como '*formación de representaciones*' puesto que, según este autor, esta actividad cognitiva requiere efectuar o constatar la selección de símbolos apropiados dentro del registro en el que se forma la representación (en este caso el registro simbólico-algebraico) y combinarlos de acuerdo con las reglas de conformidad de dicho registro.

Finalmente, las dos últimas prácticas están ligadas a la cuestión semántica, es decir a la comprensión del contenido de la expresión simbólica. En particular, las conversiones mencionadas son esenciales en tareas de lectura pues, para interpretar el contenido semántico de una expresión, no resulta suficiente con la decodificación símbolo a símbolo.

### 3.2. FUNCIONES SEMIÓTICAS DEFINIDAS

Como componentes del significado, las prácticas matemáticas conducen a asociaciones de objetos.

La primera de las prácticas anteriores implica la asociación del grafismo del símbolo con el vocablo de la lengua natural que lo identifica. Las prácticas ligadas a la estructura formal de una expresión simbólica en la que aparece determinado símbolo, requieren la asociación del símbolo con la estructura sintáctica vinculada al uso de dicho símbolo. Las prácticas vinculadas con la comprensión del contenido semántico de una expresión simbólica implican, por un lado, asociar la proposición simbólica con su valor de verdad, y por otro, asociar la expresión simbólica y una expresión coloquial equivalente.

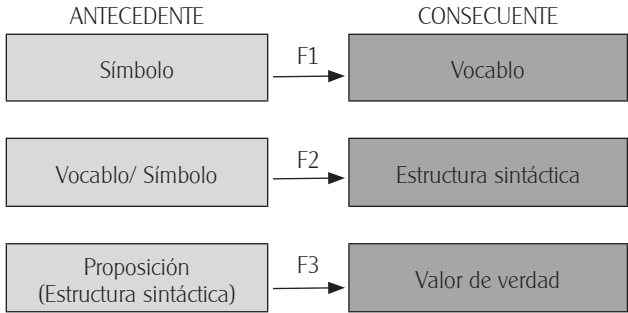
Estas asociaciones pueden representarse a través de funciones semióticas, que vinculan los distintos objetos involucrados en las prácticas matemáticas descritas. Se definieron tres funciones semióticas, a las que se denominó *principales*:

- F1: relaciona el símbolo con el vocablo de su denominación.
- F2: relaciona el vocablo/símbolo con la estructura sintáctica de la expresión que lo contiene.
- F3: relaciona la proposición en la que está presente el símbolo, con su valor de verdad, el cual depende también de los significados de los operandos involucrados.

Las funciones semióticas definidas, de acuerdo a los elementos que vinculan y a las prácticas matemáticas implicadas, pueden clasificarse como: *nominal* (F1), *sintáctica* (F2) y *semántica* (F3).

En la figura 1 se representan estas funciones semióticas principales, detallando en cada caso el antecedente y el consecuente.



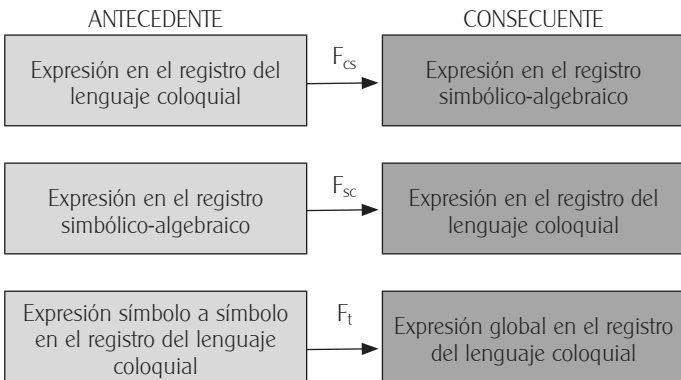


**Figura 1.** Funciones semióticas principales ligadas a la construcción de significado de un símbolo.

Para analizar las transformaciones de expresiones entre el registro de la lengua natural o coloquial y el registro simbólico-algebraico se definieron funciones semióticas específicas. Se les denominó:

- $F_{cs}$ : correspondiente a las conversiones del registro coloquial al simbólico.
- $F_{sc}$ : correspondiente a las conversiones del registro simbólico al coloquial.
- $F_t$ : correspondiente al tratamiento, que debe efectuarse en el registro coloquial, la cual es interna a dicho registro.

Estas funciones semióticas se representan en la figura 2, detallando su antecedente y su consecuente.



**Figura 2.** Funciones semióticas relativas a las conversiones y tratamientos

Las funciones semióticas definidas tuvieron incidencia en el diseño del instrumento construido para la recolección de datos y constituyeron una potente herramienta para el análisis.

### 3.3. INSTRUMENTO

Para la recolección de datos se construyó un instrumento *ad-hoc*, cuyo proceso de diseño estuvo formado por tres versiones sucesivas, con cada una de las cuales se tomó una muestra de datos. En el Anexo se presenta el protocolo de la tercera y última de las versiones, en el que pueden verse los enunciados de cada uno de los ejercicios que lo componen. Las actividades que se incluyeron están basadas en las prácticas matemáticas identificadas y en las correspondientes funciones semióticas cuya manifestación se pretende evaluar.

Entre las consideraciones que se tuvieron en cuenta en el diseño del instrumento, una de ellas estuvo focalizada en el contenido matemático representado. Se consideró el hecho de que el contenido matemático al que cada expresión refiere podía interferir en la información que se deseaba obtener en relación con el manejo del símbolo. Es decir, podría suceder que un estudiante no conociera el contenido matemático representado en una expresión simbólica y que ese desconocimiento afectara su desempeño en la resolución de la tarea, provocando algún tipo de error o, incluso, la omisión de la resolución. Esto provocaría una distorsión en la información –respecto de la cuestión simbólica– que se obtuviera de su respuesta, pues en muchos casos no se podría identificar con certeza el origen del error cometido. Con la intención de evitar esta situación, todas las expresiones utilizadas en el instrumento refieren a unidades temáticas que se imparten en la escuela secundaria, de modo que el contenido matemático al que cada expresión refiere no resulte un obstáculo en la comprensión de la misma.

En el Ejercicio 1, se solicita la escritura de la expresión coloquial correspondiente a cada uno de los símbolos en estudio, lo que permite evaluar la función semiótica F1. También se requiere la formulación de un ejemplo de uso del símbolo, lo cual está destinado a evaluar la función semiótica F2, en una tarea de escritura. Con el objetivo de evitar que se formularan como ejemplo expresiones tales como ' $x \in R$ ' o como ' $p \wedge q$ ', en las que el uso de literales no permite conocer con certeza a qué objetos hace referencia el estudiante, se incluyó en el enunciado la condición de que el ejemplo dado fuera verdadero, de modo

que los ejemplos fueran proposiciones. Esto permite evaluar, por un lado, el rol que juega cada uno de los símbolos que intervienen en la expresión en relación a la sintaxis (F2) y, por otro, la función semiótica relativa a la asignación del valor de verdad (F3), en una expresión generada por el estudiante.

En el Ejercicio 2, se pretende evaluar la función semiótica correspondiente a la sintaxis (F2), tanto en una tarea de lectura (necesaria para la decisión de responder si la expresión está erróneamente formulada) como en una tarea de escritura (al momento de reescribir aquellas expresiones que el alumno considere como incorrectamente escrita). En este ejercicio se incluyó tanto un ítem correctamente formulado, como uno que no lo está, para cada uno de los símbolos en estudio, los cuales no siguen un orden para evitar una automatización en las respuestas.

En el Ejercicio 3 se presentan algunas expresiones simbólicas para ser convertidas al lenguaje coloquial. También se solicita la determinación del valor de verdad de dichas expresiones y la justificación de esta última respuesta. Estas tareas permiten evaluar la manifestación de las funciones semióticas correspondientes a la conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial, al tratamiento en el registro coloquial y a la determinación del valor de verdad de una expresión dada.

En el Ejercicio 4 se requiere efectuar conversiones desde el registro coloquial al registro simbólico-algebraico. En este caso se evalúan las funciones semióticas correspondientes a este tipo de transformaciones.

Las funciones semióticas definidas no sólo se tuvieron en cuenta para el diseño y análisis de cada ejercicio, sino que también determinaron aspectos cuantitativos del relevamiento de datos. Para cada estudiante se consignó si se observaba, o no, la manifestación de cada una de las funciones semióticas involucradas en cada ítem. Esto dio lugar a la definición de 54 variables dicotómicas, asociadas a la manifestación de las funciones semióticas y a los distintos ítems, mediante las cuales se registraron los datos provenientes de las respuestas de cada estudiante. En la tabla 1 se presentan las funciones semióticas que se pretenden evaluar en cada ejercicio, de acuerdo a la tarea propuesta en cada uno de ellos. También se muestra la codificación con la que se identificó a cada función semiótica en los análisis posteriores.

**Tabla 1.** Funciones semióticas evaluadas en cada tipo de tarea propuesta.

Ejercicio	Función semiótica	Tarea	Código
1	F1	Determinar cómo se lee el símbolo	F1
	F2	Escritura sintácticamente correcta del ejemplo	F2-Ejem
	F3	Determinar del valor de verdad de la expresión propuesta como ejemplo	F3-Ejem
2	F2	Determinar que una expresión dada es sintácticamente correcta	F2-Fác
	F2	Detectar el posible error de sintaxis y reformular la expresión de manera sintácticamente correcta	F2-Dif
3	F <sub>sc</sub>	Efectuar la conversión del registro simbólico al coloquial	F <sub>sc</sub>
	F <sub>t</sub>	Obtener una oración que manifieste la idea global representada en la expresión simbólica	F <sub>t</sub>
	F3	Determinar el valor de verdad de cada expresión simbólica dada	F3-v/f
4	F <sub>cs</sub>	Efectuar la conversión del registro coloquial al simbólico	F <sub>cs</sub>

### 3.4. MUESTRA Y APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

La versión final del instrumento fue aplicada a 90 estudiantes de las carreras de Ingeniería, Profesorado en Matemática, Bioquímica y Licenciatura en Ciencias Biológicas, de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, dispuestos a formar parte de la investigación.

Se consideraron carreras que contienen la asignatura Álgebra en el primer año de su plan de estudios. Entre ellas, fueron seleccionadas aquellas en las que fue posible el acceso de los investigadores a sus estudiantes, dado que los docentes a cargo de las correspondientes cátedras permitieron la entrada a sus respectivas aulas y cedieron tiempo de sus clases para la toma de datos. Si bien en cada una de las carreras contempladas el “peso” de las materias de Matemáticas en el plan de estudios es distinto, las prácticas matemáticas que se evalúan en el instrumento son básicas y comunes a todas ellas.

Se tomó una muestra intencional de estudiantes, a los que se les solicitó la resolución del instrumento. La intencionalidad de la muestra consiste en la selección de estudiantes que cursan la primera asignatura del área Álgebra en el plan de estudios de las carreras mencionadas. Esta decisión estuvo basada en el hecho de que en esta área se emplean con más frecuencia los símbolos en estudio y, por consiguiente, estos estudiantes debían estar atravesando el proceso de construcción de significado de dichos símbolos.

La composición de la muestra quedó formada de la siguiente manera:

- Ingeniería: 43 estudiantes
- Licenciatura en Ciencias Biológicas: 10 estudiantes.
- Profesorado en Matemática: 16 estudiantes
- Bioquímica: 20 estudiantes

El instrumento fue aplicado, en todos los casos, en la semana siguiente al primer examen parcial de la asignatura de cada carrera. Esta decisión estuvo basada en la necesidad de que los estudiantes ya hubieran pasado por una etapa de estudio más intensa destinada a rendir dicho examen. El tiempo de resolución por parte de los estudiantes fue de 25-30 minutos.

### 3.5. PARTICIÓN DE LOS DATOS Y CÁLCULO DE LAS PROPORCIONES

Una vez relevados los datos, se indagó sobre la existencia de una secuenciación u orden en el que se manifiestan como construidas las distintas funciones semióticas que se evalúan en las tareas que componen el instrumento. Para ello, se procedió a agrupar los datos obtenidos para cada uno de los símbolos en estudio para, posteriormente, indagar si existen características comunes. Para agrupar los datos se siguieron una serie de pasos que se describen a continuación.

PASO 1: Se agruparon los resultados de los ítems correspondientes a las evaluaciones de las funciones semióticas de cada uno de los seis símbolos estudiados, en seis planillas Excel, y se las codificó como se muestra en la tabla 1. En cada fila se volcaron los datos de cada estudiante.

PASO 2: En cada una de las seis planillas se calculó, para cada estudiante, la *proporción* entre las funciones semióticas establecidas y las funciones semióticas involucradas, mediante el siguiente cociente:

*(Cantidad de funciones semióticas establecidas) / (Total de funciones semióticas para el símbolo)*

En cada una de las planillas, se reordenaron las filas con los datos de los estudiantes, tomando como criterio la proporción obtenida, en orden ascendente.

PASO 3: A partir del ordenamiento realizado se observó que los estudiantes que presentan la misma proporción no necesariamente manifiestan el establecimiento de las mismas funciones semióticas. Esto condujo a plantear si era posible realizar agrupamientos de estudiantes respecto de los cuales se pudiera establecer algún tipo de caracterización.

Para formar los grupos se efectuaron sucesivas particiones arbitrarias. En cada instancia, se formaron grupos con los estudiantes que hubieran obtenido un determinado rango de valores en la proporción computada. En cada grupo se calculó, para cada función semiótica, el porcentaje de miembros del grupo que manifestara esa función. El criterio que marcaba la partición entre un grupo y el siguiente era la comprobación de aumento del porcentaje de alumnos en alguna de las funciones semióticas.

A modo de ejemplo, y para clarificar los cálculos detallados en este paso, en la tabla 2 se expone un extracto de la planilla correspondiente al cuantificador existencial. En la misma se presentan los tres primeros grupos de la partición realizada. Puede notarse el aumento de porcentajes en la mayoría de las funciones semióticas al pasar de un grupo al siguiente.

**Tabla 2.** Extracto de la planilla del cálculo de proporciones y porcentajes para el símbolo  $\exists$

Alumno	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-Fác	Ft-Fác	F3-v/f-Fác	Fsc-Lóg	Ft-Lóg	F3-v/f-Lóg	F <sub>cs</sub>	Proporción	Grupo
33	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,25	1
49	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0,25	
18	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,33	
25	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0,33	
45	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0,33	
83	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,33	
87	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0,33	
Porcentaje	100	0	0	43	43	86	0	0	71	0	14	14		

Alumno	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-Fác	Ft-Fác	F3-v/f-Fác	Fsc-Lóg	Ft-Lóg	F3-v/f-Lóg	F <sub>cs</sub>	Proporción	Grupo
14	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0,42	2
34	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,42	
43	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0,42	
44	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,42	
47	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0,42	
55	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0,42	
63	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,42	
82	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,42	
3	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50	
4	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0,50	
5	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50	
9	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0,50	
12	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,50	
13	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50	
19	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,50	
23	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0,50	
31	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50	
50	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0,50	
53	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50	
68	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,50	
70	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50	
71	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50	
74	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0,50	
76	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50	
78	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50	
81	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50	
84	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,50	
Porcentaje	100	22	11	30	93	96	4	37	93	7	37	41		



Alumno	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-Fác	Ft-Fác	F3-v/fFác	Fsc-Lóg	Ft-Lóg	F3-v/fLóg	F <sub>cs</sub>	Proporción	Grupo
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0,58	3
2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58	
17	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0,58	
27	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
32	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58	
36	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58	
38	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0,58	
40	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
42	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,58	
46	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0,58	
51	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58	
59	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0,58	
65	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
73	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0,58	
79	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
89	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58	
<b>Porcentaje</b>	<b>100</b>	<b>25</b>	<b>13</b>	<b>31</b>	<b>94</b>	<b>94</b>	<b>13</b>	<b>63</b>	<b>100</b>	<b>6</b>	<b>75</b>	<b>88</b>		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

**PASO 4:** Una vez obtenidas las particiones, el propósito fue identificar y determinar qué funciones semióticas caracterizan a cada grupo, es decir, cuáles son las funciones semióticas que fueron manifestadas por la mayoría de los estudiantes en cada grupo. Se consideró que esa mayoría podía ser considerada, arbitrariamente, por un porcentaje mayor o igual al 70%, considerando que este porcentaje contempla casi a las tres cuartas partes de los estudiantes incluidos en cada grupo.

#### 4. RESULTADOS

A partir de los pasos descritos en la sección anterior, se determinaron las funciones semióticas que se manifiestan como construidas por 70% de los estudiantes de cada grupo. En las tablas 3 a 8 se representan los datos obtenidos marcando con un fondo gris aquellas funciones manifestadas por, al menos, 70% del grupo.

Por ejemplo, en la tabla 3, correspondiente a los datos del símbolo de pertenencia, puede observarse que la primera fila corresponde al grupo 1. Para este grupo, puede leerse que 70%, o más, de los estudiantes de este grupo manifestaron la función F1 y la función F2 evaluada, en tanto que las restantes funciones no se manifestaron como logradas por un porcentaje relevante de estudiantes.

En la segunda fila, correspondiente al grupo 2, las cuatro primeras funciones semióticas consideradas aparecen manifestadas en 70% de los estudiantes o más. Debe observarse que en este grupo la manifestación de la función semiótica evaluada en los ítems codificados como F2-Ejem y F3-Ejem, aparecen por primera vez, manifestados por 70% o más de los estudiantes.

En la fila del grupo 3 aparece en color gris por primera vez la función semiótica que corresponde a uno de los ítems del Ejercicio 2 considerado como difícil (F2-Dif1). Finalmente, en la última fila, que corresponde al grupo de estudiantes que obtuvo la máxima proporción de funciones semióticas consideradas para este símbolo, se observa que la totalidad de las mismas aparecen manifestadas.

**Tabla 3.** Manifestación de cada función semiótica para el símbolo  $\in$

Grupo \ Código del ítem	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif 1	F2-Dif 2
1						
2						
3						
4						

De manera análoga pueden interpretarse las Tablas 4 a 8 correspondientes a los restantes símbolos estudiados.

**Tabla 4.** Manifestación de cada función semiótica para el símbolo  $\subset$

Grupo \ Código del ítem	Código del ítem					
	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif 1	F2-Dif 2
1						
2	■			■	■	■
3	■	■	■	■	■	■
4	■	■		■	■	■
5	■	■	■	■	■	■

**Tabla 5.** Manifestación de cada función semiótica para el símbolo  $\forall$

Grupo \ Código del ítem	Código del ítem												
	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-1	Ft-1	F3-v/f-1	Fsc-2	Ft-2	F3-v/f-2	Fcs-1	Fcs-2
1	■			■									
2	■			■	■	■	■	■	■				■
3	■			■	■	■	■	■	■		■	■	■
4	■			■	■	■	■	■	■		■	■	■
5	■			■	■	■	■	■	■		■	■	■
6	■			■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

**Tabla 6.** Manifestación de cada función semiótica para el símbolo  $\exists$

Grupo \ Código del ítem	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-1	Ft-1	F3-v/f1	Fsc-2	Ft-2	F3-v/f2	Fcs
1	■			■		■	■	■	■			
2	■			■		■	■	■	■			
3	■			■	■	■	■	■	■		■	■
4	■	■		■	■	■	■	■	■		■	■
5	■		■	■	■	■	■	■	■		■	■
6	■		■	■	■	■	■	■	■		■	■

**Tabla 7.** Manifestación de cada función semiótica para el símbolo  $\wedge$

Grupo \ Código del ítem	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc	Ft	F3-v/f	Fcs-1	Fcs-2
1	■			■		■		■		
2	■			■		■		■	■	
3	■	■	■	■		■		■	■	■
4	■	■	■	■		■		■	■	■
5	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

**Tabla 8.** Manifestación de cada función semiótica para el símbolo  $\forall$

Grupo \ Código del ítem	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc	Ft	F3-v/f	Fcs
1	■					■			■
2	■	■		■		■			■
3	■		■	■		■		■	■
4	■		■	■	■	■		■	■
5	■		■	■	■	■	■	■	■

La observación de las tablas anteriores permitió realizar, para cada uno de los símbolos, una descripción de las funciones logradas en cada grupo de cada partición y su diferenciación respecto del grupo siguiente. Esto generó un nuevo interrogante: ¿Existe algún orden o secuencia de aparición de cada función semiótica para cada uno de los símbolos en estudio? Con el objetivo de responder a esta pregunta, se volcaron todos los resultados en una misma tabla, tabla 9, para comparar y analizar si se repite la secuencia de aparición, buscando algún posible patrón en la manifestación de las funciones semióticas de todos los símbolos en estudio.

**Tabla 9.** Manifestación de las funciones semióticas en cada grupo para cada símbolo

Símbolo	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Aparición de las funciones semióticas en cada grupo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F1</li> <li>F2-Fác</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (Nada)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F1</li> <li>F2-Fác</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F1</li> <li>Fsc-1</li> <li>Fsc-2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F1</li> <li>Fsc</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F1</li> <li>Fsc</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Ejem</li> <li>F3-Ejem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F1</li> <li>F2-Fác</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fsc-1</li> <li>Fsc-2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Fác</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Fác</li> <li>Fcs-1</li> <li>F3-v/f</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Fác</li> <li>Fcs</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Dif 1</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Ejem</li> <li>F2-Dif 1</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fcs-1</li> <li>Fcs-2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F3-v/f-1</li> <li>Fcs</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Ejem</li> <li>F3-Ejem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Ejem</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Dif 2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F3-Ejem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Ejem</li> <li>F3-Ejem</li> <li>F3-v/f-2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F3-v/f-2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fcs-2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F3-Ejem</li> <li>F3-v/f</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Dif 2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ft-1</li> <li>F3-v/f-1</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Ejem</li> <li>F2-Dif</li> <li>F3-Ejem</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Dif</li> <li>Ft</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Dif</li> <li>Ft</li> </ul>
			<ul style="list-style-type: none"> <li>• F2-Dif</li> <li>Ft-2</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ft-1</li> <li>Ft-2</li> </ul>		

La tabla 9 permite efectuar una observación conjunta sobre todos los símbolos a la vez, en busca de algún patrón o similitud en la secuencia de aparición de las funciones semióticas analizadas. Al cotejar las columnas puede decirse que, en principio, no hay una secuencia idéntica entre las funciones de cada uno de los seis símbolos estudiados. Sin embargo, hay una semejanza en el orden en que

se manifiestan las funciones semióticas que permite entrever cierta secuenciación, como se detalla a continuación:

- F1: Es la primera en manifestarse como establecida, para todos los símbolos, dado que aparece siempre en el primer grupo. Al momento de definirla, se supuso a esta función semiótica como necesaria para la construcción de las restantes. El resultado observado en la tabla 9 estaría reafirmando la suposición, dado que para todos los símbolos en estudio se detecta que esta función se manifiesta como construida por 70%, o más, de los alumnos del primer grupo de todas las particiones efectuadas.
- F2-Fác: El reconocimiento de la adecuación sintáctica de una expresión dada se evaluó, para todos los símbolos, con una expresión que está correctamente formulada y con otra que no lo está. Esta función semiótica corresponde al caso del reconocimiento de una expresión cuya sintaxis es correcta, y es la más sencilla de las dos tareas planteadas. La escasa dificultad en la tarea podría ser la razón de su temprana manifestación en esta secuencia, pues en todos los casos aparece a la par de la función F1 o en el grupo siguiente.
- F<sub>sc</sub>: Esta función semiótica corresponde a las conversiones desde el registro simbólico-algebraico al coloquial. Para los símbolos en los que fue evaluada, la función se manifiesta en el mismo grupo que la función de reconocimiento de la sintaxis de una expresión o en el grupo siguiente, razón por la cual aparece siempre en el primer o segundo grupo de cada partición. El hecho de que este tipo de conversión aparezca como establecida en los primeros grupos de las particiones puede deberse a dos razones. En primer lugar, esta función se consideró como manifiesta aun para los casos en que la conversión fuera del tipo "símbolo a símbolo" (como una simple decodificación) y, en segundo lugar, que para efectuar este tipo de conversiones ("símbolo a símbolo") sería suficiente con tener establecidas las funciones F1 de cada uno de los símbolos que participa de la expresión dada.
- F<sub>cs</sub>: Esta función semiótica corresponde a las conversiones desde el registro coloquial al simbólico-algebraico. Para su establecimiento intervienen las funciones F1 de cada uno de los símbolos intervinientes (para asociar el vocablo al símbolo correspondiente) y también la función semiótica relativa a la sintaxis (F2) para obtener una expresión bien formada.

Para todos los símbolos, se observa que esta función aparece manifiesta en grupos posteriores a aquellos en los que se evidenció la función de conversión en el sentido inverso ( $F_{sc}$ ). Es conocido que las conversiones entre los mismos registros semióticos suelen implicar distinto nivel de dificultad según el registro de partida y de llegada (Duval, 2006). En este caso particular, la aparición de esta función en grupos posteriores a los de la conversión en sentido inverso se presenta como de mayor dificultad. La razón a la cual puede adjudicarse que resulte más difícil para los estudiantes podría ser que, en este sentido de conversión (del registro coloquial al simbólico), interviene la sintaxis correspondiente a los símbolos involucrados en la expresión.

También se advierte que esta función semiótica se observa como establecida en grupos anteriores a los que se manifiesta la función correspondiente a la sintaxis en una expresión propuesta por el estudiante (F2-Ejem). Esto podría deberse al hecho de que la oración coloquial dada, que debe convertir a una expresión simbólica, resulta una guía para el estudiante y, en cierta manera, le está mencionando los elementos u objetos que deben integrar la expresión simbólica. Si el alumno tiene construida la función semiótica correspondiente a la sintaxis de esos símbolos, podrá efectuar la conversión, sin la necesidad de tomar la decisión de seleccionar una situación en la que sea pertinente utilizar el símbolo, como sucede en el caso de la formulación de un ejemplo.

- F2-Ejem: Esta función semiótica corresponde a la adecuación de la sintaxis de un determinado símbolo en una expresión que es generada totalmente por el estudiante a modo de ejemplo de uso. Es por esto que, en este caso, además de la dimensión sintáctica del símbolo, interviene fuertemente la dimensión pragmática, lo que podría ser la razón de la aparición más tardía de esta función semiótica, que se posiciona –en general– de la mitad de la lista en adelante, para cada uno de los símbolos, en la tabla 9.
- F3-v/f: Esta función semiótica corresponde a la adecuación de la determinación del valor de verdad de una expresión simbólica dada. Se manifiesta como construida por los estudiantes de los grupos intermedios de la tabla 9, y a la par –o antes– que la función semiótica correspondiente a la determinación del valor de verdad de una expresión construida por el propio alumno (F3-Ejem). Esto último podría deberse a que, en el caso del ejemplo, esta función está ligada directamente a la de la sintaxis, puesto

que no es posible determinar el valor de verdad de una expresión que fuera sintácticamente incorrecta.

- F3-Ejem: Esta función semiótica corresponde a la adecuación de la determinación del valor de verdad de una expresión que es generada totalmente por el estudiante a modo de ejemplo de uso de algún símbolo en particular. En general, aparece a la par que la función semiótica correspondiente a la sintaxis de esa expresión (F2-Ejem), aunque en algunos casos aparece después, lo que la hace suponer de un nivel de dificultad mayor.
- F2-Dif: Esta función corresponde a la identificación de una sintaxis incorrecta para una expresión dada y su adecuada reformulación para la obtención de una expresión bien formada. Se presenta como de mayor grado de dificultad, pues su aparición se observa en el último o anteúltimo de los grupos, para todos los símbolos. Detectar un error de sintaxis es una tarea dificultosa en sí misma, pues requiere de un muy buen manejo de la sintaxis. Además, la dificultad puede radicar en el hecho de que, en algunos ítems, intervienen las funciones semióticas relativas a la sintaxis de dos símbolos distintos—una para la detección del error y otra para la reescritura— o bien que la función semiótica correspondiente a la sintaxis debe ser utilizada dos veces, una para la tarea de lectura, en la que se detecte el error, y otra para la tarea de escritura, en la que se reformula la expresión para convertirla en bien formada.
- Ft: Esta función semiótica, correspondiente al tratamiento en el registro coloquial, aparece como la de mayor dificultad para los estudiantes, pues en todos los casos se manifiesta en el último grupo de las particiones. Si bien esta función semiótica no está directamente asociada a los símbolos, pues se establece entre expresiones del registro coloquial, tiene estrecha relación con la dimensión semántica. La expresión obtenida a través del tratamiento sería la que más se asemeja a las expresiones utilizadas en el lenguaje oral y en la forma en que se desarrolla el discurso interno en el pensamiento de un individuo. Esto la liga a la comprensión que el estudiante tiene del contenido semántico de la expresión.



## 5. CONCLUSIONES

Del análisis realizado a partir de los datos recolectados, se observó cierta secuenciación en la manifestación de las funciones semióticas que intervienen en las tareas propuestas en los distintos ejercicios del instrumento. Esa especie de orden se presenta, con cierta similitud, para todos los símbolos estudiados, lo que condujo a pensar que podría representar un orden en el establecimiento de las funciones semióticas que intervienen en el proceso de construcción de significado de símbolos matemáticos. Dicha secuenciación u orden constituye una caracterización en el proceso de significación de estos símbolos. En términos de las tareas que se realizan, la secuencia observada puede formularse así:

- Asociación entre el símbolo y el vocablo: Es la más elemental de las tareas y trivialmente necesaria para efectuar cualquier otra tarea con el símbolo.
- Reconocimiento de la adecuación de la sintaxis en una expresión que está correctamente formulada: es una tarea elemental pues no requiere que el estudiante posea mucha seguridad en la estructura sintáctica ya que la expresión está correctamente formulada.
- Conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial: Esta tarea requiere, básicamente, de la asociación de cada uno de los símbolos con un vocablo del lenguaje coloquial. Si se la considera como efectuada aun en los casos en los que sea realizada en la forma 'símbolo a símbolo', la tarea tiene escasos requerimientos y esa podría ser la razón de su temprana aparición en la secuencia.
- Conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico: Para efectuar esta tarea se requiere, además de la asociación entre el vocablo y el símbolo, el manejo de la sintaxis en el registro de llegada, para obtener una expresión bien formada en el registro simbólico-algebraico. El hecho de que tenga injerencia la sintaxis en el registro simbólico-algebraico le otorga a estas conversiones un grado de dificultad más alto.
- Adecuación de la sintaxis de una expresión generada por el estudiante: La formulación de una expresión simbólica por parte del estudiante se presenta como de un grado de dificultad mayor. Igual que en la tarea anterior, la cuestión sintáctica tiene una participación central. Sin embargo, en este caso el aumento de la dificultad podría deberse a que es el propio estudiante el que debe construir la expresión en el registro coloquial

(probablemente en forma mental) y posteriormente efectuar también una conversión partiendo de la expresión coloquial que haya pensado, decidiendo qué símbolos requiere la expresión y la adecuación de la sintaxis con la que los combine en la expresión que escriba. Esta situación es la que se presenta cuando el estudiante escribe la resolución de un ejercicio. En una clase de Álgebra, una de las primeras tareas que se le demanda al estudiante es la resolución de ejercicios que implican escribir expresiones simbólicas, tales como efectuar demostraciones. Dado que las funciones semióticas que se requieren se construyen de manera tardía en el proceso de significación, esas tareas resultan de gran dificultad para los estudiantes y podría ser la razón por la que cometen tantos errores al expresar sus ideas en las resoluciones.

- Determinación del valor de verdad de una expresión simbólica dada: Esta tarea se manifiesta antes que aquellas en las que interviene fuertemente la sintaxis y también antes que la determinación del valor de verdad de una expresión formulada por el propio estudiante. Podría interpretarse que la comprensión del contenido semántico de una expresión dada se lograría antes que la habilidad ligada a la sintaxis, al menos para expresiones dadas. Esto podría estar indicando que la comprensión en la lectura de expresiones simbólicas sería previa a la habilidad de la escritura de estas expresiones, que implican el manejo de la sintaxis.
- Determinación del valor de verdad de una expresión generada por el estudiante: La habilidad para efectuar esta tarea se manifiesta al mismo tiempo, o inmediatamente después, que la correspondiente a la de generar una expresión sintácticamente adecuada. Esto podría deberse a que, de acuerdo con el ejercicio planteado en el instrumento, no es posible analizar la determinación del valor de verdad de una expresión que no está correctamente formulada. Esa también podría ser la razón por la que, en algunos casos, se manifiesta después que la determinación del valor de verdad de una expresión simbólica ya dada.
- Reconocimiento de errores sintácticos en una expresión simbólica y su reformulación: Esta tarea aparece entre las de mayor dificultad. En ella interviene fuertemente el aspecto sintáctico, pues la detección de un error requiere de alto manejo de la sintaxis asociada a los símbolos que intervienen en la expresión, así como también para la correcta reformulación que subsane el error.

- Tratamiento en el registro coloquial: Se presenta entre las últimas logradas y es posterior a la conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial. Si bien corresponde a un tratamiento interno al registro coloquial, es muy importante para las tareas de lectura de expresiones simbólicas, pues está directamente relacionada con la comprensión del contenido semántico de la expresión simbólica a la que se le haya efectuado la conversión. Por ende, está vinculada a la comprensión que el estudiante tiene de una expresión simbólica que lee en el material bibliográfico al cual accede para estudiar.

Esta secuenciación permite observar, de manera desagregada, el proceso de construcción de significado de símbolos matemáticos, en estudiantes universitarios. Su aporte puede resultar una guía para el diseño de una posible intervención didáctica destinada a que los estudiantes desarrollen sus habilidades en relación a las distintas prácticas matemáticas que están vinculadas a los símbolos que se utilizan en la asignatura. Las tareas que se propongan a los estudiantes en esa posible intervención pueden ser diseñadas tomando como base los ejercicios que constituyen el instrumento (ver Anexo) con el que se recolectaron los datos para esta investigación, sumadas a cualquier otro tipo de tareas que pongan en juego las prácticas matemáticas identificadas como parte del significado de un símbolo matemático. Los antecedentes en la literatura afirman que destinar un tiempo, aunque sea breve, a la formación en el manejo de símbolos, tiene un resultado exitoso (Distéfano, Urquijo y González, 2010; Lacués Apud, 2011, 2014). Favorecer en los estudiantes el desarrollo de las prácticas matemáticas que están asociadas a la construcción de significado de los símbolos, puede darles una herramienta básica para desempeñarse satisfactoriamente en tareas de lectura y escritura de expresiones simbólicas.

## REFERENCIAS

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona, España: Grao.
- Bardini, C. & Pierce, R. (2015). Assumed Mathematics Knowledge: the Challenge of Symbols. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 23(1), 1-9.
- Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook*. Reston, VA: The National Council

- of Teachers of Mathematics. Disponible en: <http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf>. Recuperado: 12/08/10.
- Camós, C. y Rodríguez, M. (2009). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior*. Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI CIBEM). Puerto Montt, Chile. Disponible en: <http://ebookbrowse.com/articulo-camos-rodriguez-texto-completo-pdf-d36067393>
- Chalé-Can, S. Font, V. y Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: [enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html)
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4 (3), 99-110.
- Colombano, V., Formica, A. y Camós, C. (2012). Enfoque cognitivista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 115-152). Los Polvorines, Argentina: EDUVIM y Ediciones UNGS.
- Distéfano M. L., Urquijo, S. y González, S. (2010) Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 59-71.
- Distéfano, M.L., Pochulu, M. y Font, V. (2015). Análisis de la Complejidad Cognitiva en la Lectura y Escritura de Expresiones Simbólicas Matemáticas. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 4(3), 202-233. DOI: 10.4471/redimat.2015.1568
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103-131.
- Fernández Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 34 (1), 53-71.
- Güçler, B. (2014). The role of symbols in mathematical communication: the case of limit notation. *Research in Mathematics Education*, 16 (3), 251-268. DOI: 10.1080/14794802.2014.919872
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad

- de Granada. Disponible en: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis\\_eos\\_10marzo08.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf)
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.
- Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, and B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Hillsdale, U.S.A.: Erlbaum.
- Gómez Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y la significación. *Comunicación, lenguaje y educación*, 3-4, 5-16.
- Herrera López, H., Cuesta Borges, A. y Escalante Vega, J. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación Matemática*, 28 (3), 217-240.
- Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 333-355.
- Lacués Apud, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, 29-35.
- Lacués Apud, E. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Bolema*, 28(48), 299-318.
- Molina González, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis de doctorado, Universidad de La Rioja, España). Disponible en: <http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210>.
- Morris, Ch. (1985). *Fundamentos de la teoría de los signos*. Barcelona, España: Paidós.
- Palarea Medina, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, (40), 3-28.
- Peirce, Ch. (1986). *La ciencia de la Semiótica*. Buenos Aires, Argentina: Nueva Visión.
- Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, España: Morata.
- Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 12 (1), 45-56.
- Rodríguez-Domingo, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria*. (Tesis de doctorado. Universidad de Granada, España). Disponible en: <http://hera.ugr.es/tesisugr/25475368.pdf>.
- Rodríguez, M. y Zeballos, J. (2014). El aprendizaje de la matemática y sus referencias semióticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27(ALME 27), 507-515.

- Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2 (2), 61-74.
- Serrano Gómez, W. (2005). ¿Qué constituye a los lenguajes natural y matemático?. *SAPI-ENS*, 6(1), 47-60.
- Socas, M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El álgebra escolar. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, 10, 9-42.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. *Números*, 77, 5-34.
- Trigueros, M., Ursini, S. y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática*, 12 (2), 27-48.

MARÍA LAURA DISTÉFANO

Dirección: Castelli 3033 3ºA, Mar del Plata, Argentina, C.P. 7600.

Teléfono: 54 0223 4731163

## ANEXO. Protocolo del instrumento para recolección de datos

3. Complete:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Escriba un ejemplo utilizando el símbolo del que se pueda afirmar que es VERDADERO
$\in$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

4. Analice si las siguientes expresiones están BIEN ESCRITAS (independientemente de ser verdaderas o falsas). En caso de no estarlo, escribala en forma correcta.

Expresión	¿La expresión está BIEN ESCRITA? (SI/NO)	Si la expresión está MAL ESCRITA, escribala en forma correcta
$-2 \in \mathbb{Z}$		
$3 \subset \mathbb{Z}$		
$\{1; 2\} \subset \mathbb{N}$		
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$		
$4 \in \mathbb{N} \wedge -3 < 0$		
$7 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$		
$-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$		

$\forall \mathbb{N} \quad \mathbb{N} > 0$		
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$		
$\exists x \in \mathbb{R} / y + 2 = 5$		
$\exists x \in \mathbb{Z} / x < 0$		

5. Expresar coloquialmente (con sus palabras) lo que representa cada una de las siguientes expresiones simbólicas. Indique si es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

Expresión simbólica	Expresión coloquial (con sus palabras)	V-F	Justificación del V-F
$0,5 \in \mathbb{Z} \vee -1 \in \mathbb{Z}$			
$-2 \in \mathbb{Z} \wedge -1 \in \mathbb{N}$			
$\forall x (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < 0)$			
$\exists x (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$			
$\exists x \in \mathbb{N} / 2 < x < 3$			
$\forall x \in \mathbb{N} \quad x < x + 1$			

6. Escriba en forma simbólica cada una de las siguientes expresiones coloquiales.

Expresión coloquial	Expresión simbólica
3 es un número entero y positivo	
3 y 5 son números naturales	
4 es un número natural o entero	
Cada número entero es menor que su sucesor	
Algunos números naturales son negativos	
El cuadrado de cualquier número real es positivo o cero	