

CONCEPCIONES DE LOS DOCENTES RESPECTO A LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN PROBABILIDAD

Valeria Bizet Leyton, Daniela Araya Tapia, Jocelyn Díaz Pallauta, Elisabeth Ramos Rodriguez.
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
valeriabizet@gmail.com, danielanataliaaraya@gmail.com, jocelyndiazpallauta16@gmail.com,
elisabeth.ramos@pucv.cl

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo indagar el hecho didáctico que el docente no logra diferenciar entre la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad es un buen candidato a fenómeno didáctico. Bajo el paradigma cualitativo, con un enfoque descriptivo-interpretativo, se lleva a cabo un estudio exploratorio, para el cual se diseña como instrumento de recogida de datos, un cuestionario que aborda una situación extraída del texto de matemática de tercer medio (alumnos de 16-17 años) distribuido por el Ministerio de Educación de Chile. Las categorías de análisis emergen de elementos teóricos como función y gráfico de una relación, gráfico estadístico, función probabilidad, y comprensión gráfica. Los resultados evidencian una falta de claridad de los profesores sobre la función probabilidad, lo que nos indica la necesidad de reforzar en la formación de profesores, inicial y continua, la representación y diferenciación entre gráfico estadístico y cartesiano de la función probabilidad.

Palabras clave: docentes de matemática, función de probabilidad, representación gráfica, fenómeno didáctico.

Abstract

The main objective of this research is to enquire into the didactic fact that teachers do not differentiate between statistical graphic and Cartesian graphic of probability function, which would be a great candidate as a didactic phenomenon. An exploratory investigation is carried out, from the qualitative paradigm, with a descriptive-interpretative approach, designing a questionnaire, as a collecting data instrument which tackles a situation extracted from the mathematical textbook established by The Ministry of Education in Chile for high school third- grade (16-17 year-old) students. The categories under analysis emerge from theoretical elements such as function and graphic of a relation, statistical graphic, probability function and graphic understanding. The outcomes show a lack of teachers' understanding on probability function what suggests that we need to reinforce the initial and continuous prospective teachers' training with respect to the representation and differentiation between statistical and Cartesian graphic of probability function.

Key words: mathematics teachers, probability function, graphic representation, didactic phenomenon.

■ Introducción y problemática

En los últimos años en Chile, se han realizado reformas al currículo de matemática, particularmente el eje *Datos y Azar* está teniendo mayor preponderancia (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2009; MINEDUC, 2015). El éxito de estas modificaciones, en términos de desarrollar el pensamiento probabilístico en los estudiantes, depende gran parte de los profesores, de su comprensión sobre la probabilidad y mayor conocimiento en el uso de representaciones y las concepciones erróneas de los estudiantes (Stohl, 2005). Así resulta relevante indagar en la comprensión de los profesores de matemática de Chile, acerca de la función probabilidad, específicamente, su representación gráfica, estadística y cartesiana.

En la matemática educativa, algunas investigaciones han tratado estas temáticas, entre ellas Arteaga (2011) ha evidenciado que futuros docentes presentan dificultad en la construcción, lectura e interpretación de gráficos estadísticos elementales, asociando la falta de comprensión de objetos estadísticos y sus relaciones que subyacen en el gráfico. Aún más, la preparación de los docentes para enseñar gráficos estadísticos es un tema fundamental que ha sido olvidado desde la investigación y en la formación de maestros (Arteaga, Batanero y Cardeñoso, 2011).

Pinto y González (2008) examinaron el conocimiento de contenido pedagógico (PCK) de un profesor novel sobre el tema de la representación gráfica estadística y concluyen que las representaciones gráficas, se centran en su construcción y la realización de cálculos estadísticos, y no tratan la interpretación y análisis de los gráficos. Mientras que García (2005) manifiesta que titulados de carreras afines a las ciencias, presentan dificultad en la comprensión de gráficos cartesianos de un nivel elemental, no logrando una manipulación e interpretación elaborada de ellos.

Las diversas problemáticas detectadas en la literatura sobre los gráficos en estadística y probabilidad nos lleva a plantearnos como objetivo indagar si el hecho que el docente no logra diferenciar entre la representación gráfico estadístico y gráfico cartesiano de la función probabilidad, es un buen candidato a fenómeno didáctico.

■ Fundamentos teóricos

Los elementos teóricos del presente estudio, lo constituye la noción de hecho y fenómeno didáctico, además de las representaciones gráficas (estadísticas y cartesianas) de la función probabilidad y el constructo comprensión gráfica. Elementos que detallamos a continuación.

Un hecho didáctico, es un suceso o acontecimiento que ocurre en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en un lugar específico, en un tiempo determinado y con unos sujetos dados. Cuando el hecho trasciende de estos tres factores, es un buen candidato a fenómeno (Wilhelmi, Font y Godino, 2005).

Para analizar la manera en que los docentes comprenden el objeto función probabilidad y dos de sus diferentes representaciones gráficas, particularmente, gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional, consideramos el significado de conceptos matemáticos como función y gráfico de una relación (Mena, 2011). Estos permitieron establecer que la definición de gráfico cartesiano funcional es $\mathcal{G}_f =$

$\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in Dom(f)\}$, donde $Dom(f) = A$ y $Rec(f) = B$ es decir, es el conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ de la función, donde existe una correspondencia entre los elementos del dominio y recorrido de ésta.

Adoptamos el concepto de gráfico estadístico bajo la noción de función semiótica definido como:

Una función semiótica, donde el antecedente es el propio gráfico y lo representado es la distribución estadística de los datos, siendo la correspondencia el conjunto de convenios establecidos en estadística para el gráfico particular, que permite a la persona que lee el gráfico interpretarlo o bien a la persona que tiene los datos construirlo (Arteaga, 2011, p. 54).

Del mismo modo, incluimos el significado de conceptos probabilísticos, entre ellos función probabilidad (Suárez, 2002) y sus distintos registros de representaciones, que organizamos en un esquema (figura1).

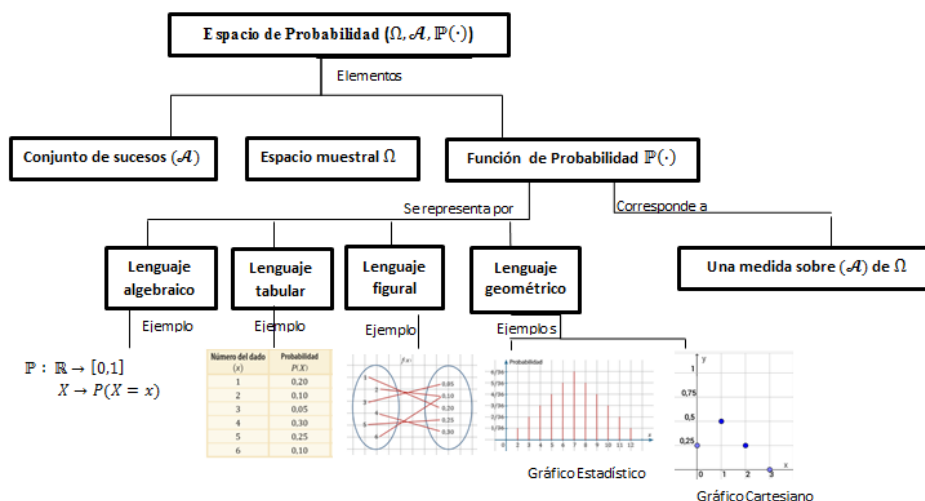


Figura 1. Estructura conceptual de la función probabilidad (elaboración propia)

Por último, consideramos el concepto de comprensión gráfica definida por Friel, Curcio y Bright (2001) como las habilidades que las personas que han de leer un gráfico tienen que poner en juego para entender el significado del mismo, la cual está influenciada por cuatro factores: fines para los que se utilizan los gráficos, características de la tarea, disciplina y las características del lector.

Metodología

Este estudio se desarrolla bajo un enfoque metodológico cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006), dado que son analizados contenidos estadísticos de docentes, referidos a evidenciar si logran diferenciar entre un gráfico estadístico de uno cartesiano funcional. Los sujetos informantes fueron 12 docentes de matemática de enseñanza secundaria, con distinto nivel de perfeccionamiento, pertenecientes a diferentes regiones de Chile. Se diseñó como instrumento de recogida de datos, un cuestionario que aborda un ejercicio presentado en el texto escolar de matemática de

secundaria (para alumnos de 16-17 años) distribuido por el Ministerio de Educación de Chile (Saiz y Blumenthal, 2016), el cual fue sometido a pilotaje y juicio de expertos, antes de su aplicación (figura 2).

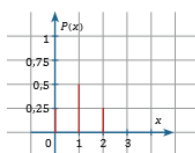
En el texto escolar de tercero medio se presenta el siguiente ejemplo

Si se define la variable aleatoria "el número de hijos hombres que una pareja puede tener si tienen dos hijos", ¿cuál sería la función de probabilidad?

El espacio muestral correspondiente a esta situación es: $EM = \{HH, HM, MH, MM\}$, donde H corresponde a un niño y M corresponde a una niña.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{con 0 o 2 hijos hombres} \\ \frac{1}{2} & \text{con 1 hijo hombre} \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Además podemos graficarla también de la siguiente manera:



(Saiz y Blumenthal, 2016, p. 33)

Si un estudiante le realiza la pregunta ¿Por qué el gráfico de la función tiene líneas verticales, si sabemos que estas no representan una función? ¿Qué le plantearía usted como respuesta?

Figura 2. Instrumento de recogida de datos (Elaboración propia)

Para el análisis de los datos se empleó el análisis de contenido (Flick, 2004) y las categorías que emergieron de los elementos teórico-matemático, en específico son:

- Representación de la función probabilidad por medio de gráficos estadísticos.
- Representación de la función probabilidad por medio de un gráfico cartesiano funcional.
- Diferenciación entre gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional.
- Relación entre la función probabilidad y el gráfico estadístico correspondiente.

■ Análisis de datos

Con respecto a los resultados del estudio, a continuación se exponen algunas categorías de análisis cada una de ellas con una respectiva evidencia de profesores.

Categoría 1. Representación de la función probabilidad por medio de gráficos estadísticos.

Las respuestas de los docentes se centran en que la función probabilidad se representa a través de un gráfico estadístico. La mayoría de ellos (7 de 12) lo relaciona con el histograma o gráfico de barra, como se muestra en la figura 3, salvo un profesor que no considera que referirse a una gráfica implica aludir a una función. Se evidencia que 7 de los docentes reconocen que la función probabilidad es posible de representar a través de distintos gráficos estadísticos.

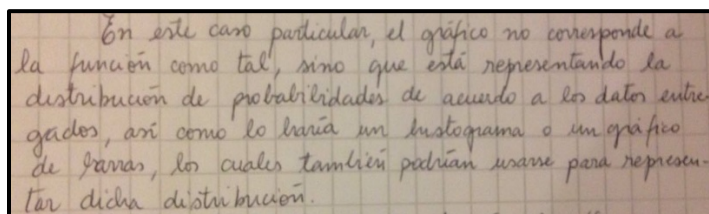


Figura 3. Respuesta del sujeto n°6. (Elaboración propia)

Categoría 2. Representación de la función probabilidad por medio de un gráfico cartesiano funcional.

Las respuestas muestran que la mayoría de los docentes reconocen que las líneas verticales, no representan a una función real en el contexto de plano cartesiano. Se evidencia que 6 de los docentes identifican que el gráfico cartesiano de la función probabilidad está representado por puntos, dado que la variable independiente, en este caso cantidad de hijos es discreta, tres de ellos para fundamentar cómo aclararían la inquietud al estudiante, refuerzan su respuesta mostrando dicho gráfico. Sin embargo, los profesores no sitúan que el contexto en que es presentada la gráfica de la función es estadística, por medio de un gráfico estadístico, excepto un docente, quien afirma que no habría problema al representar la función como lo hace el texto.

De esta manera, un alto número de profesores (10 de 12) comprenden el concepto de función, dado que descartan que el gráfico de líneas verticales represente una función, en el contexto de plano cartesiano. Así también, se evidencia que reconocen que la variable independiente de la función probabilidad es discreta, por lo tanto, su representación es a través de puntos aislados, como se ilustra en la figura 4, es decir el docente realiza un tránsito de la expresión algebraica de la función probabilidad a su representación gráfica en el plano cartesiano.

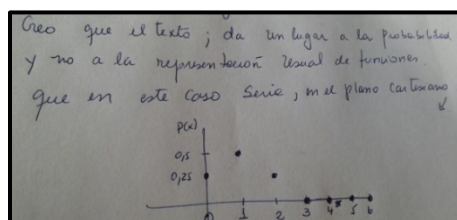


Figura 4. Respuesta del sujeto n°4. (Elaboración propia)

Categoría 3. Diferenciar entre gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional

Las respuestas clasificadas en esta categoría muestran que los profesores distinguen, que en el gráfico estadístico, el eje Y entrega información sobre la medida de las magnitudes representadas en el eje X, es decir la probabilidad de sucesos que componen el espacio muestral del experimento, mientras que el gráfico cartesiano funcional corresponde a un conjunto de puntos (x, y) del plano cartesiano, donde cada pre imagen x debe tener una única imagen y.

Es así que se evidencia que la mitad de los docentes (6 de los 12) identifica que las líneas verticales representan la probabilidad asociada a cada valor de la variable aleatoria X , como se muestra en la figura 5. Aunque en las argumentaciones es posible observar diferencias, uno de los sujetos erróneamente nombra al gráfico dado, gráfico de barra, mientras que de manera correcta dos profesores, son más explícitos en sus argumentos, uno de ellos hace referencia a los valores de los elementos del espacio muestral, y el otro, es más preciso aún, asocia dichas líneas a la magnitud del valor de la probabilidad. También los participantes reconocen que el gráfico presentado, es decir líneas verticales, no corresponde a un gráfico cartesiano funcional, pero solo dos de estos justifican su respuesta aludiendo a la idea de conjuntos de puntos del plano cartesiano, donde la componente “ y ” (imagen) debe ser diferente en cada uno de ellos.

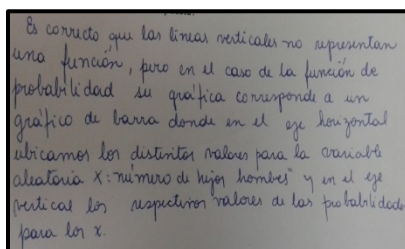


Figura 5. Respuesta del sujeto n°8.

Categoría 4. Relación entre la función probabilidad y el gráfico estadístico correspondiente

Son los profesores que identifican el dominio de la función como los casos posibles de la variable aleatoria y lo representan en el eje x del gráfico estadístico como una magnitud (0, 1 ó 2), mientras que el recorrido lo relacionan a la probabilidad de ocurrencia de los casos posibles de la variable aleatoria y lo representa en el eje y de dicho gráfico como su medida (0, 25 o 0,5). Al respecto 17 de los 12 profesores logran relacionar la función probabilidad con su gráfico estadístico, pero lo expresan de distinta manera, sí identifican que el eje Y del gráfico estadístico representa la probabilidad, un profesor hace referencia a la probabilidad de los posibles valores de x , a diferencia de otro docente que la relaciona con la magnitud de sus valores (figura 6). Esto sugiere que existe comprensión del objeto matemático función probabilidad y de su representación en lenguaje gráfico (estadístico).

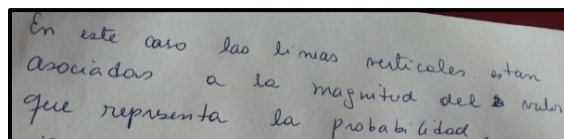


Figura 6. Respuesta del sujeto n°4.

■ Conclusiones

Pese a lo fundamental de los gráficos estadísticos, investigaciones (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010; Espinel, 2007) evidencian que no se logran las competencias relacionadas al lenguaje gráfico en la formación de profesores en educación primaria, lo que concuerda con nuestros resultados, ya que sobre el

análisis de las respuestas producidas por los docentes de matemática destacamos, que estos presentan dificultad en representar la función probabilidad a través de gráficos estadísticos.

Este estudio constata que algunos docentes no logran una profundización del concepto de función en el plano cartesiano, manifestando dificultad en la comprensión de gráficos cartesianos a un nivel elemental (García, 2005).

Además los profesores muestran dificultad para leer el gráfico estadístico y relacionarlo con su función probabilidad. En relación a la lectura de gráficos estadísticos, Monteiro y Ainley (2007) estudiaron la competencia de futuros profesores, encontraron que muchos no manifestaban conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura, gran parte de ellos señaló que no tuvo formación específica en la lectura de gráficos estadísticos en su formación universitaria y reconoció su necesidad de estudios al respecto.

En esta línea, en nuestro estudio, es posible evidenciar que los docentes comprenden el concepto de función en el contexto de plano cartesiano, sin embargo no logran profundizar en el concepto y diferenciar entre gráfico estadístico y gráfico cartesiano funcional.

El hecho didáctico expuesto, pareciera indicar la necesidad de reforzar los conceptos básicos de estadística en los docentes, esto al mostrar que existen indicios de la presencia de concepciones erróneas y dificultades en los conceptos disciplinarios.

Al término del estudio podemos concluir que el hecho didáctico presentado, es un buen candidato a fenómeno didáctico, es decir, trasciende del contexto, tiempo y espacio, por lo que este abre nuevas líneas, enfocadas a profundizar en el conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido del profesor (Shulman, 1986) en el ámbito de la estadística, para robustecer y contribuir con elementos teóricos de la didáctica a la enseñanza de la matemática.

Cabe destacar la necesidad en la formación inicial y continua de docentes de Chile de la enseñanza de la estadística y la probabilidad, ya que el programa de estudio de matemática de nuestro país ha sufrido una serie de ajustes, agregando conceptos estadísticos y probabilísticos que en años anteriores no estaban incluidos. Esto genera en los docentes la carencia de una formación didáctica que robustezca sus conocimientos en esta área de la matemática, para el dominio de los nuevos conceptos propuestos en el programa de estudio, y además fortalezca componentes básicos como: la reflexión epistemológica de conceptos estocásticos, análisis de las transformaciones del conocimiento para enseñarlos en diferentes niveles educativos, estudio de las limitaciones de aprendizaje (dificultades, errores y obstáculos) de los estudiantes y las estrategias de resolución de problemas y el análisis del currículo, situaciones didácticas y recursos didácticos para la temática de interés (Batanero, Godino y Roa, 2004). La consideración y aplicación de estos aspectos favorecerá la mejora de las prácticas docentes y con ello enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje.

■ Referencias bibliográficas

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada. Granada, España.

- Arteaga, P., Batanero, C. y Cañadas, (2011). Gráficos estadísticos en la formación de profesores. En J. Ortiz (Ed). *Investigación en educación estadística y formación de profesores* (pp.73-87). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática-Universidad de Granada.
- Batanero, C., Godino, J., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12 (1). Recuperado de <http://ww2.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html>
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática*, 11, 99-119.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata
- Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada. Granada, España.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Cd. de México: McGraw-Hill.
- Ministerio de Educación (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*. Santiago: autor.
- Ministerio de Educación (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago: autor.
- Mena, A. (2011). *Estudio Epistemológico del Teorema del Isomorfismo de Grupo*. Tesis de doctorado no publicada, Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.
- Monteiro, C., & Ainley, J. (2007). Investigating the Interpretation of Media Graphs Among Student Teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 188-207.
- Pinto, J., & González, M. (2008). *Pedagogical Content Knowledge of a Novel Teacher: a Case from the Teaching of Graphical Representation*. Presentado en el 11th International Congress on Mathematics Education, Monterrey, México.
- Saiz, O. y Blumenthal, V. (2016). *Texto del Estudiante Matemática 3° Medio*. Santiago: Ediciones Cal y Canto.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15(1), 4-14.
- Suárez, L. (2002). *Introducción a la Teoría de Probabilidad*. Manizales: Universidad Nacional de Colombia.
- Stohl, H. (2005). Probability and Teacher Education and Development. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for the teaching and learning* (345-366). Nueva York, EEUU: Springer Verlag.
- Wilhelmi, M., Font, V. y Godino, J. (2005). *Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: Reflexiones sobre la Teoría de Situaciones Didácticas y el Enfoque Ontológico y Semiótico*. Granada: Universidad de Granada.