

# LA EMERGENCIA DE LA NOCIÓN DE VARIACIÓN EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO A TRAVÉS DE LA CAUSALIDAD Y LA TEMPORIZACIÓN

Mario Caballero-Pérez, Ricardo Cantoral  
Cinvestav-IPN. (México)  
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

## Resumen

Presentamos los avances de una investigación en curso orientada a comprender cómo se construye la noción de variación en el pensamiento humano, noción fundamental para el aprendizaje del Cálculo. Asumimos que faltan sentidos del cambio que podríamos llamar contextuales y que consisten en colocar a las variables y sus variaciones en *sistemas de referencias* adecuados que permitan entender la dinámica de la variación, esto mediante la construcción de explicaciones causales y una temporización del cambio, nociones retomadas de la psicogenética. En este escrito reportamos avances en el análisis de las repuestas de estudiantes de un bachillerato mexicano (15 a 18 años) a un cuestionario conformado por actividades de variación, enfatizando la causalidad y la temporización que emplean para resolverlas, así como el papel que desempeñan estas nociones en la emergencia de la noción de variación de estos estudiantes.

**Palabras clave:** variación, temporización, causalidad, predicción

## Abstract

We present the advances of an ongoing investigation that is oriented to understand how the notion of variation is constructed in the human thought, considering that this is a fundamental notion to learn Calculus . We assume that there is a lack of what we could call contextual changes, which consist in putting the variables and their variations into appropriate reference systems that allow understanding the variation dynamics through the construction of causal explanations and temporization change, both notions taken from the psycho genetics. In this paper, we present the advances in the analysis of Mexican high school (15 to 18 years) students' answers to a questionnaire made up of variation activities, emphasizing the causality and temporization that they use to solve the activities, as well as the role played by these notions in the emergence of the notion of variation of these students

**Key words:** variation, temporization, causality, prediction

## ■ Introducción

Los estudios sobre enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral han sido tema de interés en diversas investigaciones de Matemática Educativa, ello debido, parcialmente, a que suelen presentar

dificultades en el aprendizaje por parte de los estudiantes e incluso docentes, ya sea en cuanto a la construcción de significados para conceptos como pendiente o derivada (Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013) o en el entendimiento de procedimientos fundamentales como límite (Jones, 2015). La presente investigación se ubica dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en particular, en la línea de investigación Pensamiento y el Lenguaje Variacional (PyLV), la cual estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social (Cantoral, 2013), lo que abarca, entre otros aspectos, la enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

El PyLV consiste en el estudio de las formas en cómo las personas reconocen el cambio y la variación en un fenómeno, cómo usan estas nociones para resolver situaciones problemáticas, cómo comunican el cambio y la variación, así como la manera en cómo estas nociones intervienen y contribuyen en la construcción social de conocimiento matemático. Resultados enmarcados en el PyLV han caracterizado la forma en cómo las personas usan la variación en situaciones predictivas mediante el desarrollo de prácticas como comparación y seriación (Moreno-Durazo y Cantoral, 2016), así como reportado dificultades para abordar situaciones de variación (Cantoral y Farfán, 1998; Caballero, 2012).

En un trabajo previo (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017), se mostró que la noción de variación precisa de una construcción particular debido a que no es explícita en los fenómenos sino que consiste de una abstracción de las propiedades y características de un fenómeno. Con base en lo anterior, asumimos como problema de estudio comprender cómo se construye la noción de variación, qué tipos de escenarios favorece su construcción, de qué manera las personas perciben esta noción, entre otros aspectos. En concreto, nuestra pregunta de investigación es la siguiente: *¿cuáles son los elementos o condiciones necesarias para favorecer la construcción de la noción de variación en el pensamiento humano?*

En este escrito nos enfocamos en mostrar los avances realizados en el análisis de las respuestas de estudiantes ante actividades matemáticas de variación, esto con el fin de evidenciar cómo emerge la noción de variación en sus respuestas. El marco teórico que fundamenta la investigación se conforma por la Socioepistemología, por una caracterización desde el PyLV de la noción de variación y una articulación de las nociones de causalidad y de temporización. Nuestra hipótesis sostiene que la construcción de la noción de variación precisa del desarrollo y articulación de las nociones de causalidad y de temporización para dar lugar a la conformación de sistemas de referencia. Nos limitaremos ahora a mostrar cómo la causalidad y la temporización permiten explicar la emergencia de la noción de variación en las respuestas de estudiantes ante actividades matemáticas.

## ■ Fundamentos teóricos

### *Una caracterización de la variación desde el pensamiento y lenguaje variacional*

En el marco de nuestra investigación, entendemos por cambio toda modificación que tiene el valor de una variable, por ejemplo, una diferente posición en un objeto, la diferencia en la sensación térmica al enfriarse un líquido, etc. De manera general, el cambio se percibe por los sentidos: observamos el cambio de posición de un cuerpo y sentimos el cambio de temperatura. En contraste, asumimos que la variación es una noción que no se percibe de manera directa por los sentidos, por tanto, no está presente de manera explícita en los fenómenos. En el mismo sentido que (Cabrera, 2009), asumimos que la variación consiste

de una abstracción de orden superior de las propiedades y características del cambio percibido. En consecuencia, observar el cambio o ser consiente de él no es suficiente para caracterizar la variación (Cantora, 2013), se requiere además de al menos dos aspectos esenciales: primero, la medición del cambio, que consiste en el reconocimiento cuantitativo de aquello que cambia, segundo, el estudio de la forma en cómo esa medida se modifica, es decir, determinar si los incrementos son positivos o negativos, si son constantes, si son cada vez mayores o menores, si tienden a estabilizarse, si son acotados, etc.

En el PyLV, la variación tiene lugar dentro de una clase específica de fenómenos, aquellos que involucran la noción de predicción (Cantoral, 2013). Desde nuestra postura, la predicción se apoya en el estudio sistemático y lógico del cambio y la variación que presentan las variables de esos fenómenos para determinar un estado futuro. Las investigaciones enmarcadas en el PyLV han centrado la atención en dos aspectos de la variación: los órdenes de variación superior y el carácter estable del cambio. En cuanto al primero, se considera que la variación posee diferentes órdenes dependiendo del cambio que se mida (Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017; Moreno-Durazo y Cantoral, 2016), siendo el primer orden de variación la medición del incremento en el valor de la variable, sea este un incremento negativo o positivo; el segundo orden de variación consiste en la medición del incremento en el incremento del primer orden de variación, y así sucesivamente con órdenes superiores. El *carácter estable del cambio* (CEC) (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 2013) es un elemento necesario para establecer predicciones, consiste en aquella regularidad asociada a la variación que determina el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno, esto se logra al caracterizar la dinámica que las variables y sus variaciones siguen.

Desde la Socioepistemología, asumimos que la construcción social de conocimiento matemático tiene lugar mediante el desarrollo intencional de prácticas. En el caso específico del PyLV, las prácticas específicas que permiten operar con el cambio y la variación con fines predictivos se denominan *prácticas variacionales*, que consisten en una forma particular de razonar y actuar ante una situación de variación como la *predicción*, la *comparación*, la *seriación* y la *estimación* (Caballero, 2012).

#### *Causalidad y temporización en la conformación de sistemas de referencia*

La causalidad y temporización son dos nociones que se retoman de la psicogenética, y que han sido desarrollados a la luz de los resultados dentro del PyLV en (Caballero y Cantoral, 2016; Caballero-Pérez y Cantoral, 2017). La causalidad consiste en relacionar dos o más variables en un fenómeno, de manera que ellas estén vinculadas entre sí, lo que se traduce en reconocer que la modificación de una variable resulta en la modificación de otra. Cabe aclarar que este término no se refiere a si el fenómeno es causal (característica del determinismo) sino al establecimiento de una relación por parte de la persona. La temporización consiste en identificar o construir estados intermedios en el desarrollo del fenómeno, asociando estados específicos a las variables estudiadas.

... por medio de la *causalidad* se reconoce la variación (¿qué cambia?), en tanto que las *estrategias variacionales* permiten cuantificar el cambio, por ejemplo, al comparar dos estados y observar el incremento o decremento entre ellos, pero ¿qué comparamos? y ¿con qué comparamos? Reconocer la variación no tendría lugar sin el establecimiento de un referente para percibir el cambio (¿respecto de qué cambia?) y otro para medirlo, para cuantificarlo (¿cuánto cambia?)... La importancia de considerar la *temporalización* en fenómenos de variación continua es que permite describir, caracterizar y cuantificar el comportamiento de las variables de una función (¿cómo cambia?) (Caballero y Cantoral 2017).

Ambas nociones atienden diferentes aspectos de la variación que se resumen en las interrogantes ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia? La manera en cómo estas cuestiones se articulan para que la noción de variación emerja es a lo que denominamos *sistema de referencia* (Caballero y Cantoral, 2017).

### ■ Aspectos metodológicos

La investigación en curso es de corte cualitativo e interpretativo, puesto que analizaremos, a partir de las respuestas de estudiantes cómo emerge la noción de variación con base en los elementos que conforman nuestro marco teórico. En cuanto al diseño de las actividades, se eligieron dos tipos de situaciones: de experimentación física, que consisten en la manipulación de un instrumento manipulable, y de “experimentación mental” que consisten en analizar la variación de un fenómeno a partir de una gráfica o tabla. Las actividades se diseñaron considerando la presencia de órdenes de variación diferentes en cada actividad, el tiempo como variable explícita e implícita, así como predicciones locales y globales.

En cuanto a la población, se eligieron estudiantes mexicanos de bachillerato del Cetis 50, con edades entre 15 y 18 años. Las actividades se implementaron a 40 estudiantes de cuarto semestre que habían cursado la asignatura de Cálculo Diferencial. Las respuestas se analizaron con base en las prácticas que ponían en juego, complementando el análisis con preguntas efectuadas durante la resolución de las actividades.

En este escrito presentamos algunas respuestas a una de las actividades de experimentación mental que consiste en bosquejar la forma de una pista de carreras de 1500 metros que recorre un vehículo. Se presenta una tabla con las velocidades que registró el vehículo.

**Tabla 1:** Datos de la velocidad de un vehículo

Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h
50	320	450	319	850	263	1250	272
100	318	500	318	900	284	1300	282
150	314	550	309	950	305	1350	309
200	303	600	288	1000	308	1400	314
250	290	650	267	1050	311	1450	318
300	299	700	245	1100	309	1500	319
350	312	750	230	1150	286		
400	317	800	241	1200	273		

### ■ Análisis preliminar

En su respuesta, el estudiante A menciona que hay curvas donde la velocidad aumenta y otras donde disminuye, realizando el dibujo de la figura 1. Identificamos una causalidad en la respuesta del estudiante al observar que alterna curvas cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo para indicar dónde la

velocidad disminuye y dónde aumenta, respectivamente. No obstante, no establece diferencias entre esos aumentos o disminuciones, de manera que compara únicamente los valores de la velocidad sin establecer criterios para determinar la forma de crecimiento o disminución. De lo anterior, reconocemos únicamente el uso del primer orden de variación para comparar los datos de la tabla, esto ocasiona que el estudiante no reconozca un CEC en la variación de la velocidad. Por otra parte, aunque reconoce varios intervalos para los valores de la velocidad, el análisis que efectúa se sustenta en comparar dos estados, el valor más pequeño y más grande en un intervalo, de manera que su temporización se limita a considerar dos estados a la vez.

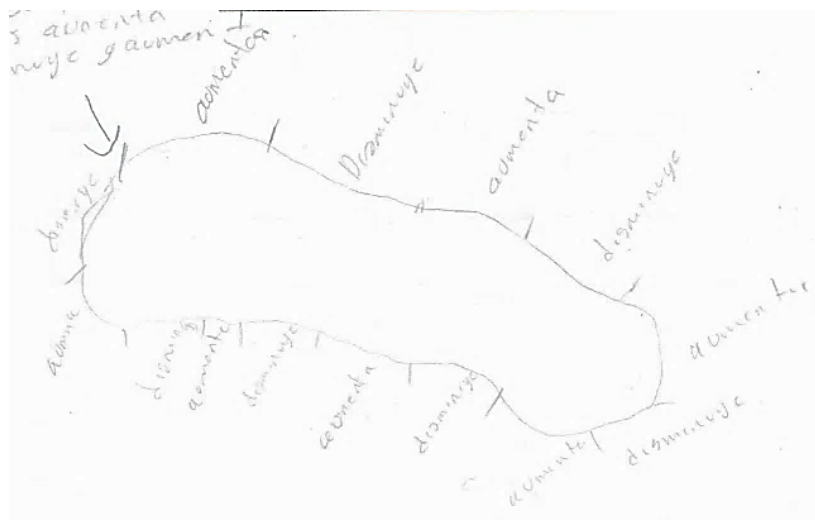


Figura 1. Dibujo de la pista del estudiante A

El estudiante B realiza el dibujo de la figura 2 con base en la idea de que los aumentos y disminuciones de la velocidad corresponden a curvas en la pista. La causalidad que establece consiste en que la velocidad aumenta o disminuye en una curva, sin importar si es cóncava hacia arriba o abajo. También observamos que realiza una diferenciación entre curvas, de manera que si el incremento o disminución de la velocidad es muy grande, la longitud de la curva también es grande, y si el aumento o disminución es pequeño la longitud también. De lo anterior, reconocemos un CEC correspondiente al análisis que efectúa del primer orden de variación. El estudiante B no considera la concavidad de la curva sino únicamente su longitud, de manera que compara los valores de la velocidad para determinar la magnitud del incremento. No obstante, aunque efectúa múltiples comparaciones no usa una seriación, ya que no relaciona entre si esas comparaciones, sino que las efectúa de manera independiente una de la otra, de manera que su temporización también es de dos estados a la vez. Esto permite al estudiante estimar la forma de la pista con base en los supuestos que toma, aunque no es del todo correcta debido que se limitó al primer orden de variación.

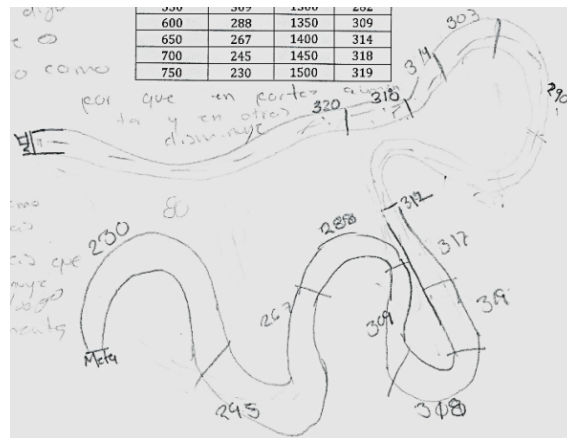


Figura 2. Dibujo de la pista del estudiante B

El estudiante C realiza la pista de la figura 3, y comenta que *“la primera curva es pequeña o no muy curvada, el piloto tuvo que desacelerar para pasarla pero no frenó mucho, la segunda es más curvada por lo que tuvo que desacelerar más y pasarla frenando, luego aceleró pero paso por una curva grande pero no cerrada, por lo que no acelera tanto, pasó la curva sin problemas y al final aceleró por ser recta”*. Observamos que, a diferencia de los dos estudiantes anteriores, la causalidad del estudiante C corresponde a considerar que en una curva la velocidad disminuye y en una recta aumenta, sin limitarse únicamente a considerar curvas.

Por otra parte, aunque no provee de un análisis puntual de los valores de la velocidad, utiliza la estrategia de seriación para analizar secciones completas de la pista donde la velocidad aumenta o disminuye, de donde identificamos el segundo orden de variación. Esto lo observamos cuando compara entre si los intervalos donde la velocidad aumenta; al igual que compara entre si los intervalos donde la velocidad disminuye. Con base en esto, realiza una estimación de la pista donde identificamos que su temporización considera intervalos completos de la tabla, compuestos a su vez por varios estados intermedios que analiza en conjunto. Es decir, su temporización no se limita a considerar dos estados a la vez, sino que agrupa varios estados para conformar nuevos estados. Por último, el CEC lo identificamos en la respuesta que provee, pues deduce que entre mayor sea la disminución de la velocidad, más cerrada será la curva, aunque no provee de algún elemento para efectuar una medición precisa, quedándose al nivel de una valoración de dicha cantidad.

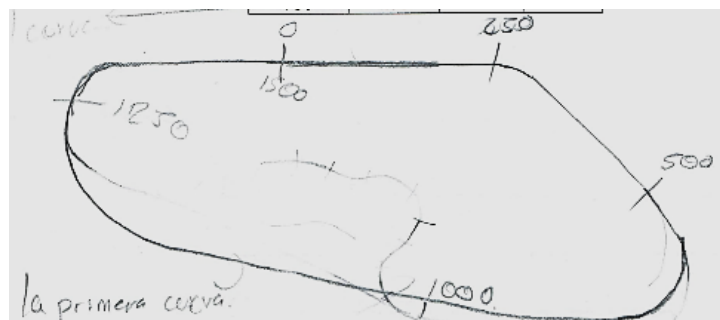


Figura 3. Dibujo de la pista del estudiante C

## ■ Discusión de resultados

A partir de las respuestas presentadas, observamos que la noción de variación emerge de manera diferente en cada estudiante debido al tipo de causalidad y de temporización que construyen. Por ejemplo, la noción de variación que usa el estudiante A se limita al de comparar si la velocidad aumenta o disminuye, pero no toma en cuenta la cantidad que aumenta o disminuye. Al observar la causalidad que establece, vemos que relaciona disminución de la velocidad con curvas cóncavas hacia arriba, y aumentos de la velocidad con curvas cóncavas hacia abajo. Aunque la relación puede no ser la adecuada, sirvió de base para que el estudiante compare la velocidad para identificar que segmentos corresponde a cada tipo de curva. No obstante, al considerar únicamente una temporización de dos estados a la vez, esto no favoreció que estudiará la evolución de esos incrementos, razón por la cual no establece diferencias entre curvas del mismo tipo.

En el caso del estudiante B, utilizó una temporización de dos estados a la vez para establecer las cantidades que aumenta o disminuye la velocidad. Además, su causalidad es diferente al estudiante A, pues considera que sin importar el tipo de curva la velocidad aumenta o disminuye. Por tanto, bajo este razonamiento tiene sentido diferenciar qué tan larga es esa curva, lo cual el estudiante realiza con base en el CEC que identifica. Nuevamente, aunque la causalidad pueda no ser correcta desde el punto de vista del fenómeno, permite al estudiante hacer un análisis del primer orden de variación.

Respecto al estudiante C, observamos una noción de variación avanzada pues, a diferencia de los otros dos estudiantes, considera la forma en cómo aumenta o disminuye la velocidad, y no solo cuánto. Esto se logra debido a que su temporización no se limita al de dos estados, sino que considera un conjunto completo de datos de la tabla como un solo estado y analiza varios de estos nuevos estados para determinar cómo se comporta la velocidad, aspecto que a él interesa debido a que la causalidad que establece está en términos de que las disminuciones de velocidad corresponden a curvas y los aumentos a rectas.

Concluimos entonces que, de manera general, la noción de variación que emerge en las respuestas de los estudiantes está ligada al desarrollo de la causalidad y la temporización. En particular, la causalidad parece ser la justificación de analizar el cambio en el fenómeno, mientras que la temporización permite que este estudio tenga lugar al reconocer estados intermedios. Esto tiene la consecuencia de que una temporización o una causalidad no adecuadas limiten la emergencia de la noción de variación, como se ve en el caso de los estudiantes A y B.

La causalidad y la temporización se presentan como elementos necesarios para la construcción de la noción de variación, razón por la cual articulamos ambas nociones en el constructo sistema de referencia para explicar la forma en cómo las personas, en este caso estudiantes de bachillerato mexicano, construyen la noción de variación. El presente escrito corresponde a una investigación en curso, razón por la cual quedan aspectos a considerar para el análisis de resultados, como por ejemplo, analizar cómo se relaciona un tipo de causalidad o de temporización (y por tanto sistema de referencia) con el tipo de variación que favorece, el tipo de escenarios propicios para la construcción de sistemas de referencia, así como el papel que tiene el desarrollo de prácticas variacionales.

## ■ Referencias bibliográficas

- Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2016). Un estudio desde la Socioepistemología del desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En F. Rodríguez, R. Rodríguez y L. Sosa (Eds.). *Investigación e Innovación en Matemática Educativa* 1(1), 287 – 295. Oaxaca: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.
- Caballero-Pérez, M. y Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1057 – 1065. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y estudios avanzados del IPN, México.
- Cantoral, R. (2013, 2016 2ª ed.). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 353 – 369.
- Hernández-Zavaleta, J. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1009 – 1017. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Jones, S. (2015). Calculus limits involving infinity: the role of students' informal dynamic reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46 (1), 105 – 126.
- Moreno-Durazo, G. y Cantoral, R. (2016). Pensamiento y lenguaje variacional en la práctica médica. El caso de la “lectura” del electrocardiograma. En F. Rodríguez, R. Rodríguez y L. Sosa (Eds.). *Investigación e Innovación en Matemática Educativa* 1(1), 238 – 245. Oaxaca: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.
- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J. y Martin, K. (2013). Calculus students and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1 – 25.