

EL TRABAJO GEOMÉTRICO Y LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LAS NOCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Gerardo Cruz-Márquez, Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav-IPN. (México)
gerardo.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En el marco de un proyecto de investigación cuya intención final es contribuir en el rediseño del discurso Matemático Escolar vigente –particularmente en el contexto de la formación inicial docente–, y desde la perspectiva que ofrece la Teoría Socioepistemológica, hemos realizado una problematización de las nociones trigonométricas en un escenario histórico, cuyo fin es identificar elementos que propiciaron su emergencia y evolución. De los fundamentos, métodos y resultados de esta etapa pretendemos dar cuenta en este espacio.

Palabras clave: trigonometría, teoría socioepistemológica, almagesto, Ptolomeo

Abstract

As part of a research project aimed at contributing in the redesign of the current School Mathematics discourse, particularly, in the context of prospective mathematics teacher's training, and from the perspective offered by the Socio-Epistemological Theory, we have made a problematization of trigonometric notions in a historical setting, which is intended to identify elements that favor its emergence and evolution. We seek to show the foundation, methods and results of this research stage.

Key words: trigonometry, socioepistemological theory, almagest, Ptolemy

■ Introducción

La Teoría Socioepistemológica sostiene que, en tanto el saber matemático se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, en su introducción en el sistema educativo se producen discursos –denominados genéricamente discurso Matemático Escolar (dME)–, que además de facilitar la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos (Cantoral, 2013), norman la organización de la matemática escolar y determinan las formas de participación y consenso en el ámbito didáctico (Romero, 2016).

Desde esta perspectiva, y mediante el análisis de libros de texto, planes-programas de estudio y experiencias didácticas con profesores y alumnos del nivel Medio Superior, estudios como los de Montiel (2005; 2007), Jácome (2011) y Scholz (2014) observan que –bajo el dME vigente– las construcciones geométricas, al igual que su proporcionalidad, son dadas y que los problemas que se presentan en clase

proveen de manera inmediata todos los datos necesarios para ser resueltos, reduciendo el trabajo del alumno a elegir la ‘fórmula’ trigonométrica adecuada, sustituir los datos y realizar las operaciones numérico-aritméticas que le permitan obtener el resultado que se solicita, esto es, a aprovechar las nociones trigonométricas como una *herramienta técnica* para el cálculo de un valor faltante.

Aunado a esto, Montiel y Jácome (2014) concluyen que la tradición escolar asocia a las nociones trigonométricas, además del significado como *técnica* antes mencionado, un *significado lineal y aritmético*. El primero de ellos refiere al constante manejo lineal que recibe la relación ángulo-lado en el triángulo rectángulo, mientras que el segundo alude a la centración en el dominio aritmético observada en el tratamiento escolar actual de la trigonometría.

En suma, la falta de análisis sobre la naturaleza particular de la relación ángulo-lado en el triángulo rectángulo y la invisibilidad de los procesos de construcción geométrica –que reducen su uso al de una herramienta técnica– promovida por el dME vigente, configuran el fenómeno didáctico denominado *aritmización de la Trigonometría* (Montiel, 2011; Montiel y Jácome, 2014).

Ante esta problemática, y en el marco de un proyecto de investigación cuya intención final es contribuir en el rediseño del dME –específicamente en el contexto de la formación inicial docente en Honduras–, realizamos una problematización de las nociones trigonométricas en un escenario histórico, con el afán de acercarnos a sus usos y significados primeros, mismos que se han perdido paulatinamente en la introducción de la trigonometría al sistema educativo. De los fundamentos, métodos y resultados de esta etapa se pretende dar cuenta en este espacio.

■ **Problematización en un escenario histórico**

En nuestra disciplina, los estudios de corte histórico no suelen analizar las construcciones mentales, ni las obras didácticas u originales pertenecientes a otras áreas del saber, ya que no advierten en ellas valor matemático. Sin embargo, la Teoría Socioepistemológica parte del planteamiento diametralmente opuesto al afirmar que “el pensamiento humano posee una herencia” (Cantoral, 2013, p. 105).

En consecuencia, desde esta perspectiva teórica, más que historiar, nos interesa *historizar* el conocimiento matemático, en otras palabras, nos importa “no sólo la relatoría de hechos históricos, sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático” (Montiel y Buendía, 2012, p. 68). Lo cual implica, para nuestro estudio, conocer y analizar las circunstancias sociales, culturales e institucionales que propiciaron la emergencia y evolución de las nociones trigonométricas.

Con esto en mente, tomamos al *Almagesto* como punto de partida y centro de nuestra historización. Esta obra, escrita alrededor del siglo II –en Alejandría– por el astrónomo, geógrafo y matemático greco-egipcio Claudio Ptolomeo, es señalada por la literatura como la evidencia más antigua del nacimiento de la trigonometría, en tanto estudio deliberado, sistemático y cuantitativo de la relación que se establece entre un ángulo y las distancias que este subtiende.

Esta historización se llevó a cabo con una configuración particular del análisis de contenido, que nos fue útil para acercarnos al contenido manifiesto, explícito, de nuestro objeto de análisis, así como al contenido

latente, indirecto, del mismo (en el sentido que propone Cáceres, 2003); integrando consideraciones teóricas de nuestra fundamentación.

Para realizar el análisis contextual del *Almagesto* de Ptolomeo partimos de la propuesta metodológica planteada por Espinoza (2009), la cual sostiene que, para construir una explicación del significado sociocultural de una obra, esta debe verse al menos desde tres perspectivas: como una producción con historia, como un objeto de difusión y como parte de una expresión intelectual global. En este sentido, preguntas como *¿quién fue Claudio Ptolomeo?*, *¿qué eventos sociales, políticos y/o económicos son determinantes en la publicación del Almagesto?*, y *¿qué relación mantiene el Almagesto con otras obras matemáticas o didácticas relevantes en la época?* cobraron importancia en nuestro estudio (Cruz-Márquez y Montiel, en prensa).

Por otro lado, para realizar el estudio textual del *Almagesto*, seleccionamos el Capítulo IX del Libro I como objeto de análisis –puesto que en él Ptolomeo construye su tabla trigonométrica–; realizamos un estudio preliminar del mismo y de la literatura asociada; identificamos siete proposiciones o unidades de análisis; construimos códigos que hicieran posible la conversión de nuestro documento bruto en datos susceptibles de ser analizados; y finalmente, construimos tres niveles de análisis: análisis micro, análisis meso y análisis macro (Cruz-Márquez y Montiel, 2017). Estas últimas tenían como objetivo analizar la estructura de cada una de las proposiciones, estudiar bloques de proposiciones que compartían un fin y constituir una reflexión general sobre la estructura y propósito de nuestro objeto de análisis, respectivamente.

■ Análisis contextual

El análisis sociohistórico llevado a cabo nos mostró que, incluso previo al establecimiento de causalidades, las antiguas civilizaciones humanas no tardaron en asociar los movimientos de los cuerpos celestes con fenómenos naturales terrestres. Por ejemplo, el percatarse de que las inundaciones del valle del río Nilo – que borran los límites establecidos del terreno y causaba estragos en la ganadería y agricultura de la región– sucedían invariablemente poco después de la salida heliacal de Sirio, aproximadamente cada 365 días, fijó los ojos de Egipto en la bóveda celeste (Van der Waerden y Huber, 1974).

Así, construido este vínculo entre los acontecimientos astronómicos y los terrestres, y ante la imposibilidad humana de controlar el transcurso del tiempo, emergió la necesidad de anticipar los fenómenos astronómicos como una herramienta para organizar las actividades económicas, políticas y religiosas, de tal suerte que fueran lo más productivas posibles.

Los primeros instrumentos contruidos con este fin fueron las tablas de registro –utilizadas de forma destacada por las civilizaciones mesopotámicas–, en ellas se identificaban y categorizaban los cuerpos celestes, al mismo tiempo que se registraban sus cambios. Estas tablas permitían, a mediano y largo plazo, identificar regularidades en el comportamiento de los astros y anticipar con un considerable grado de certeza sus cambios.

Con el asentamiento de las primeras colonias griegas, pueblos con el espíritu atrevido e imaginativo de aventureros y con una ventajosa posición –a lo largo de la costa del mar Negro y del mar Mediterráneo– que les permitía “un contacto más estrecho con los dos grandes valles fluviales de los que podía venir el conocimiento, por su proximidad” (Boyer, 1986, p. 75), comenzó gradualmente el movimiento de

racionalización del universo, esto es, se transitó paulatinamente de la cuestión oriental ¿cuándo? a la cuestión científica moderna ¿cómo y por qué? (Struik, 1980).

Como resultado de este afán por explicar la mecánica celeste, cobra relevancia la cosmovisión de la época, es decir, además de los fenómenos astronómicos observables por simple inspección desde la Tierra, se vuelve fundamental considerar el conjunto de creencias vigente respecto a cómo se comporta el universo. Dentro de estas, bajo la cosmovisión aristotélica –predominante en la época (DeWitt, 2010)–, situamos a la *inmovilidad* de la Tierra y su posición en el centro del cosmos; la *finitud* y *esfericidad* del universo; y la *esfericidad* de los cuerpos celestes y la *circularidad-uniformidad* de su movimiento.

En suma, ante la determinación por explicar y anticipar los movimientos celestes y dada la cosmovisión predominante en la época, que –como hemos mencionado– ubicaba a la Tierra estática en el centro del universo y a los planetas moviéndose de forma circular, uniforme e ininterrumpida alrededor de ella, los astrónomos griegos enfrentaron de forma recurrente el problema de *medir indirectamente* la distancia entre dos posiciones de un cuerpo celeste conociendo el ángulo central que las separa y viceversa (Fig. 1).

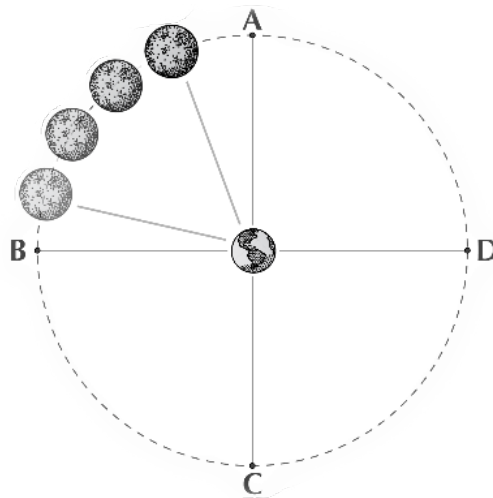


Figura 1. Problemática astronómica

Sin embargo, hasta ese momento no se contaba con una herramienta matemática que describiera de forma sistemática y cuantitativa la relación existente entre esas magnitudes, inconveniente que orilló a astrónomos como Hiparco de Nicea a, previo a atender el problema astronómico de su interés –las temporadas desiguales–, construir una tabla que correspondiera una amplia cantidad de ángulos centrales con las longitudes de las cuerdas que subtienden, lo que constituye tal vez el problema más antiguo que se resolvió utilizando una tabla trigonométrica (Bressoud, 2010).

Esta tabla, al igual que la mayor parte del trabajo de Hiparco, se ha perdido, hecho que nos llevó a estudiar la obra maestra de su más cercano sucesor, Ptolomeo, quien en el *Almagesto* –previo a iniciar la exposición de su sistema planetario–, se vio en la necesidad de construir una tabla trigonométrica que relacionara los ángulos centrales entre 0.5° y 180° –con un intermedio de medio grado– y sus respectivas cuerdas. Para ello, el autor contó con al menos tres herramientas fundamentales: la geometría axiomática-deductiva

griega, los avances numérico-aritméticos de las civilizaciones mesopotámicas y un significado del ángulo en tanto cuantificación de la amplitud, concreto en un sistema de división de la circunferencia del círculo.

Finalmente, vale la pena mencionar que, además de las herramientas aludidas, Ptolomeo gozó de un ambiente social y académico al menos favorable para su labor científica. Dentro de los episodios socioculturales trascendentales para la emergencia, estructura y carácter del *Almagesto* destacamos la estabilidad y poderío socioeconómico de Alejandría en la época, la creación y auge del Museo y la Biblioteca de Alejandría –tal vez el primer antecedente de una política estatal de financiamiento de la actividad científica–, y la labor de Ptolomeo y sus antecesores científicos más cercanos –Euclides, Apolonio e Hiparco– en dicha ciudad (Boyer, 1986).

■ Análisis textual

Como hemos mencionado, para el estudio textual de nuestro objeto de análisis, el Capítulo IX del Libro I del *Almagesto*, posterior al estudio preliminar y la determinación de unidades y códigos de análisis, establecimos tres niveles de estudio: análisis micro, análisis meso y análisis macro.

El primero de ellos, nos fue útil para estudiar detalladamente la estructura y función de cada una de las proposiciones o unidades de análisis de la obra en cuestión. Gracias a él nos fue posible, durante el análisis meso, identificar tres bloques de proposiciones con un fin propio: los primeros pares ángulo-cuerda, los métodos geométricos y las cuerdas subtensas por ángulos centrales de 0.5° y 1° .

En el primer bloque, Ptolomeo establece cinco primeras relaciones ángulo-cuerda (Fig. 2), si bien bastante conocidas en la época al ser los lados de los polígonos regulares inscritos de tres, cuatro, cinco, seis y diez lados –subtensos por ángulos centrales de 120° , 90° , 72° , 60° y 36° , respectivamente–, estos pares le son necesarios como materia prima para los bloques posteriores.

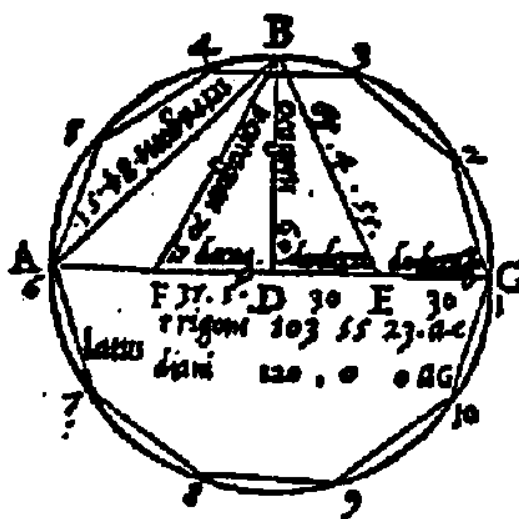


Figura 2. Primeros pares ángulo-cuerda (Tomado de Saiz, 2003, anexo)

Durante el segundo bloque de proposiciones, Ptolomeo enuncia y demuestra cuatro métodos geométricos para la aproximación de cuerdas (Fig. 3). Estos métodos son relaciones geométricas retomadas o construidas por el autor y fungen como puente entre los pares ángulo-cuerda ya conocidos y los buscados. Además, es en estos métodos que ubicamos el nacimiento de la trigonometría, en tanto constituyen el primer intento –del cual tenemos evidencia– por sistematizar el estudio de la relación no proporcional que se establece entre un ángulo central y las longitudes que este subtiende.

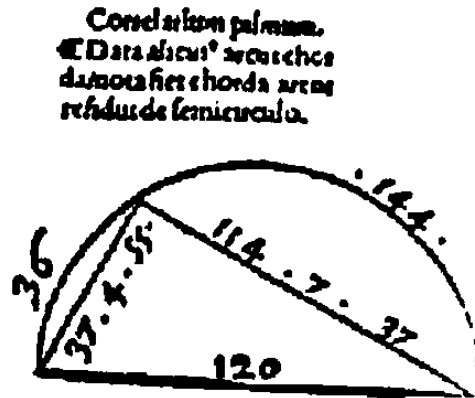


Figura 3. Primer método geométrico: cálculo la cuerda subtensa por el ángulo suplemento de un ángulo cuya cuerda es conocida (Tomado de Saiz, 2003, anexo)

Finalmente, para completar su tabla, y ante la imposibilidad de trisecar el ángulo, Ptolomeo debe aproximar las cuerdas subtensas por los ángulos centrales de 0.5° y 1° . Para ello, prueba que “la razón entre la cuerda mayor y la cuerda menor en un círculo es menor que la razón de sus respectivos arcos” (Fig. 4), esto, además de servirle de fundamento geométrico para aproximar las cuerdas deseadas, evidencia que las cuerdas no conservan la razón de los arcos –y de los ángulos centrales– que las subtienden, es decir, prueba que, a diferencia de la relación ángulo-arco, la relación ángulo-cuerda no es proporcional.

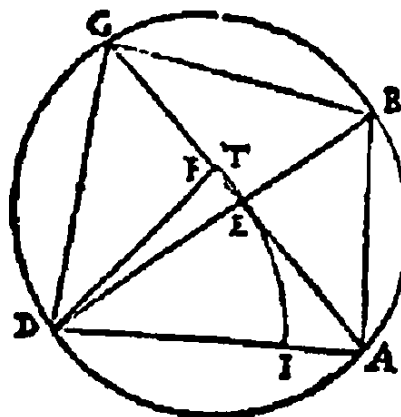


Figura 4. Cuerdas subtensas por ángulos centrales de 0.5° y 1° (Tomado de Saiz, 2003, anexo)

Finalmente, el último nivel de análisis, el nivel macro, nos permitió reconocer que, en su afán por describir cuantitativamente la relación trigonométrica que se establece entre un ángulo central y las cuerdas que este subtiende, Ptolomeo hizo uso de las nociones geométricas con al menos tres propósitos distintos: *como herramientas de construcción*, útiles para introducir elementos geométricos iniciales y auxiliares; *como herramientas teóricas*, donde se sirvió de las propiedades de los objetos construidos anteriormente para probar las relaciones geométricas existentes entre ellos; y *como herramientas numérico-aritméticas*, donde –con ayuda de la división de la circunferencia, las operaciones numérico-aritméticas y los pares ángulo-cuerda conocidos– utilizó las relaciones geométricas establecidas en pro de agregar mediciones a su tabla. A la sinergia de estos tres usos que Ptolomeo da a las nociones geométricas –al construir su tabla trigonométrica– es lo en nuestro proyecto denominamos *Trabajo Geométrico*.

■ Algunas conclusiones

En síntesis, la historización realizada nos permitió, en primera instancia, observar con suma claridad cómo la necesidad humana de anticipar los fenómenos astronómicos “preconfigura la emergencia de un conocimiento y en consecuencia, de un saber institucional” (Montiel, 2011, p. 111). Al mismo tiempo, nos hizo conscientes de cómo el contexto, las herramientas heredadas y las ideas del autor se entretienen para enfrentar dicha problemática y construir la más antigua explicación sistemática y cuantitativa –que ha llegado hasta nosotros– de la relación que se establece entre un ángulo y las distancias que este subtiende.

Finalmente, esta problematización de las nociones trigonométricas en un escenario histórico hizo posible formular como hipótesis de partida que *la Medición Indirecta de Distancias en el contexto del círculo permite, mediante el trabajo geométrico, confrontar el significado lineal y aritmético que el dME vigente asocia a las razones trigonométricas, así como su resignificación mediante el uso*.

■ Referencias bibliográficas

- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid: Alianza.
- Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *Mathematics teacher*, 104(2), 106-112. (Suplemento 1: Historical Reflections on Teaching Trigonometry: Hipparchus).
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.
- Cruz-Márquez, G. y Montiel, G. (2017). Emergencia de las Nociones Trigonométricas en el Almagesto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30 (pp. 981-989).
- Cruz-Márquez, G. y Montiel, G. (en prensa). Preliminares trigonométricos en el Almagesto. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 1(2).
- DeWitt, R. (2010). *Cosmovisiones. Una introducción a la historia y la filosofía de la ciencia*. (J. Sarret Grau, Trad.). España: Buridán.
- Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.
- Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.
- Montiel, G. (2007). Proporcionalidad y anticipación, un nuevo enfoque para la didáctica de la trigonometría. En Cecilia Rita Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 590-595). Camagüey, Cuba: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico*. Un estudio Socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, 61-88.
- Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1193-1216.
- Romero, F. (2016). *Construcción Social de la Serie Trigonométrica de Fourier. Pautas para un Diseño de Intervención en el Aula*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.
- Saiz, L. (2003). *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo: "Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo"*. Madrid: Maxtor.
- Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo*. Tesis de Maestría no publicada. CICATA-IPN, México.
- Van der Waerden, B. y Huber, P. (1974). *Science awakening II*. Springer Science & Business Media, B. V.