Construcción del algoritmo de la división en estudiantes de cuarto año básico de una escuela chilena

Angélica Aravena y Astrid Morales

Desde un enfoque socioepistemológico, se presenta un estudio cualitativo cuyo objetivo fue develar, en los argumentos de los estudiantes de 9 años, elementos que permiten caracterizar el proceso de construcción del algoritmo de la división en el sistema de los números naturales. Para ello, se diseñó una situación, donde argumentaron y dieron significado al proceso de resolución de divisiones, y de problemas de reparto y agrupamiento. Los primeros hallazgos evidencian que la división como agrupamiento no la consideran división, solo reconocen esta como repartir en partes iguales; y que no consideraron el resultado como un solo número, sino como el producto del cociente con el divisor agregando el resto.

Términos clave: Algoritmo; División; Resignificación; Socioepistemología

Construction of the Division Algorithm in Fourth Elementary Year in a Chilean School

From a socioepistemological approach, this qualitative study explores the argumentation provided by nine-year-old students to characterize the process of construction of the division algorithm in the natural number system. For this, a didactic situation was designed in which students were able to provide argumentation and to give signification in the process of solving divisions, problems of distribution and grouping. The first findings show that division by grouping was not considered division by the students who only recognized this operation as sharing equally. Besides, students did not consider the result as a single number, but as the product of the quotient with the divisor, adding the remainder.

Keywords: Algorithm; Division; Resignification; Socioepistemology

Aravena, A. y Morales, A. (2019). Construcción del algoritmo de la división en estudiantes de cuarto año básico de una escuela chilena. *PNA, 13*(3), 147-171.

El presente estudio tiene como origen una experiencia en aula y el trabajo con docentes de matemática que destacan la dificultad para enseñar a dividir en el sistema de los números naturales. Constantemente profesores de matemática comentan frases comunes de sus estudiantes al dividir: "profesor, ¿dónde va el resto?", "¿cómo sé cuánto cabe?", "¿por dónde comienzo a dividir: por la izquierda o la derecha?", "¿qué resto?", "¿qué separo?", "¿se usan las tablas de multiplicar, cierto?". Estas expresiones son recurrentes tanto en escolares de cuarto básico[1] como estudiantes de cursos superiores a ese nivel escolar. Aharoni (2012) menciona la opinión de varios docentes respecto al tema, señalando que este contenido es uno de los más difíciles de enseñar y que gran cantidad de los escolares presentan dificultades en su aprendizaje. Por su parte, Gómez (1989) señala que la dificultad no es enseñar a dividir, sino enseñar un algoritmo para dividir adiestrando a los estudiantes.

Investigaciones previas evidencian las dificultades persistentes en estudiantes de distintas edades cuando hacen uso de la división (Aguiriano, 2015; Kamii, 1994; Maza, 1991; Oliva, Rodríguez, Enesco, Jiménez y Dopico, 2008; Villota, 2014). Una de las causas que podría explicar dicha dificultad es el adiestramiento algorítmico llevado a cabo en la escuela, donde la instrucción de la división exigiría la coordinación y el cálculo eficiente de los algoritmos que la anteceden en la enseñanza, como la adición, sustracción y multiplicación (Aharoni, 2012; Belmonte, 2003; Gómez, 1989; Kamii, 1994).

Kamii (1994), en base a los trabajos de Piaget, menciona la importancia en la construcción de conocimiento, se refiere a lo inadecuado que es transmitir en una sola clase el conocimiento que llevó siglos construir a nuestros antepasados. De esta manera, con el propósito de que los niños comprendan la matemática de hoy, ellos debiesen pasar por un proceso reflexivo de construcción de aprendizaje, donde interpreten, den sentido y significado al proceso y a los resultados obtenidos.

Sin embargo, a pesar de que nuestro sistema educativo actual se basa en los postulados piagetianos, en muchas ocasiones esto no tiene incidencia en el discurso matemático escolar. A modo de ejemplo, desde el año 2014, observamos en el texto de estudio de cuarto año básico, entregado por el Ministerio de Educación Chileno (MINEDUC) (Alfaro, Espinoza y Cano, 2014), una explicación desafortunada del algoritmo de la división que, si bien detalla un procedimiento, cuenta con errores en la explicación. Postulamos que esta *receta* presente en el texto produce un adiestramiento de la técnica y no su comprensión. Los estudiantes no construyen el algoritmo sino que este se les entrega, con el propósito de que memoricen el procedimiento y resuelvan de forma exitosa problemas matemáticos, aunque, de acuerdo a la experiencia y a las investigaciones mencionadas, es sabido que esto no suele ser así.

[1] En Chile el cuarto año básico lo cursan estudiantes de 9 años, en este grado escolar se presenta el algoritmo de la división en el sistema de los números naturales.

El sustento teórico de esta investigación tiene como vértebra central la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, pues una de sus premisas indica que la escasa comprensión de la matemática que se enseña en la escuela es producida precisamente por el discurso Matemático Escolar (de ahora en adelante, dME), un discurso tradicional y radicado en la escuela que normaliza las técnicas de enseñanza, aun cuando estas evidencien la escasa comprensión matemática. De este modo, es necesario generar nuevos marcos de referencia que permitan rediseñar este discurso, observando el valor en uso que realizan los estudiantes de ese conocimiento, atendiendo a sus argumentos, construcción, significado y funcionalidad.

Al respecto, se formularon dos preguntas que guiaron esta investigación. La primera de ellas: al enfrentar situaciones de división en el sistema de los números naturales, los estudiantes de cuarto básico ¿tienen la necesidad de usar y construir un algoritmo que permita resolver una división? y, por otro lado, ¿cuáles son los argumentos que utilizan los estudiantes que evidencian la comprensión y uso del algoritmo de la división?

Considerando tales preguntas, el objetivo de esta investigación fue develar en los argumentos de los estudiantes de cuarto básico aquellos elementos que permiten caracterizar el proceso de construcción del algoritmo de la división en el sistema de los números naturales.

Bajo la corriente Socioepistemológica, durante tres meses se observó la clase de matemática de estudiantes de un colegio con bajo rendimiento académico. Como los alumnos no tuvieron clases previas sobre este contenido de enseñanza, se diseñaron situaciones que debían enfrentar para indagar en la construcción del algoritmo de la división.

Antecedentes y problemática

Investigaciones Socioepistemológicas han expuesto cómo la presencia de los algoritmos y su instrucción recurrente en la enseñanza escolar fomentan una construcción de conocimiento carente de significado y funcionalidad (Dolores, 2007; Soto y Cantoral, 2014; entre otros). Los algoritmos son transmitidos y no construidos por los estudiantes, lo cual genera errores de cálculo por falta de comprensión y apropiación del proceso.

Otros estudios han expuesto los errores y dificultades que presentan los estudiantes al trabajar el algoritmo de la división. Maza (1991) evidenció las separaciones no adecuadas de las cifras del dividendo, errores en la diferencia al realizar el cálculo mental de la sustracción cuando se realizan las multiplicaciones parciales, la influencia del tamaño relativo de las cifras del dividendo, por ejemplo, cuando la primera cifra es menor (125÷3), igual (325÷3) o mayor (625÷3), la omisión de los ceros en el cociente y la dificultad cuando hay ceros en el dividendo. Por otro lado, Roa (2001) también explicita dificultades cuando los estudiantes calculan restos mayores al divisor y los problemas que genera el aprendizaje de las tablas de multiplicar para el cálculo del cociente.

De acuerdo con Gómez (1989), cuando el algoritmo se introduce en edades muy tempranas, el énfasis se hace en la obtención correcta del resultado, dando prioridad a la mecánica y automatización del proceso menoscabando su comprensión. No se piensa en lo que se hace, sino, más bien, se deben memorizar ciertos procesos y símbolos según las reglas enseñadas por el profesor.

Con esto, no se pretende desprestigiar la enseñanza de los algoritmos, sino discutir que el proceso de construcción que se realiza de aquello está sujeto a ejercitar una técnica más que a su comprensión. Al respecto, Belmonte (2003) menciona la importancia del cálculo como herramienta que ofrece la matemática para resolver problemas, no obstante, priorizar el adiestramiento del niño en el uso de determinados algoritmos, y poner menos atención en que pueda identificar dónde y por qué tiene que hacer uso de esas técnicas, produce un aprendizaje vacío y de dudosa utilidad.

Desde la Matemática Realista, considerando los aportes de Freudenthal, hacer matemática es más importante que aprenderla como un producto terminado. Por ejemplo, el énfasis no estaría en aprender algoritmos, sino en el proceso de algoritmización. En este enfoque, el aprendizaje matemático debe conectarse con la realidad, no solo observando problemas contextualizados, sino, también, razonables e imaginables para los estudiantes (Bressan, s.f).

Kamii (1994) señala lo importante que es para el aprendizaje que los niños inventen sus propios algoritmos, esto es, que el estudiante sea capaz de construir su propio sistema de pasos, que le permita resolver de forma exitosa sus cálculos. Se perjudica al estudiante cuando se le priva de esa construcción, pues se le impone renunciar a su propio pensamiento numérico y a repetir de forma mecánica una estrategia sin sentido para él.

Los estudios de Vygotski (1979) mencionaban un componente histórico-social como un factor importante en el aprendizaje de los signos matemáticos. Refiriéndose al uso de los algoritmos, concluye lo siguiente:

> *las operaciones con signos aparecen como resultado de un proceso complejo y prolongado, sujeto a todas las leyes básicas de la evolución psicológica. Ello significa que, en los niños, la actividad de utilizar signos no es algo simplemente inventado ni transmitido por los adultos, es más bien algo que surge de lo que originariamente no es una operación con signos, convirtiéndose en tal después de una serie de transformaciones cualitativas.* (Vygotski, 1979, p. 78).

Tales estudios exponen lo difícil y paulatina que es la tarea de utilizar las operaciones con signos, mencionando que los algoritmos no son la mejor entrada para alcanzar dicha comprensión. Brousseau (2007) señala que el concepto matemático no se construye intuitivamente y de forma natural, la situación a resolver juega un rol fundamental en esta tarea. Del mismo modo, Vergnaud (1990) sostiene que un concepto matemático se convierte en nada sin una situación de aprendizaje que lo ponga en juego. Pero, ¿qué situaciones? y ¿qué tipo de instrucción reciben nuestros niños y niñas con respecto a la división?

Con tales antecedentes, se procede a mirar qué señala el dME chileno sobre el algoritmo de la división. El currículum nacional y sus bases curriculares (Ministerio de Educación de Chile, 2012) establece que, al terminar el primer ciclo básico (de los 6 a los 9 años), los escolares deberían manejar las cuatro operaciones básicas, pues son consideradas como aprendizajes fundamentales para la construcción de nuevos conocimientos matemáticos.

La división en la literatura y en el texto escolar

El texto de estudio de tercer año básico (niños y niñas de 8 años) aprobado por el MINEDUC, desde el año 2014 al 2017, presenta la siguiente definición: "Operación que nos dice cuántos grupos iguales hay o cuántos objetos hay en cada grupo" (Charles et al., 2014, p. 268). Esta descripción tiene un símil a las dos definiciones que encontramos de la división en la literatura con el nombre de partitiva: un número dividido en conjuntos de igual tamaño, y agrupamiento: conjuntos con la misma cantidad de elementos (Aharoni, 2012).

Para Gómez (1989), introducir la división como operación que tiene por objetivo averiguar cuántas veces un número contiene a otro o repartir un número llamado dividendo según cuántas partes indica el número llamado divisor empobrece el aprendizaje. De esta manera, cabe la posibilidad de otra definición: dado un producto y uno de sus factores calcular el otro factor.

Cid, Batanero y Godino (2003) señalan la definición aritmética de la división como buscar el número que multiplicado con el divisor y sumado con el resto sea igual al dividendo, y la definición conjuntista como repartir conjuntos con igual cantidad de elementos.

La definición matemática, presente en la teoría de números es la siguiente:

> *Sean a, b enteros con* $b \neq 0$*. Decimos que b divide a si existe un entero c tal que* $a = b \cdot c$*. Luego, el teorema de la división, algoritmo euclidiano de la división: Sean* $a, b \in \mathrm{Z}$*, con* $b \neq 0$*. Existen los enteros q y r* $\in \mathrm{Z}$ *únicos tales que* $a = b \cdot q + r$ *con* $0 \leq r \leq |b|$ (Mora, 2014, p. 13)

El texto escolar de cuarto año básico, aprobado y distribuido desde el año 2014 al 2017 por el MINEDUC, presenta el siguiente procedimiento para iniciar el aprendizaje del algoritmo de la división. Comenzando con la situación problema presente en la figura 1, inmediatamente, continúa la explicación, utilizando la metodología COPISI, basada en el trabajo desde lo concreto, lo pictórico y lo simbólico, así como la articulación entre ellos (figura 2).

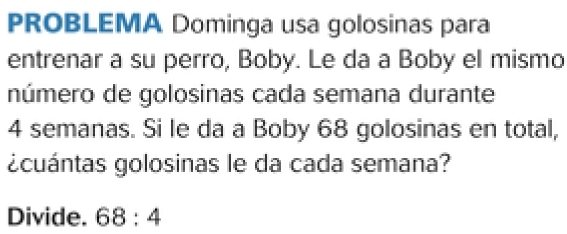

Figura 1. Problema que desencadena los pasos del algoritmo de la división en el texto escolar de cuarto año básico (Alfaro et al., 2014, p. 54)

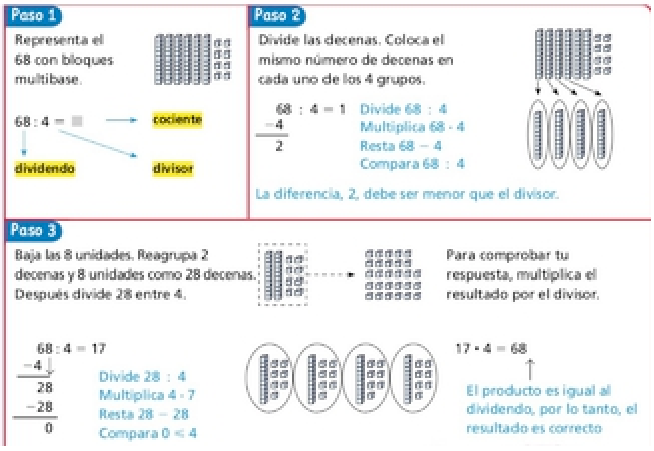

Figura 2. Procedimiento presentado en el texto (Alfaro et al., 2014, p. 54)

No se describirán cada uno de los errores presentes en la explicación, pero, a modo de ejemplo, en el segundo paso se solicita restar, cuya diferencia, según el texto, es 2. A continuación, se indica que la diferencia 2 debe ser menor que el divisor, nótese que ese 2 representa 20 unidades, que no es menor al divisor 4.

El texto entregado a los estudiantes de nuestro país difunde la división con una serie de reglas sin sentido: ¿por qué comenzar dividiendo las decenas? o ¿por qué se debe restar? Si bien se hace un pseudointento para que los escolares visualicen cómo se construye el algoritmo, esto pierde credibilidad cuando afloran malos entendidos en el procedimiento y se impone una receta que deben manejar de memoria. Pese a esto, rescatamos y consideramos relevante, para la construcción de un algoritmo, el intento por transitar desde el uso de material concreto a lo pictórico y, con ello, la construcción de lo simbólico, pues permite una comprensión de la matemática considerando la construcción de significados, aspecto al que daremos uso en esta investigación. Con respecto a ello, y atendiendo al conocimiento matemático, se realizó una breve revisión histórica del algoritmo, con el propósito de rescatar elementos que puedan intervenir en el diseño.

Breve reseña histórica del algoritmo de la división

En la concepción de la antigua Grecia, los números y los cálculos se trabajaban como magnitudes geométricas. La segunda proposición del libro VII de Los

Elementos de Euclides (300 a.C.), donde se explica cuándo un número es divisor o no de otro, habla de la estrategia a utilizar para calcular la mayor medida común de dos números que no sean primos, es decir, su máximo común divisor. De esta estrategia se desprende lo siguiente: considerando dos segmentos conmensurables, se superpone el menor de ellos en el otro tantas veces como sea posible, esta cantidad de veces será la medida máxima, y lo que no sea cubierto se considerará como el residuo de esa división, obteniéndose solo un cociente y un único residuo.

Si bien es cierto que gracias a Euclides se conoce el teorema de la división, no se tiene certeza del origen del algoritmo tradicional de la misma. Se cree que proviene del método de la *galera* del siglo XVI (figura 3), cuyo origen aritmético podría devenir desde la India y, desde ahí, haberse difundido a otros países. Parece ser que el método de multiplicación de la India, denominado celosía, se extendió a China y Arabia, y de este último a Europa, siendo los árabes, y más tarde los europeos, quienes adoptaron la mayor parte de los artificios aritméticos hindúes. Por tanto, es muy probable que el método de la división larga o de la galera que utilizaban los europeos provenga de la India (Boyer, 1986).

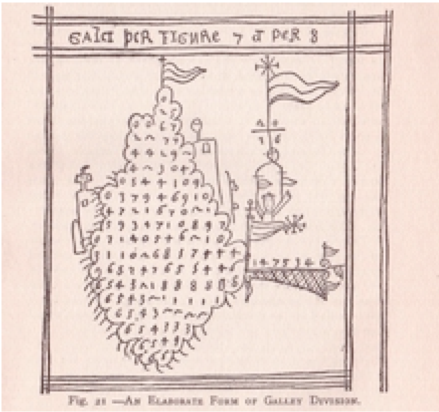

Figura 3. División por el método de la galera. S. XVI. Manuscrito no publicado. Obra: "Opus Arithmetica D. Honorati veneti monachj coenobij S. lauretig"

A continuación, se muestra una ilustración del método donde se observa la división de 44.977 entre 382 (ver figura 4), a la izquierda con el método actual, a la derecha con el método de la galera. Ambas estrategias son similares en cuanto al proceso de resolución, sin embargo, en el caso de la galera, el dividendo se encuentra en el centro del algoritmo, el divisor a la izquierda y el cociente a su derecha. Al observar la sustracción la diferencia se ubica sobre el minuendo (el dividendo), de esta manera el resto aparece en la parte superior y no en la parte inferior, como el primer método de la figura 4.

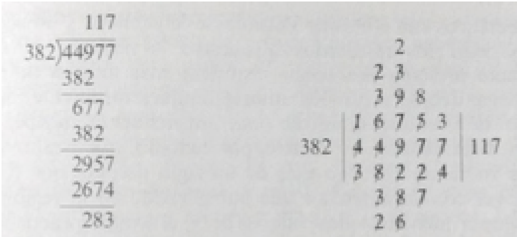

Figura 4. Ilustración del método de la galera, en Boyer (1986, p. 283)

El algoritmo de la división por galera introduce el hecho de que la posición de los números de las columnas es importante para realizar un buen cálculo, pues cada dígito tiene un determinado valor según la posición que ocupe en el numeral, lo que es fundamental en el algoritmo actual de la división larga.

Por otro lado, en la civilización sumeria, alrededor del año 3.500 a.C., a los aspirantes de contabilidad se les proponía un problema que debían resolver, en el que el dividendo se descomponía para luego agruparse en la cantidad de elementos que indicaba el divisor. El problema era dividir un granero en cierto número de personas de manera tal que cada una reciba exactamente 7 sílas de cebada y determinar el resto de dicha división. Para ello, representaban simbólicamente el número que se deseaba dividir, y se realizaban canjes formando conjuntos que tengan la misma cantidad de elementos del divisor. Esta secuencia se repite hasta que el resto no se pueda descomponer y, además, sea menor que el divisor (Simondi y González, 2010). Aquí está presente una división por agrupamiento, pues el dividendo se descompone para luego agruparse en la cantidad de elementos que indica el divisor.

Por su parte, la civilización egipcia respondía a problemas tales como: "Dividir 700 hogazas de pan entre cuatro personas de tal manera que las cantidades que reciba cada una sea proporcional a $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$" (Simondi y González, 2010, p. 10). Se evidencia un tipo de problema de reparto, aunque no es equitativo. La respuesta debe reflejar cuánto le corresponde a cada uno. A diferencia del ejemplo de los problemas de los sumerios, acá el resultado no corresponde a la cantidad de conjuntos formados con la misma cantidad, sino a la cantidad que le corresponde a cada conjunto.

Por otro lado, utilizando el sistema en base 10, concebían a la división como la operación inversa a la multiplicación, en efecto "el método que utilizaban para dividir es exactamente el inverso al que utilizaban para multiplicar" (Simondi y González, 2010, p. 10). Para realizar una división en un problema partitivo que se resuelva dividiendo 78 entre 6, enfrentaban dos columnas, una que comenzara con 1 y la otra con 6, y duplicaban los valores de cada columna hasta obtener en la segunda columna los números cuya suma es 78. En este caso: $78 = 6 + 24 + 48$. Luego el cociente corresponde a la suma de los números correspondientes a esta descomposición que se encuentran en la primera columna: $1 + 4 + 8 = 13$. De esta manera, 78 dividido en 6 es igual a 13 (Simondi y González, 2010).

Los babilónicos, usando el sistema de numeración sexagesimal, pensaban la división como una multiplicación del dividendo con el inverso multiplicativo del divisor. Los mayas, con su sistema de numeración vigesimal, concebían a la división como la operación inversa a la multiplicación, de esta manera, para resolver una división, buscaban un número que multiplicado con el divisor sea igual al dividendo (Simondi y González, 2010).

En síntesis, el método de la galera proporciona una mirada a la técnica y al valor de la posición de los dígitos. Justificando el proceso, este algoritmo tiene similitudes al de la enseñanza tradicional actual. Además, al revisar los tipos de problemas de división y procesos de resolución se evidencian situaciones de reparto, agrupamiento y aritméticas, razón por la cual se considerará proponer este tipo de problemas, con el propósito de que los estudiantes puedan construir sus propios métodos que justifiquen los pasos utilizados en su proceso de resolución y, a través de este proceso, resignificar el algoritmo.

MARCO TEÓRICO

El estudio considera como encuadre central elementos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (de ahora en adelante, TSME), principalmente porque uno de los objetivos centrales de este enfoque radica en la "democratización del aprendizaje en matemática" (Cantoral, 2013, p. 34), es decir, se reconoce el uso del conocimiento matemático por diversos grupos humanos cuando aprenden, enfrentan y deben resolver una determinada situación. Esta democratización, como señala Reyes (2016), no solo se refiere a la igualdad en la posibilidad de aprender que otorgará el poder de saber, sino, también, a representar, y de alguna manera validar, la forma de construir conocimiento por todos los individuos, grupos, incluso minorías[2].

La Socioepistemología analiza el valor en uso de los conocimientos matemáticos, es decir, considera la funcionalidad de los objetos matemáticos en situaciones específicas, donde el estudiante tenga la necesidad de construir conocimiento. "La Socioepistemología se cuestionó qué es lo que se está enseñando, qué tipo de saber matemático está viviendo en el sistema educativo, a quién, para qué y por qué debe ser enseñado, aunado al cómo se deberían enseñar los contenidos matemáticos" (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014, p. 364).

Cuestionarse la enseñanza de la matemática escolar involucra una profunda crítica al discurso Matemático Escolar que normaliza una instrucción de clase basada en la transmisión de conocimientos sin uso y faltos de significado. "Son discursos que validan la introducción del saber matemático al sistema educativo, y que legitiman un nuevo sistema de razón" (Cantoral, 2013, p. 26). Esta forma de hacer las cosas y preparar la "instrucción" está instalada en la enseñanza

[2] Con minoría no nos referimos a un grupo reducido de personas, sino a la diversidad como estudiantes con necesidades educativas especiales.

escolar, llevando consigo una serie de técnicas de enseñanza y argumentos pedagógicos basados en la repetición de técnicas, que tienen relación con una tradición educativa y no con un aprendizaje matemático efectivo y funcional que les permita comprender el mundo, usar el conocimiento en situaciones específicas, y construir significados propios para la resolución de problemas dentro y fuera del escenario escolar (Cordero y Flores, 2007).

Reyes-Gasperini y Cantoral (2014) señalan que "el dME está centrado en objetos matemáticos que se estudian a través de la incorporación de ciertos algoritmos, argumentaciones y procedimientos específicos y, sobre todo, que carece de un sentido humano, es decir, en este tipo de centración la matemática es preexistente a cualquier actividad humana" (p. 364). El actual dME ha olvidado la construcción de los algoritmos y los razonamientos que llevan a los escolares a resolver problemas matemáticos utilizando sus propias técnicas, no reconociendo este proceso como parte fundamental del aprendizaje. En tal sentido, "la descentración del objeto es empezar por la evolución pragmática para significar la evolución conceptual" (Reyes, 2016, p. 47).

La Socioepistemología permite mirar las prácticas que acompañan la producción de un concepto matemático y dejar de analizar los conceptos como entidades preexistentes y alejadas de la construcción del ser humano. Esto no significa que se abandone el significado de ese concepto, sino que se comienza a observar el valor en uso que le otorgan ciertos grupos (Cantoral, 2013). Desde este enfoque, al igual que Cantoral (2013), creemos que el saber se construye, reconstruye, significa y resignifica, se ubica en el tiempo y en el espacio y se explora desde la óptica de quién aprende, de quién inventa, de quién lo usa.

Para ello, la TSME, haciéndose cargo del dME, postula necesariamente un rediseño del discurso matemático escolar, desde la construcción social de conocimiento matemático (Cantoral 2013; Cordero, 2006; Reyes, 2016). El rediseño tiene una doble interpretación y aceptación para la Teoría. Una de ellas es el rediseño de discurso matemático escolar, que denotaremos como rdME, donde se elaboran propuestas de enseñanza basadas en epistemologías renovadas, se comprende como la acción de planificar nuevas propuestas de enseñanza, considerando el análisis de los libros de texto, currículum, programas, evaluaciones, etc. La segunda es el Rediseño del discurso Matemático Escolar que denotaremos como RdME, el cual se refiere a la ruptura epistemológica que requiere de un nuevo paradigma del conocimiento matemático escolar. Se considera que no todos los rdME tienen como sustento teórico el RdME (Cantoral, 2013; Reyes, 2016).

Desde el rdME se desprende la noción de Resignificación, como el proceso donde el grupo de participantes puede develar y construir conocimientos matemáticos, otorgándoles significados propios. Será por este medio donde se pueda caracterizar las condiciones necesarias que evidencien la construcción de cocimientos y, con ello, aportar nuevamente al rdME (Cantoral, 2013; Martínez, 2005; Morales y Cordero, 2014; Suárez y Cordero, 2008).

Esta postura teórica trabaja de manera sistémica cuatro dimensiones: epistemológica, didáctica, cognitiva y social. Para la TSME es importante analizar cómo habita el tema de estudio en el dME, como también observar aspectos históricos y epistemológicos de cómo emerge un conocimiento matemático, pues ahí se pueden encontrar elementos que ayuden y aporten para diseñar situaciones que colaboren en el rdME, aspectos ya esbozados resumidamente en la sección de los antecedentes.

MÉTODO

Dado que el foco de interés es develar en los argumentos de los estudiantes aquellos elementos que permitan caracterizar el proceso de construcción del algoritmo de la división, con el objeto de comprender qué entienden ellos cuando enfrentan situaciones partitivas, de agrupamiento o aritméticas, se opta por un estudio cualitativo del tipo caso instrumental, acorde a la propuesta de Stake (1999).

Como se mencionó en los antecedentes, sobre el uso de material concreto, antes de trabajar el algoritmo de la división, las investigadoras solicitaron a la docente a cargo del curso que presentara a los estudiantes los bloques base 10 (material que cuenta con placas de centenas, decenas, unidades y unidades de millar), como una forma de aproximar a los niños y niñas a conocer este recurso educativo, que también se usa en el diseño de la situación propuesta. Por dos semanas, los estudiantes estuvieron descomponiendo de forma aditiva-canónica y componiendo números utilizando el material. Previo a esta intervención, los niños y niñas no habían trabajado estos contenidos, tampoco conocían el material y su uso.

Contexto y recogida de datos

Los escolares que participaron en el estudio fueron 5 estudiantes de cuarto año básico de un colegio particular subvencionado, ubicado en un sector de la Región Metropolitana de Santiago en Chile con altos índices de vulnerabilidad social. En los últimos años ha descendido considerablemente la matrícula de esta escuela, las autoridades de la institución señalan que esto tiene tres motivos: lo peligroso del sector, las familias no se atreven a dejar a sus niños y niñas en esta escuela; los bajos resultados, las pruebas estandarizadas aplicadas a nivel país (SIMCE) evidencian un rendimiento académico cada vez más bajo; y el narcotráfico, que termina sacando a los y las estudiantes del sistema escolar. El acceso a la institución fue solicitado por el equipo directivo para apoyar el trabajo docente y técnico pedagógico del establecimiento escolar.

Dado el contexto de alta vulnerabilidad era imprescindible conocer a los actores de la escuela, donde los protagonistas tuviesen confianza con las investigadoras. Es por ello que se observaron las clases de matemática durante 3 meses, de tal manera que los escolares reconocieran a las investigadoras como profesoras y, a su vez, ellas indagaran en la matemática trabajada en ese contexto escolar.

Si bien el curso tiene una matrícula de 11 estudiantes, la selección de participantes se determinó por su regularidad en la asistencia a clases. Lamentablemente, la escuela cuenta con una tasa alta de inasistencia y deserción escolar, por tanto, los 5 participantes son aquellos estudiantes que estuvieron presentes durante todo momento, incluso en las jornadas anteriores con el trabajo con bloques base 10.

De acuerdo con las observaciones previas, el docente a cargo de la asignatura de matemática se basa en el texto de estudio entregado por el MINEDUC para desarrollar sus clases, hay poca presencia de material concreto. Al comienzo de las unidades, el docente entrega la definición del contenido que le corresponda tratar, explica un par de ejercicios y luego trabajan con guías o páginas del texto escolar. Se observa que los estudiantes no dominan las tablas de multiplicar y algunos tienen dificultades en el cálculo de adiciones y sustracciones. Al comienzo del trabajo con divisiones, solicitamos al docente no definir el contenido, de tal manera que los estudiantes construyeran su definición.

Se diseñó una situación que abarcara el proceso algorítmico, dos problemas, partitivo y por agrupamiento y, considerando lo expuesto por Kamii (1994), una instancia de reflexión del proceso realizado. En todo momento se tomaron registros audiovisuales, utilizando entrevistas semiestructuradas, de tal manera que se realizaran preguntas acordes a la situación, y que proporcionaran información relevante del proceso, así como preguntas que nacieran durante la investigación para develar aún más, en los argumentos de los estudiantes, tanto la construcción del algoritmo como la definición que ellos van construyendo.

Procedimiento y diseño

Se planificaron dos clases experimentales, con una duración de 2 horas cada una. Los estudiantes trabajaron en grupo, pues la intención era analizar las respuestas de los participantes desde la interacción con sus pares. Para lograr que ellos discutieran y argumentaran sus procedimientos contaron con los bloques base 10.

El siguiente diagrama, presente en la figura 5, muestra el esquema de la situación, conformada por dos momentos (M1 y M2) de trabajo con material y un momento (M3) de reflexión sobre el proceso realizado.

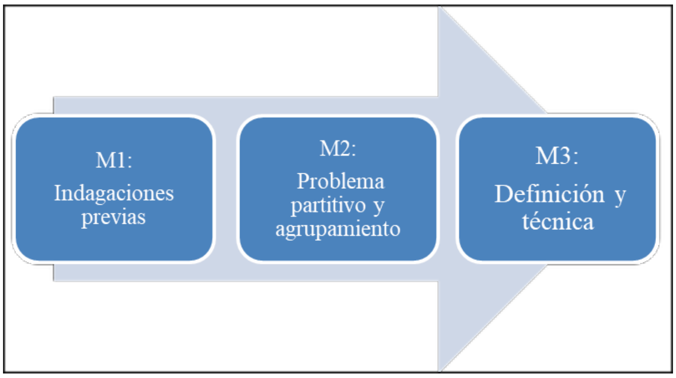

Figura 5. Esquema de la situación con sus tres momentos

La situación se realizó en dos clases experimentales en días consecutivos. El primer día solo se ejecutó el momento 1, al día siguiente los momentos 2 y 3. Esto con el propósito de no intervenir en las otras tareas escolares y no saturar a los estudiantes con la asignatura. A continuación, se describe cada momento con su respectivo objetivo.

Momento 1: indagaciones previas

Sin definir el concepto y tampoco trabajar previamente con ellos la división, se presentó a los estudiantes algunas divisiones que deben resolver. Se les propuso utilizar material concreto, con el propósito de que tuvieran un recurso al cual recurrir para resolver la tarea, y que escribieran o dibujaran tanto el procedimiento realizado como la respuesta, para obtener evidencias y analizar sus resultados. A continuación, se muestran las divisiones propuestas y su justificación del por qué fueron trabajadas, considerando algunos elementos de los estudios de Maza (1991).

Tabla 1
Divisiones propuestas y su justificación

División	Justificación
40 dividido en 2 partes iguales	Una división con resto cero y donde el cálculo sea relativamente fácil. Si esto resulta ser simple para los estudiantes, se continúa con una de mayor complejidad, de tal manera que requieran realizar un proceso.
	Aquí, la primera cifra del dividendo es mayor que el divisor.
122 dividido en 3 partes iguales	División que no permite dividir la cifra de las unidades en tres. En los algoritmos de la adición, sustracción y multiplicación comienzan calculando desde la unidad, cuestión que no permite esta división, por lo demás cada una de las cifras del dividendo es menor que el divisor.
116 dividido en 5 partes iguales	A diferencia de la anterior, división donde los estudiantes podrían comenzar dividiendo las cifras de las unidades.

Tabla 1
Divisiones propuestas y su justificación

División	Justificación
35 dividido en 2 partes iguales	Una división con resto distinto de cero. El estudiante puede dividir tanto la cifra de las unidades como la cifra de las decenas. Ambas cifras del dividendo son mayores que el divisor.
31 dividido en 3 partes iguales	División con resto distinto de cero. Podría resultar fácil para los estudiantes señalar el cociente, observaremos qué indican sobre el resto.
341 dividido en 2 partes iguales	División donde el estudiante debe calcular la mitad del número, aunque, al parecer, no sería sencillo, pues tiene resto distinto de cero y el divisor es un número de tres cifras.
101 dividido en 7 partes iguales	División donde tenemos la presencia de un cero en el dividendo, dificultad evidenciada en la literatura cuando los estudiantes deben dividir.

El objetivo de este momento es indagar en los conocimientos que ponen en juego los estudiantes, cuáles son sus ideas previas y qué argumentos utilizan para validar su respuesta.

Esta clase experimental estuvo programada para el primer día, pues como nueva unidad de aprendizaje, se creía que los estudiantes tomarían más tiempo para responder, para usar el material propuesto y para tomar registro de sus datos. Los momentos 2 y 3 se realizaron al día siguiente.

Momento 2: problema partitivo y agrupamiento

Si bien en los antecedentes y aspectos históricos revisados se destaca la presencia de problemas para resolver divisiones, a los estudiantes se les presentó un problema de cada tipo, partitivo y agrupamiento, con el objetivo de detectar en sus argumentos los procesos de división llevados a cabo y significados construidos. Además, considerando el dME chileno, estos tipos de problemas se enseñan en paralelo desde tercer año básico (niños y niñas de 8 años).

Los problemas propuestos fueron los siguientes:

- Un profesor debe repartir 157 lápices entre cuatro estudiantes, de tal manera que cada estudiante reciba la misma cantidad de lápices. ¿Cuántos lápices le corresponden a cada uno?
- Un profesor reparte 62 lápices entre un grupo de estudiantes, de tal manera que a cada uno le corresponden 7 lápices. ¿Cuántos estudiantes son?

Momento 3: definición y técnica

El tercer momento se pensó para consignar aún más el proceso que estaban realizando los estudiantes. Esta fue una instancia de reflexión, donde se invitó a los niños y niñas a definir qué es una división, señalando al menos tres argumentos. Se considera esta cantidad de argumentos pues postulamos que al menos uno de ellos tendrá relación con la definición aritmética de la división.

También se propuso a los estudiantes que explicaran cómo resolver una división sin utilizar el material concreto, construyendo una estrategia. Esto con el objetivo de que construyeran un algoritmo que tuviera sentido para ellos y detectar en sus argumentos elementos clave que nos permitieran proponer un rediseño al discurso matemático escolar.

RESULTADOS

El siguiente apartado muestra un extracto de las respuestas obtenidas de los estudiantes y parte de sus producciones. Considerando los tres momentos de la situación, el marco teórico, las preguntas de investigación y las respuestas de los estudiantes, se definieron tres categorías de análisis: el cociente como un todo, incluyendo el residuo y el divisor; el reparto, y, por último, el algoritmo y su resignificación. Los resultados se presentan a continuación.

El cociente como un todo, incluye el residuo y el divisor

En el momento 1 de indagaciones previas, se obtuvieron las siguientes respuestas de los estudiantes:

Profesor: Si dividimos 122 en tres partes iguales ¿Cuál será el resultado? [Los estudiantes representan el 122 con los bloques base 10, ver figura 6].

Figura 6. Representación concreta de 122

Estudiante 1: Esto no se puede, no tenemos de a tres.

Estudiante 2: ¿Y si partimos una de estas [indicando el bloque de las centenas] en puras de estas [indicando el bloque de las decenas, figura 7]?

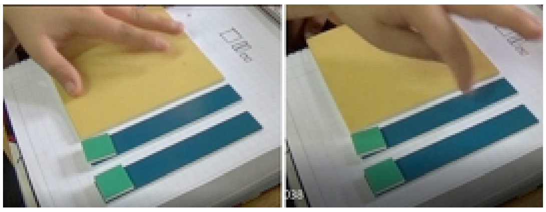

Figura 7. La centena puede representar 10 decenas

Estudiante 1: Sí, eso podemos hacer, igual está difícil.

Estudiante 3: Ya, pero una de esas amarillas son 10 de esas azules [los estudiantes proceden hacer el cambio, ver figura 8].

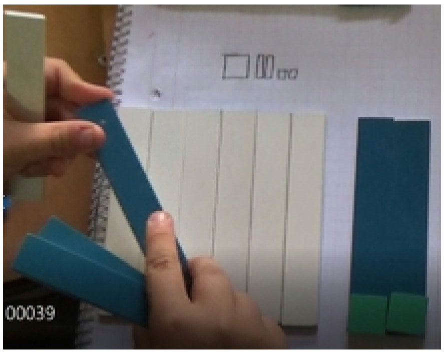

Figura 8. Una centena son 10 decenas

Estudiante 2: Entonces, tenemos 12 de las azules [los alumnos comenzaron a realizar el reparto de los bloques en tres, ver figura 9].

Estudiante 1: Son 4 para cada uno y estos [tapando las dos unidades] me sobran (figura 9).

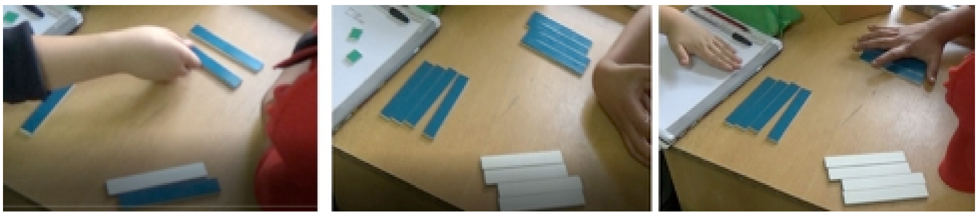

Figura 9. Reparto en tres de los bloques que representan el 120

Profesor: Entonces si dividimos 122 en 3 obtenemos 4.

Estudiantes 2 y 3: Sí.

Estudiante 4: No, ¿cómo 122 dividido en 3 son 4? Nos faltaría completar el número. Es raro eso, como que no puede ser tan chico [indicando el 4], porque 4 más 4 y 4 son 12, falta para 122… ¡Mentira! ¡Son 40! [Uno de los estudiantes observa que el cociente tiene alguna relación con el dividendo].

Estudiante 5: Sí, son 40 porque cada una de esas [indicando los bloques de la decena] son 10.

Profesor: ¿Entonces cuál sería la respuesta?

Estudiante 4: Son 40 para cada uno y se guardan 2.

Profesor: ¿Cuál es la respuesta?

Estudiante 4: 40 para cada uno y se guardan dos.

Con la respuesta entregada por los estudiantes, se preguntó por otra división para indagar en aquello.

Profesor: ¿Y 116 dividido en 5 partes iguales? ¿Cuál sería la respuesta?

Estudiante 4: Entonces tenemos esto [dibujándolo en el papel, ver figura 10].

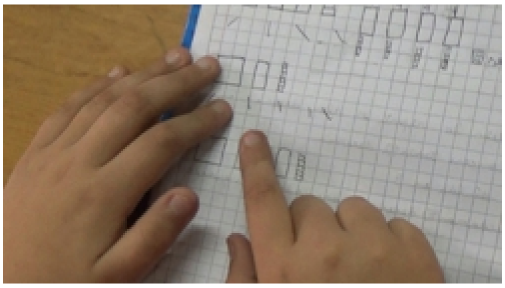

Figura 10. Representación pictórica de 116

Estudiante 3: Yo lo hago con los bloques.

Estudiante 1: Pero no pongas el bloque amarillo [indicando la centena], pon 10 de los azules [indicando las decenas], hay que partirlo.

Estudiante 2: Igual hay que romper una azul [indicando la decena] en las verdes [unidades].

Estudiante 3: ¿Por qué?

Estudiante 2: Porque tenemos los 10 azules [decenas] que son desde el bloque amarillo, más la azul del principio, son 11 azules [decenas], si separas las azules en cinco, son dos para cada uno y te queda una azul.

Estudiante 3: Entonces separa esa [indicando el bloque azul correspondiente a una decena] en las verdes [unidades].

Estudiante 2: Esa azul es como si fueran 10 verdes, entones tenemos 16 verdes [16 unidades].

Estudiante 3: Nos queda esto y nos sobra una, que la guardamos [ver figura 11].

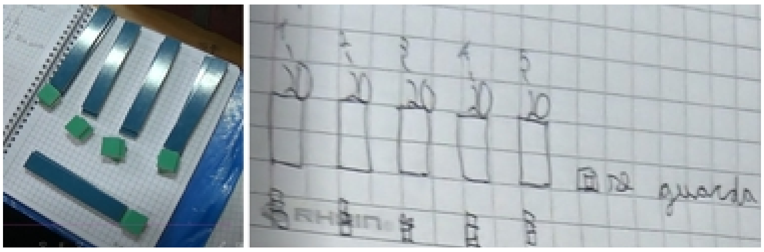

Figura 11. Representación concreta y pictórica de la división 116 entre 5

Profesor: Entonces si dividimos 116 entre 5 ¿Cuál es la respuesta?

Estudiante 1: Son 23 para cada uno y se guarda 1.

Estudiante 5: Pero igual lo que se guarda debe ir al medio, porque se podría repartir… Es como si fuera para todos pero no es para ninguno…

Estudiante 1: Claro, el que sobra es como para todos, pero como no lo podemos partir, no lo podemos repartir, debería estar siempre en el centro lo que sobra.

Profesor: ¿Me pueden explicar esa idea? Por ejemplo, 35 dividido en dos partes iguales. [Se les presenta otra división, pues los estudiantes ya habían guardado los bloques correspondientes al reparto anterior].

Estudiante 1: Ya tenemos dos de estos [indicando las decenas] para cada uno, la otra decena hay que romperla en las pequeñas, serían 10, entonces nos queda así [figura 12].

Estudiante 5: Entonces la respuesta sería así…[comienza a dibujar, figura 13].

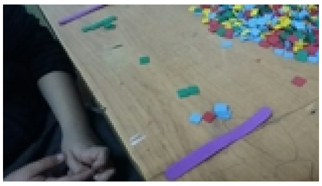

Figura 12. Representación concreta de 35 dividido en 2

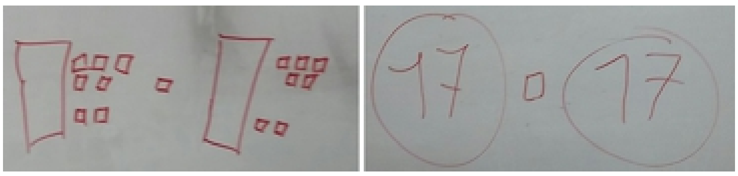

Figura 13. Representación pictórica y simbólica de 35 dividido en dos

Estudiante 5: Entonces, la respuesta sería 17 para cada uno y sobra 1, que es como si fuera para cada uno, pero no lo podemos repartir.

Estudiante 3: Algo así [el estudiante escribe lo que se muestra en la figura 14].

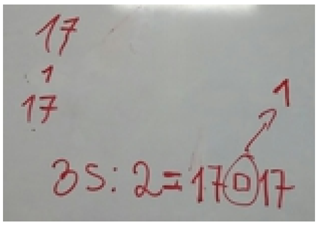

Figura 14. Cociente de la división 35 entre 2

Los estudiantes mencionan que el residuo debe estar al centro, porque no corresponde a ninguno de los grupos repartidos y, al mismo tiempo, puede pertenecer a cada uno de los grupos.

Profesor: Entonces, ¿la respuesta a una división no es un solo número como en la adición, sustracción o multiplicación?

Estudiante 2: No sé, profesor, yo nunca he sabido bien cómo se hace eso.

Profesor: ¿Qué?

Estudiante 2: Eso de sumar, restar y multiplicar.

Estudiante 4: En la división la respuesta es todo, porque nada se quita, solo se reparte, entonces cada uno de estos [indicando los grupos] y esto [indicando el resto] son las respuestas.

Las figuras 15 y 16 ejemplifican lo expuesto por los estudiantes.

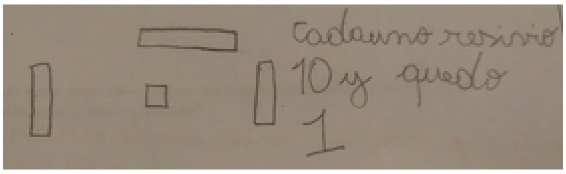

Figura 15. Producción correspondiente a 31 dividido en 3

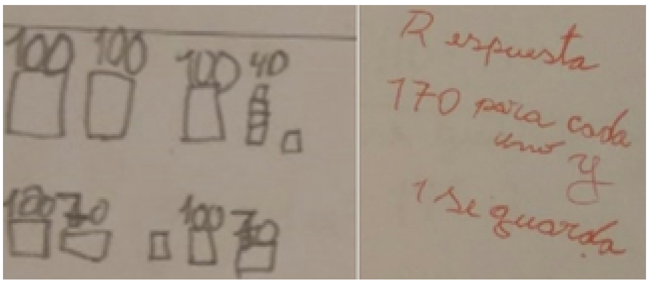

Figura 16. Producciones correspondientes a 341 dividido en dos

En este primer momento, evidenciamos que los estudiantes señalan que el cociente de la división no es solo un número, entregando los primeros indicios de una división aritmética, esto es, consideran todas las partes "repartidas" y el residuo como la respuesta de una división. Una de las posibles causas de aquello es que miran el resto como un número que eventualmente se podría dividir, pero no se puede (recordemos que aún ellos se encuentran trabajando con números naturales, por tanto, los decimales aún no entran en juego).

El reparto

Continuando con las tareas de división el profesor presentó dos problemas a los estudiantes. La primera situación es la siguiente: “Un profesor debe repartir 157 lápices entre cuatro estudiantes, de tal manera que cada estudiante reciba la misma cantidad de lápices. ¿Cuántos lápices le corresponde a cada uno?”

Estudiante 4: Si tiene que repartir, debemos dividir los 157 lápices en cuatro.

Estudiante 5: Entonces, debemos partir el amarillo [bloque de las centenas] en las azules [bloques de las decenas].

Estudiante 3: Ya, pero sin eso [indicando el material]. ¡Más rápido, son 15 azules, teníamos 5 y las 10 de esa! [Indicando el bloque de las centenas].

Estudiante 4: Sí, son 15. Ahora separamos en 4 estas 15, entonces son 4, 4, 4, 4 y 4, [haciendo el proceso de forma mental, todo el grupo está atento] no, son 4, 4, 4 y 4, no, eso es 16, me paso de 15.

Estudiante 5: Son 4, 4 y 4, porque 4+4+4 es igual a 12 pero quedan 3, ¿entonces 4 para cada uno?

Estudiante 2: Me perdí [exclama indicando que no logró comprender la explicación de los compañeros], ¿Podemos hacerlo con los bloques?

Estudiante 1: Sí, mejor.

Los estudiantes realizan el reparto con los bloques y obtienen el siguiente resultado (ver figura 17).

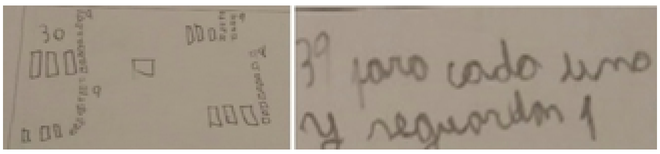

Figura 17. Representación pictórica de 157 dividido en 4

En esta tarea observamos un intento de los estudiantes por realizar el reparto sin el material, sin verbalizarlo. Pensaron en la multiplicación, pero dejaron la idea. Aquí se realizó la siguiente pregunta.

Estudiante 1: Son 39 para cada uno y sobran 1.

Profesor: Viendo lo que realizaron, ¿cómo explicarían el procedimiento sin utilizar los bloques?

Estudiante 1: Mmm, tenemos 157 dividido en 4, entonces repartimos los 15 en 4 y quedan tres, esos se cambian y quedan 30, no, 37 pequeñas [indicando las unidades] y se reparten en 4, quedando solo una.

Profesor: Entonces, ¿tiene alguna relación lo de $4+4+4$ que dijo hace un rato él? [refiriéndose al estudiante 5].

Estudiante 5: Sí, no, no sé, entonces, ¿estaba bien lo de 4+4+4? Son tres que es lo primero que quedó ¿o no?

Estudiante 4: Es como buscar cuántas veces este 4 da los 15 primero y mmm, y los 37 pequeños, mmm es como 4 por… No me sé las tablas.

Estudiante 3: Sería más fácil si supiéramos las tablas [haciendo referencia a las tablas de multiplicar].

Estudiante 2: Pero igual podemos usar los dedos para sumar o dibujar palitos para contar.

Estudiante 1: Pero con las tablas sería más fácil [haciendo referencia a las tablas de multiplicar].

Profesor: Resuelvan el siguiente problema: “Un profesor reparte 62 lápices entre un grupo de estudiantes, de tal manera que a cada uno le corresponden 7 lápices. ¿Cuántos estudiantes son?”

Estudiante 2: Está difícil esto.

Estudiante 3: ¿Esto no es una división?

Estudiante 2: Necesitamos 62 lápices para realizar esto y los ponemos de a 7.

Estudiante 1: Algo así (figura 18).

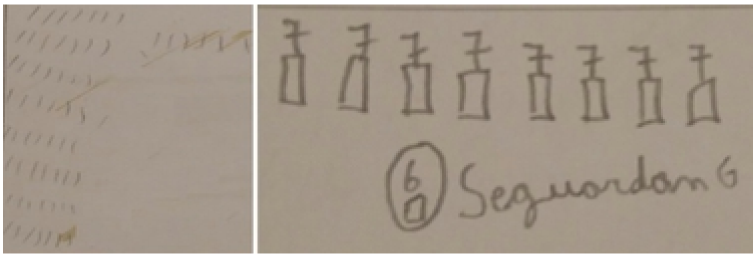

Figura 18. A la izquierda el dibujo de los 62 lápices agrupados en 7, a la derecha una representación realizada por el estudiante E5

Estudiante 5: Entonces son 8 estudiantes que tienen 7 lápices y sobran 6 lápices que no podemos repartir porque son solo 7 para cada estudiante.

Profesor: Entonces repartieron los 62 lápices. ¿Este problema corresponde a una división?

Estudiante 5: No, porque tenemos los 62 lápices y…no sé.

Estudiante 1: No es una división porque juntamos de a 7, no dividimos, juntamos.

Profesor: Ambas situaciones que acaban de resolver… ¿Se desarrollan de igual manera?

Estudiante 2: No, en la primera repartimos y en la segunda juntamos, como que juntamos en grupos.

Estudiante 3: No son iguales porque en la primera situación repartimos, ahí sí dividimos, pero en esta [indicando la segunda tarea] no, porque juntamos de a 7.

En este momento observamos que, si bien los estudiantes pudieron reconocer una situación de división del tipo partitiva, no lograron indicar que la división del tipo agrupamiento también es una división. Si bien indicaron que en la segunda tarea juntan y hacen un reparto, no es natural en ellos pensar que este tipo de tareas evoca a una división.

El algoritmo y su resignificación

En cada uno de los momentos los estudiantes han dado luces del proceso de construcción de la división. Si bien el siguiente extracto es parte del primer momento, la hemos categorizado en esta sección pues tiene relación con el proceso de resignificación que realizan los estudiantes.

Por ejemplo, en la división 101 en 7, el proceso realizado por los estudiantes se observa en la siguiente figura (ver figura 19).

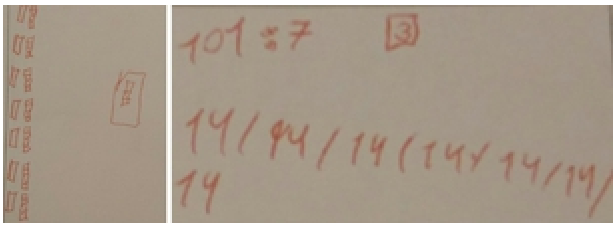

Figura 19. Representación de 101 dividido en 7

Estudiante 2: Son 14 para cada uno y quedan 3.

Estudiante 5: Son como 7 veces 14 y quedan 3.

Profesor: ¿Cómo comprobarían que su respuesta está correcta?

Estudiante 3: Hay que volver a juntar, todos los 14.

Estudiante 4: Todos los 14 dan 98, ¿y cuánto debe ser?

Estudiante 3: 101.

Estudiante 4: Entonces está mal.

Estudiante 2: No está mal, son los 98, pero faltan estos tres que guardamos, eso da los 101.

Estudiante 1: Para comprobar juntamos todos incluyendo los que guardamos [refiriéndose al residuo].

Estudiante 5: ¿Tenemos que utilizar las tablas? Es como 14 por 7 [ver figura 20].

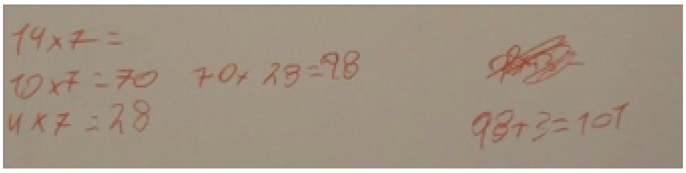

Figura 20. Uso de las tablas de multiplicar para validar la división

Los estudiantes tienen dificultades para calcular 14 por 7.

Estudiante 5: Entonces 14 por 7… No sé. ¿Puedo separar el 14?

Profesor: ¿Cómo lo separarías?

Estudiante 5: 10 por 7 y 4 por 7, es más fácil, después los junto y a eso le sumo los 3 [figura 20].

Estudiante 2: Eso es, yo creo que está bien eso que hizo E5 porque da 101, juntamos todo y es 101.

Profesor: De acuerdo con esto que ustedes han señalado. ¿Cómo obtenemos el resultado de la división?

Estudiante 5: Es una multiplicación al revés.

Profesor: ¿Cómo es eso?

Estudiante 5: Es como una multiplicación, la división es el revés de la multiplicación.

Profesor: En este caso obtuvieron como respuesta el 14 para cada uno. ¿Cómo lo relacionan con la multiplicación?

Estudiante 3: El 14 se multiplica por el número que dice en cuánto repartir y le sumamos el resto y listo.

Los estudiantes esbozaron la definición aritmética y euclidiana de la división.

En el momento 3, cuando se les invitó a construir una estrategia sin utilizar material, los estudiantes realizaron lo siguiente (ver figura 21). Se les indicó a los participantes que ellos propusieran la división.

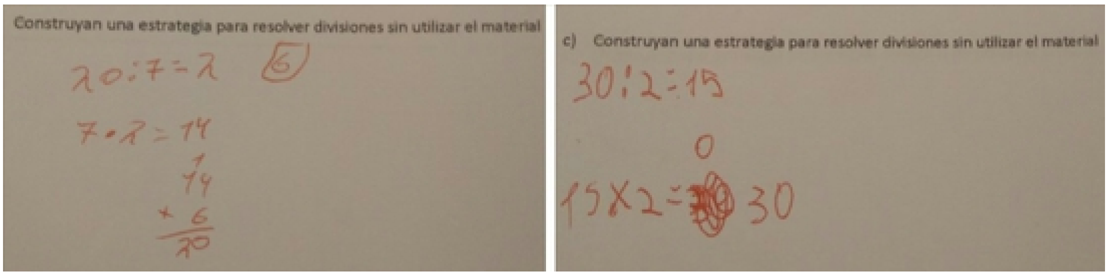

Figura 21. Estrategia para resolver la división

Nótese que, en la producción de la izquierda, la división tiene resto 6, por tanto, los estudiantes lo agregan al producto entre 7 y 2. En cambio, la figura de la derecha tiene resto cero, acá los estudiantes, si bien escriben el cero, no lo agregan al producto entre 15 y 2.

Luego cuando se les solicitó a los estudiantes explicar qué es una división, evidenciamos la división partitiva y la definición aritmética, similar a la euclidiana (figura 22) .

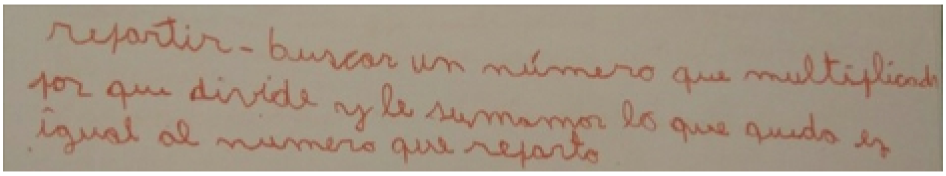

Figura 22. Definición de la división

De acuerdo con el trabajo realizado en este momento, los estudiantes construyeron una definición del algoritmo de la división, así como también describieron y argumentaron cada uno de sus procesos.

CONCLUSIONES

En relación con la primera pregunta, los estudiantes ¿tienen la necesidad de usar y construir un algoritmo que les permita resolver una división? Observamos que construyen un algoritmo con el propósito de resolver de forma rápida y eficiente la tarea solicitada, por ejemplo, cuando quieren dar respuesta a una división sin ayuda del material (M2). Observamos también la necesidad de incorporar un algoritmo o pensar en una estrategia que les sirva para realizar el proceso de forma rápida. Sin embargo, el proceso pierde sustento cuando se dan cuenta que requieren de otros cálculos que no dominan del todo para resolver la situación, como, por ejemplo, las tablas de multiplicar. Al igual que en Roa (2011), se evidenció que la falta de dominio de estas representa un problema para resolver rápidamente la división; sin embargo, también se observa que no imposibilita el cálculo, pues los estudiantes recurren a otras estrategias para responder.

Por otro lado, respondiendo la segunda pregunta ¿cuáles son los argumentos que utilizan los estudiantes que evidencian la comprensión y el uso del algoritmo de la división? Uno de los puntos importantes a destacar, señalados por los estudiantes, es el hecho de considerar que el resto debe ir al centro del proceso (M1). Así como cada método tiene sentido para los matemáticos de la época y de quién lo usa, como dejar el resto sobre el dividendo, para los estudiantes tiene sentido dejar el resto al centro, una construcción realizada por ellos argumentando esta decisión. En sus repuestas los niños y niñas comprenden que la división no está terminada, y que eventualmente podrían continuar con el proceso, pero como aún desconocen esto, dejan el resto en el centro señalando dicha situación.

En cuanto a los argumentos de los estudiantes de cuarto año básico que permiten caracterizar el proceso de construcción del algoritmo de la división en el sistema de los números naturales, y considerando un rdME, podemos mencionar que los niños y niñas piensan en una definición del tipo partitiva y aritmética de la división. En tal sentido, introducir la división de agrupamiento al mismo tiempo que la división partitiva, si bien enriquece, ampliando el proceso y la comprensión de ella, podría resultar confusa para el aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, postulamos que dicho proceso debería ser más bien un tránsito entre una y otra en lugar de aprendizajes trabajados en paralelo, algo que podría causar, en este caso, una mayor dificultad. Ahora bien, esto abre una nueva línea de trabajo. ¿Cómo realizar este tránsito o este proceso de enseñanza-aprendizaje con este tipo de problemas? Una alternativa posible sería preguntar por la cantidad de grupos formados con la misma cantidad de elementos y luego ¿cómo articularlo con el algoritmo? o ¿cómo lograr que observen que aquello también representa una división?

En cuanto al algoritmo como tal, y a su resignificación, evidenciamos en sus argumentos la presencia de la multiplicación como una operatoria que explica el proceso de la división. Los estudiantes concluyen y discuten que es como la operación inversa a la multiplicación, detallado en el tercer subapartado de la sección de resultados de este escrito. Además, realizan sus cálculos con el uso de la multiplicación. Del mismo modo, al preguntarles cómo explicarían a sus compañeros qué es una división o cómo comprobarían sus resultados, ellos no tienen problemas en indicar una definición de tipo aritmética o euclidiana para detallar el proceso llevado a cabo. Acá los estudiantes construyeron, desde la reflexión y discusión grupal, un sistema de pasos (Kamii, 1994) que les permitió resolver exitosamente la tarea propuesta.

Finalmente, este estudio arroja otro elemento que amerita continuar investigando, como pesquisar a largo plazo las diferencias y/o similitudes que existen en los aprendizajes de los niños y niñas que construyen el algoritmo de la división versus aquellos que trabajan con este procedimiento como una receta entregada por el sistema escolar.

REFERENCIAS

Aguiriano, S. S. (2015). *Estudio sobre el uso del algoritmo de la división y su vínculo en la transición de la aritmética al álgebra. El caso de los anillos euclídeos con alumnos del primer ingreso de la carrera de Ingeniería Agronómica de la INAG*. Tesis de Maestría en Matemática Educativa, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras.

Aharoni, R. (2012). *Aritmética para padres y maestros. Un libro para adultos sobre la matemática escolar*. Santiago, Chile: Editorial Universitaria.

Alfaro, S., Espinoza, Y. y Cano, S. (Eds.) (2014). *Matemática 4º año básico. Texto del estudiante.* Santiago, Chile: Galileo.

Belmonte, J. M. (2003). El cálculo en la enseñanza primaria: la adición y la sustracción. En M. C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp. 133-158). Madrid, España: Pearson Educación.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza.

Bressan, A. (s.f.). *Los principios de la educación matemática realista*. Recuperado el 27 de marzo de 2019 de https://educrea.cl/los-principios-la-educacion-matematica-realista/

Brousseau. G. (2007). *Introducción a la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Zorzal.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Charles, R. I., Caldwell, J. H., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J. V., Crown, W. D., … y Van de Walle, J. A. (2014). *Matemática – 3º de Educación Básica. Texto del estudiante.* Santiago, Chile: Pearson Educación de Chile.

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* Granada, España: Universidad de Granada.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 824-830). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un Estudio Socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *RELIME, 10*(1), 7-38.

Dolores, C. (2007). La derivada y el cálculo: una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En G. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Navarro, I. López y C. Carrillo (Eds.), *Matemática educativa: algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* México DF, México: Ediciones Díaz de Santos.

Gómez, B. (1989). *Numeración y cálculo*. Madrid, España: Síntesis.

Kamii, C. (1994). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid, España: Aprendizaje Visor.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *RELIME, 8*(2), 195-218.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Madrid, España: Síntesis.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). Bases curriculares: primero a sexto básico. Santiago, Chile: Autor.

Mora, W. (2014). *Introducción a la teoría de números. Ejemplos y algoritmos.* Cartago, Costa Rica: Revista digital Matemática, Educación e Internet.

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. *RELIME, 17*(3), 319-345.

Oliva, M., Rodríguez, P., Enesco, I., Jiménez, L. y Dopico, C. (2008). Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellos. Un estudio sobre los problemas de división con resto en alumnos de 1º de ESO. *Anales de Psicología, 24*(2), 201-212.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente y socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Barcelona, España: Gedisa.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema, 28*(48), 360-382.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 232-256). Madrid, España: Síntesis.

Simondi, V. Y. y González, S. R. (2010). Tres civilizaciones. Tres numeraciones. *Revista de Educación Matemática, 25*(1), 3-27.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Bolema, 28*(50), 1525-1544.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 3*(1), 51-58.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Villota, J. (2014). *División, errores y soluciones metodológicas* (Trabajo fin de Licenciatura en Matemática). Universidad de Nariño, Colombia.

Vygotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos cognitivos superiores*. Barcelona, España: Grijalbo.

Angélica Aravena
Universidad Mayor
angelica.aravena@mayor.cl

Astrid Morales
Universidad Católica de Valparaíso
astrid.morales@pucv.cl

Recibido: 13/11/2018. Aceptado: 25/04/2019
doi: 10.30827/pna.v13i3.8210

ISSN: 1887-3987