



**UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS**

**ESCUELA DE POSTGRADO**

**Programa de Magister en Educación Matemática**

## **TITULO DE LA TESIS**

“Caracterización de los usos estudiantiles de figuraciones ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia como medio de construcción de un modelo gráfico en matemática en la enseñanza secundaria”

**Tesis para optar al grado de Magister en Educación  
Matemática**

**Tesista: Iván Esteban Pérez Vera**

**Profesor Tutor: Dr. Carlos Cabezas**

**Profesor Patrocinante: Dra. María Verónica Díaz**

**Agosto, 2015**

**Santiago-Chile**

**©2015, Iván Esteban Pérez Vera**



**UNIVERSIDAD DE LOS LAGOS**

**ESCUELA DE POSTGRADO**

**Programa de Magister en Educación Matemática**

## **TITULO DE LA TESIS**

“Caracterización de los usos estudiantiles de figuraciones ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia como medio de construcción de un modelo gráfico en matemática en la enseñanza secundaria”

**Profesor Tutor: Dr. Carlos Cabezas**

**Profesor Patrocinador: Dra. María Verónica Díaz**

**Agosto, 2015**

**Santiago-Chile**

**©2015, Iván Esteban Pérez Vera**

## **AUTORIZACIÓN PARA LA REPRODUCCIÓN DE LA TESIS**

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita el trabajo y a su autor.

FECHA-----

-----

FIRMA

-----

DIRECCIÓN

-----

E-MAIL – TELÉFONO

# **AGRADECIMIENTOS**

A Estefanía y Antonia.

A todos los profesores del Postgrado en Educación Matemática de la Universidad de los Lagos, en especial a Eduardo Carrasco por plantar la semilla de la curiosidad investigativa, al Dr. Carlos Cabezas por creer en este trabajo y a la Dra. Verónica Díaz por no permitirme dejar inconcluso este proceso.

A mis compañeros de estudio, ya que de ellos fue de quien sin duda más aprendí.

A mis estudiantes del Colegio Barrie Montessori de Peñalolén, que tanto material aportaron a la investigación, siempre con una sonrisa.

A mi familia, amigos y compañeros que de alguna u otra forma aportaron a este trabajo.

# TABLA DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS .....	4
TABLA DE CONTENIDOS.....	5
INDICE DE FIGURAS.....	7
INDICE DE TABLAS .....	8
RESUMEN.....	9
ABSTRACT.....	10
INTRODUCCIÓN .....	11
CAPITULO 1. ANTECEDENTES.....	15
CAPITULO 2. PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS.....	22
2.1 Hipótesis de trabajo .....	22
2.2 Pregunta orientadora.....	23
2.3 Objetivo general. ....	23
2.4 Objetivos específicos.....	23
CAPITULO 3. ANTECEDENTES TEORICOS .....	24
3.1 La mirada de la Socioepistemología en la Matemática Educativa.....	24
3.2 Dualidad Local-Global .....	25

3.3 Funcionamiento y forma .....	26
3.4 Resolución de problemas.....	26
3.5 Pensamiento Variacional.....	30
3.6 Modelación.....	32
3.7 Visualización.....	33
3.8 Grafica.....	39
CAPITULO 4. METODOLOGIA .....	42
4.1 Instrumentos .....	42
CAPITULO 5. RESULTADOS .....	46
Entrevista.....	57
CAPITULO 6. ANALISIS DE RESULTADOS .....	60
6.1 Interpretaciones de los estudiantes: Primer nivel de análisis .....	60
6.2 Interpretaciones de los estudiantes: Segundo nivel de análisis .....	62
6.3 Funcionamiento y forma de las prácticas de figuración como medio de construcción de modelos gráficos en situaciones de movimiento.....	64
CAPITULO 7. CONCLUSIONES.....	66
Bibliografía .....	68
Anexos .....	73
Anexo 1. Situación de aprendizaje Epifanía.....	73

## INDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1-</b> Dibujos previo a gráfica cartesiana y gráfica cartesiana .....	13
<b>Figura 2 -</b> Gráfica Situación de aprendizaje "Epifanía" .....	17
<b>Figura 3-</b> Reporte de figuración y Gráfica obtenida con sensor .....	18
<b>Figura 4-</b> Figuración Previa - Gráfica en Papel - Gráfica por sensor .....	19
<b>Figura 5-</b> Representación Icónica (comics) - Gráfica Cartesiana .....	20
<b>Figura 6-</b> Modelos gráficos de la posición y la velocidad .....	61
<b>Figura 7-</b> Representaciones de Contexto .....	63
<b>Figura 8-</b> Secuencia de movimiento, contexto y gráfica.....	64

## INDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1-</b> Resultados estudiante Daike .....	50
<b>Tabla 2-</b> Resultados estudiante Victoria.....	52
<b>Tabla 3-</b> Resultados estudiante Cristóbal.....	55
<b>Tabla 4-</b> Resultados estudiante Bruno.....	58



## **RESUMEN**

Esta investigación en el marco de la Educación Matemática da cuenta de las características de los usos estudiantiles de figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia. En particular se aborda el estudio de los procesos del uso de gráficas, colocando en escena una situación problema de modelación del movimiento que permite estudiar un fenómeno de cambio a través de los registros gráficos. Se explicitan los resultados obtenidos en términos de los niveles de análisis que van desde las visiones locales y globales de la gráfica, siguiendo con la noción de práctica socio escolar de figuración, recurriendo a nociones teóricas provenientes de la Socioepistemología y la teoría de la imagen y de los análisis semánticos que permitieron su caracterización.

Palabras claves: gráficas cartesianas, modelación del movimiento, registros.

## **ABSTRACT**

This research in the context of Mathematics Education realizes the characteristics of student applications prior to the Cartesian graph to a phenomenon of variation of time and distance configurations. In particular the study of processes using graphical addressed, putting on stage a situation problem of modeling the movement that allows to study a phenomenon of change through the graphic records. The results obtained in terms of the levels of analysis ranging from local and global views of the graph, according to the notion of figuration partner school practice, using theoretical notions from the Socioepistemology and image theory are explained and semantic analysis enabled characterization.

Keywords: Cartesian graphs, modeling of motion records.

# INTRODUCCIÓN

Al finalizar la enseñanza básica y según la reforma vigente en Chile, en la unidad de Álgebra, los alumnos comienzan el reconocimiento de funciones y su distinción con las relaciones en contextos diversos. La unidad ofrece también la posibilidad de retomar tópicos relativos a proporcionalidad directa e inversa, pero con mayor énfasis en el concepto de variación proporcional y tratado desde el punto de vista algebraico (MINEDUC, 2009).

Las gráficas cartesianas asociadas a las funciones, vienen a formar parte de los contenidos curriculares, en la educación media. En el escenario educativo actual en Chile, resulta de interés abordar la producción en el trabajo matemático, con el uso de las gráficas y su desarrollo en la enseñanza secundaria como una práctica institucional que aporte a la comprensión y funcionalidad de la matemática. En particular, como objeto matemático la gráfica cartesiana escolar es la principal herramienta matemática para la figuración del cambio. Sin embargo el marco de referencia que el sistema escolar ha privilegiado para las gráficas en general, no permite que estas puedan ser consideradas como un medio de argumentación en sí mismas y solo son la representación de la función; las tareas que los estudiantes hacen, se restringen a hallar la función sin desarrollar un lenguaje gráfico.

Uno de los focos de estudio de la educación matemática en los últimos años ha sido el pensamiento variacional. Es posible encontrar un gran número de publicaciones en el área que pretenden aportar a la enseñanza de los tópicos de la matemática del cambio, caracterizando el pensamiento variacional, promoviendo situaciones de enseñanza, entregando orientaciones para la mejora en las prácticas docentes. En particular, en Latinoamérica surge el programa de investigación de *Pensamiento y Lenguaje*

*Variacional*, entendido “como una línea de investigación que, ubicada en el seno del acercamiento socioepistemológico, permite tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos” (Cantoral & Farfán, 1998a).

En el marco del *Pensamiento y Lenguaje Variacional* cobra especial importancia, en relación a aquellas matemáticas elaboradas para manipular con el cambio, incorporar a los y las estudiantes a espacios de experimentación que favorezcan la construcción de unas “matemáticas vivas” y, al mismo tiempo, que tengan una experiencia de primera mano sobre la complejidad puesta en juego en su actividad, en situación escolar, a fin de reconocer y valorar el uso de herramientas matemáticas que traen a escena en sus elaboraciones personales y a la vez en aquellas del trabajo colectivo, enfrentados a comunicar sus hallazgos en ambientes interactivos de aula (L. Díaz, 2005).


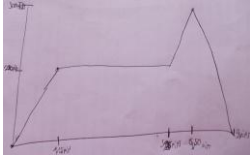
Un rol importante en este tipo de actividad, lo tiene la figuración del cambio, entendida como la construcción de una figura de la variación de variables visualizadas en un fenómeno. En particular, la gráfica cartesiana escolar es la principal herramienta matemática para la figuración del cambio. Sin embargo el sistema escolar no logra que los estudiantes constituyan a la gráfica cartesiana en una herramienta para su actividad.

En particular, la articulación de una gráfica cartesiana escolar con el fenómeno de variación que representan, centrándose la actividad matemática escolar en la articulación de la gráfica con la expresión algebraica de una función o las tabulaciones de cada variable.

Carrasco y Díaz (2009), evidencian que, tanto estudiantes como profesores recurren a diversos tipos de dibujos, en particular a cómics antes que a las gráficas cartesianas para representar lo que varía en un fenómeno evocado. Los cómics son figuras altamente icónicas, como si fueran fotografías que van mostrando un espacio y cambios en el tiempo de aquello que interesa mostrar (ver imagen 1a), a diferencia de una gráfica cartesiana que ha dejado oculto, en su alto simbolismo, el movimiento y el espacio al

representar el fenómeno a través de puntos/pares ordenados (ver imagen 1b) sin incorporar la experiencia de movimiento de una manera directa.

**Figura 1-** Dibujos previo a gráfica cartesiana y gráfica cartesiana

	
<p>Fuente: Desarrollada por autor</p>	<p>Fuente: Desarrollada por autor</p>

A la luz de ello se aborda una investigación que pretende avanzar en situaciones de enseñanza que permitan constituir a la gráfica cartesiana escolar en una herramienta para la actividad matemática en la modelación de fenómenos de variación. Herramienta que fortalezca procesos de visualización variacional. Investigación que enmarcada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional, reconoce la importancia de un enseñanza que construya eslabones entre la matemática que se enseña y aquellas formas de conocer y herramientas que los estudiantes han construido en su biografía, tanto escolar, como cotidiana. Aproximación que se articula desde la noción de prácticas socioescolares de figuración, entendidas como modos de operar compartidos por los actores escolares, para la construcción y la interpretación de figuraciones de entidades asociadas a un fenómeno (Carrasco & Diaz, 2012).

En el Capítulo 1 se presentan los antecedentes principales que dan pie a esta investigación, presentando lo gráfico y lo visual como oportunidades no explotadas en el sistema escolar y de cómo estas representan un potencial que debe ser estudiado.

En el capítulo 2 se establece la problemática en base a los antecedentes expuestos, manifestando la necesidad de establecer cuál es el rol y el funcionamiento que las figuraciones previas a la gráfica cartesiana tienen en la construcción de los modelos gráficos ante fenómenos de variación.

En el capítulo 3, que se presenta como marco teórico, se aborda la mirada de la socioepistemología en la matemática educativa, abarcando temas como la resolución de problemas, el pensamiento variacional, la modelación, la gráfica y visualización, La dualidad Local-Global y el funcionamiento y forma.

En el capítulo 4 se presenta la metodología de trabajo, caracterizada en base a un estudio cualitativo desde las posibilidades que presenta un estudio de casos, se define la muestra y se presentan los instrumentos que se utilizarán; una secuencia didáctica, entrevista y observación.

En el capítulo 5 se presentan los resultados en base a la secuencia didáctica utilizada, se expone el trabajo estudiantil y se caracterizan de forma directa los procesos vividos por los estudiantes en el proceso de modelación.

En el capítulo 6 se analizan los resultados desde dos niveles de análisis, estableciendo el funcionamiento y forma de las figuraciones previas a la gráfica cartesiana como medio de construcción de modelos gráficos en situaciones de movimiento.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones que buscan establecer las prácticas de figuraciones previas a la gráfica cartesiana como elementos que dan significado al fenómeno y permiten establecer las características de este que necesitan los estudiantes para la construcción del modelo gráfico, identificando una necesidad particular de cada individuo bajo una institucionalidad escolar.

## **CAPITULO 1. ANTECEDENTES**

En la educación formal e informal se han desarrollado e integrado los elementos visuales como parte esencial de la comunicación. Gráficas, signos y objetos pictóricos, imágenes impresas o computarizadas están presentes en todas las áreas de la sociedad actual y los receptores modernos han desarrollado estructuras mentales que les permiten traducir y decodificar los mensajes. En el medio educativo los estudiantes y profesores promueven este tipo de convenio mediatizado para enriquecer la aprehensión de los conocimientos a través de la relación visual. En el caso de la enseñanza de las matemáticas lo visual juega un papel importante. Son diversas las áreas que precisan de representaciones visuales, tanto para representar algún concepto, como de instrumentos útiles para el análisis. (Planchart, 2002)

La importancia de la visualización matemática, entendida como la imagen mental que nos formamos sobre ideas matemáticas y que involucra iconos, dibujos, gráficas, entre otros, se ha constituido en una herramienta de construcción de ideas matemáticas, pero no como una herramienta de la matemática formal. A partir de Euclides, se impulsó el deber de la matemática de ser deductiva, de ir desde una verdad a otra, y en ese fluir de verdad desde las premisas básicas (axiomas, postulados) las imágenes, diagramas y dibujos han sido desestimados como herramientas principalmente por la desconfianza que se le atribuye a los sentidos como medios para observar la realidad. (Carrasco, 2006)

Castro y Castro (1997) sostienen que: Kaput, Goldin, Duval, Glaeserfeld, Vergnaud, han dedicado trabajo y tiempo a precisar el concepto de representación y a estudiar el papel que juegan las representaciones gráficas en el aprendizaje de los estudiantes. (p.102). Afirman, también, que: el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos. (p.99). (Planchart, 2002)

Roth y McGinn (1997) por su parte asumen que las gráficas no son solo una representación mental sino una forma humana de vida, plantean que para desarrollar habilidades para su lectura e interpretación es necesario involucrar a los estudiantes en la realización de prácticas sociales asociadas más que en la posesión a priori de habilidades cognoscitivas. En el marco de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional desarrollada por varios investigadores como Cantoral y Farfán (2003), Dolores (), se ha asumido la hipótesis que plantea que un universo amplio y significativo de gráficas puede contribuir al desarrollo de esta forma de pensamiento matemático. De hecho, este estudio está inscrito al seno de esta línea de investigación. (C. D. Flores, Chablé, Pech, Interián, Solache, 2009)

Reconocer el comportamiento de una gráfica o función requiere una visión dual local-global, cuyo uso significativo y articulado a lo largo de un sistema didáctico involucra reconocer el comportamiento inicial de la gráfica (conocer un todo en un cierto margen), complementando con una visualización global de la información geométrica (G. Buendía, 2004).

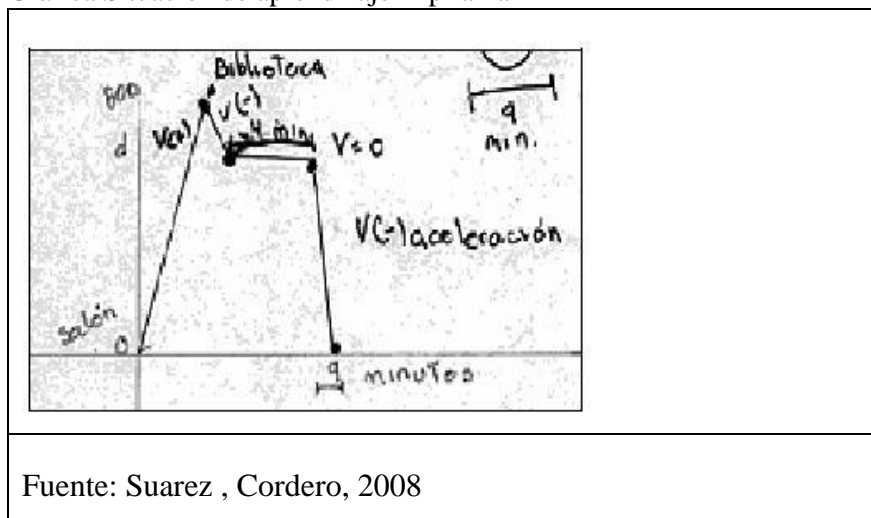
Por su parte Cen (2006) señala que la construcción de gráficas permite al estudiante actitudes de argumentación, es decir, se puede construir y explicar una idea matemática mediante la graficación.

Torres (2004) señala que los significados y sistemas simbólicos se encuentran directamente en las gráficas, estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo y cuantitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad. Los significados se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar intervalos que indiquen cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, cuándo la velocidad es positiva o negativa.



Suarez y Cordero (2008) señalan que en diversos trabajos de investigación relacionados con el Cálculo y el Análisis se ha identificado a la graficación como una categoría que construye el Cálculo, argumentos al hacer transformaciones de funciones para identificar comportamientos tendenciales en sus gráficas. Dicha categoría ha alcanzado un estatus similar a la analiticidad de las funciones y de la predicción (Cordero, 2001). Así, la graficación se estudiará como categoría que sirva de vehículo para implementar el binomio modelación-graficación en la construcción de conocimiento matemático en el salón de clases con un ambiente tecnológico, principalmente con el uso de sensores y calculadoras graficadoras.


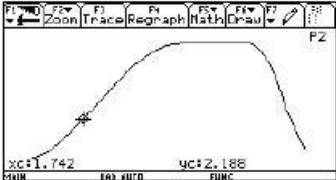
**Figura 2** - Gráfica Situación de aprendizaje "Epifanía"



Sin embargo, en las producciones estudiantiles presentadas en su artículo “Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico” (Suarez, Cordero, 2008) es posible observar la utilización de figuraciones previas a la realización de la gráfica, de las que no se presenta análisis alguno, incluyendo en sus bases teóricas para el análisis de las gráficas el análisis Local y Global.

En Torres (2004) se realiza una caracterización del aprendizaje que logran cuando se incorporan dispositivos de transducción y calculadoras con poder de traficación, para el registro, el análisis y la interpretación de datos diversos en el salón de clases, en las experiencias de aprendizaje con alumnos del NMS-IPN. En una de las etapas de la experiencia de aprendizaje se les pide a los estudiantes la realización de la gráfica cartesiana de una situación de variación tiempo/distancia, actividad en la cual muchos estudiantes realizan figuraciones previas antes de la construcción cartesiana. Si bien se reportan estas figuraciones, el análisis es realizado en profundidad sobre la gráfica cartesiana, sin detenerse en estas figuraciones y lo que han de comunicar los estudiantes en su realización.

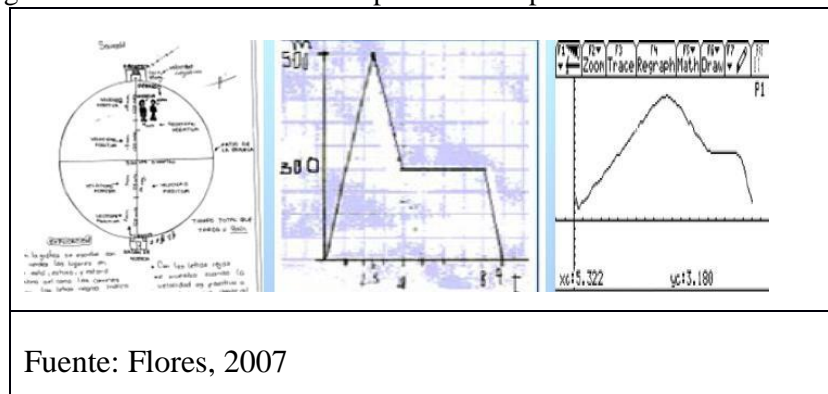
**Figura 3-** Reporte de figuración y Gráfica obtenida con sensor

Secuencia I y discusión	Secuencia II y discusión
<p>Monitor: "Primero empezaron a dibujar un círculo, pero después entendieron que se tenía que hacer una gráfica de distancia contra tiempo". [Ver Gráfica IV.1.1]</p> <p>Monitor: "Al principio tuvieron algunos problemas para identificar la posición".</p>  <p style="text-align: center;"><i>Gráfica IV.1.1</i></p>	<p>La gráfica que obtuvieron con el sensor no corresponde a la gráfica que ellos propusieron.</p>  <p style="text-align: center;"><i>Gráfica IV.1.2</i></p> <p>Como podemos observar en la gráfica, que resultó de su experimento nos indica que los cuatro minutos que pierde Valentina son en la biblioteca. [Ver Gráfica IV.1.2]</p>
<p>Fuente: Torres, 2004</p>	

El análisis realizado por Torres (2004) basa su análisis en el propuesto por (G. Buendía, 2004), el cual se centra en las características globales y locales de la gráfica, sin considerar otro tipo de figuración previa en su construcción.

En Flores (2007) sucede una situación similar a la anterior, se evidencia la realización de figuraciones previas a la realización de la gráfica cartesiana, pero la propuesta de análisis se centra solo en esta última, sin considerar el análisis de las figuraciones no cartesianas previas a la construcción de la gráfica.

**Figura 4-** Figuración Previa - Gráfica en Papel - Gráfica por sensor



Sin embargo, en las producciones estudiantiles presentadas en su artículo es posible observar la utilización de figuraciones previas a la realización de la gráfica, de las que no se presenta análisis alguno, incluyendo en sus bases teóricas para el análisis de las gráficas el análisis Local y Global, el mismo utilizado por Torres (2004) y Flores (2007).

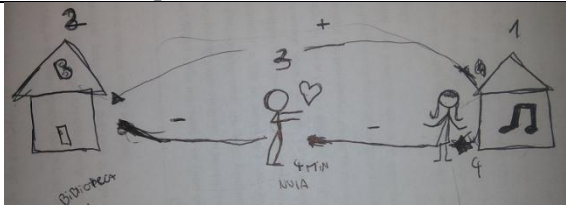
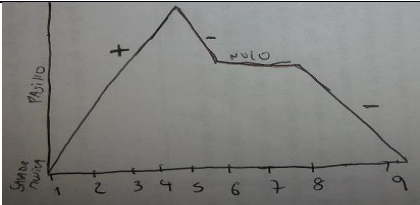
El trabajo de modelación, entendido en esta investigación como una construcción teórica que un individuo realiza al enfrentar una tarea matemática en la que pone en juego sus conocimientos, es considerada en la escuela como una actividad privilegiada para la aplicación de los conocimientos aprendidos a lo largo del proceso escolar. En

relación a los fenómenos que se desea modelar, el uso de figuras permite visualizar aspectos ostensibles y no ostensibles presentes en el fenómeno, estableciendo a la gráfica cartesiana como una representación de una expresión analítica.

Un rol importante en este tipo de actividad, lo tiene la figuración del cambio, entendida como la construcción de una figura de la variación de variables visualizadas en un fenómeno. En particular, la gráfica cartesiana escolar es la principal herramienta matemática para la figuración del cambio. Sin embargo el sistema escolar no logra que los estudiantes constituyan a la gráfica cartesiana en una herramienta para su actividad.

Carrasco y Díaz (2012), evidencian que, tanto estudiantes como profesores recurren a diversos tipos de dibujos, en particular a cómics antes que a las gráficas cartesianas para representar lo que varía en un fenómeno evocado. Los cómics son figuras altamente icónicas, como si fueran fotografías que van mostrando un espacio y cambios en el tiempo de aquello que interesa mostrar (ver imagen 1a), a diferencia de una gráfica cartesiana que ha dejado oculto, en su alto simbolismo, el movimiento y el espacio al representar el fenómeno a través de puntos/pares ordenados (ver imagen 1b) sin incorporar la experiencia de movimiento de una manera directa.

**Figura 5- Representación Icónica (comics) - Gráfica Cartesiana**

	
<p>Fuente: Desarrollada por autor</p>	<p>Fuente: Desarrollada por autor</p>

Pérez y Carrasco (2012) en su reporte buscan caracterizar las practicas estudiantiles de figuración ante un fenómeno de variación, entendiendo a la figura como proponen Carrasco y Díaz (2012) como las disposiciones y formaciones de líneas que representan –en dos dimensiones- entidades ostensibles y no ostensibles, que se constituye en la actividad matemática como un modelo del fenómeno que figura, modelo compuesto por símbolos, que se materializan en aquellas partes de la figura que devienen en signos, los cuales van configurando una narración del fenómeno, que describe la covariación de las entidades que interesan.

El análisis realizado en este artículo se basa en tres aristas, en la primera analizan la gráfica cartesiana resultante de las actividades de los estudiantes bajo la mirada Global-Local propuesta por Buendía (2006). La segunda arista analizan las figuraciones previas a la gráfica cartesiana describiendo las características de estas e identificando lo que buscan comunicar los estudiantes. La tercera mirada utilizada, bajo la Teoría de la Imagen de Kandisky (1993) busca identificar características propias del dibujo. Finalmente el análisis realizado no articula la figuración como parte de un proceso completo que finaliza con la gráfica cartesiana, por lo que no identifican el funcionamiento que estas han de tener en el proceso de construcción.

Se hace evidente, y motiva esta investigación, que como consecuencia de construir una gráfica cartesiana para un determinado fenómeno se utilicen de forma previa dibujos, cómics u otro tipo de figuración, dejando este recurso sin estudiar, generando un salto de forma automática en la relación fenómeno-Gráfica, sin establecer o identificar el rol de todas las figuraciones que son utilizadas previas a la gráfica cartesiana.

## **CAPITULO 2. PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS**

En este marco, el objetivo de la investigación es caracterizar los usos estudiantiles de figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia, y la pregunta que guía el estudio es la siguiente: ¿cuál es el rol que cumplen las figuraciones realizadas por estudiantes, previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia?

De los antecedentes expuestos se manifiesta la necesidad de establecer cuál es el rol y el funcionamiento que las figuraciones previas a la gráfica cartesiana tienen en la construcción de los modelos gráficos ante fenómenos de variación, ya que se evidencia su uso en diferentes investigaciones sin hacer un análisis articulador de estos en todo el proceso.

Responder esta interrogante permitió manejar nociones teóricas provenientes de la teoría de la imagen y de los análisis semánticos e ilustrar la incorporación de una práctica matemática donde la herramienta principal es el uso de la gráfica.

### **2.1 Hipótesis de trabajo**

- Los estudiantes realizan figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia con el fin de representar y comprender como se realiza el movimiento.
- Los estudiantes realizan figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia para representar el contexto en el que se desarrolla la situación.

## **2.2 Pregunta orientadora**

- ¿Cuál es el rol que cumplen las figuraciones realizadas por estudiantes previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia?

## **2.3 Objetivo general.**

- Caracterizar los usos estudiantiles de figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia como medio de construcción de un modelo gráfico.

## **2.4 Objetivos específicos**

- Evidenciar el uso de figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia como medio de construcción de un modelo gráfico por parte de los estudiantes.
- Identificar distintas figuraciones utilizadas por los estudiantes previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia como medio de construcción de un modelo gráfico.
- Análisis de las figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia como medio de construcción de un modelo gráfico.
- Caracterizar los usos estudiantiles de figuraciones previas a la gráfica cartesiana ante un fenómeno de variación de tiempo y distancia como medio de construcción de un modelo gráfico.

## **CAPITULO 3. ANTECEDENTES TEORICOS**

### **3.1 La mirada de la Socioepistemología en la Matemática Educativa**

Diversos investigadores inmersos en la educación matemática referenciados en este trabajo enfocan su investigación desde la aproximación que ofrece la Socioepistemología (Cantoral y Farfán, 1998, Suarez y Cordero, 2005, Marquina, 2012, Torres, 2004, Cen, 2006, Flores, 2007, Díaz y Carrasco, 2009, entre otros), generando la necesidad de introducir los aspectos generales que ofrece la mirada de esta línea de investigación en educación matemática.

Jose López ( 2006) señala que la Socioepistemología se localiza al seno de la disciplina denominada Matemática Educativa, donde coexiste con otras aproximaciones, teniendo como punto de partida esquemas que explicaban de alguna manera la construcción de conocimiento matemático, produciendo explicaciones o bien parciales, incompletas o que consideraba que iban en contra de cierta evidencia empírica.

*“La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa busca construir una explicación sistémica a los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas, no solo discute el asunto de la semiosis o el de la cognición de manera aislada, sino que busca intervenir en el sistema didáctico en sentido amplio, al tratar a los fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, que incorpore al estudio de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados a los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza”* (Cantoral , Farfán, 2003).



Cantoral y Farfán (1998) señalan que en este enfoque se enfatiza el hecho de que las aproximaciones epistemológicas tradicionales, han asumido que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, en algún sentido, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La Socioepistemología por su parte, se plantea el examen del conocimiento matemático, social, histórico y culturalmente situado, problematizado a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión.

### **3.2 Dualidad Local-Global**

Cen (2006) en el marco de estudio socioepistemológico, señala que la construcción de gráficas permite al estudiante actitudes de argumentación, es decir, se puede construir y explicar un conocimiento matemático mediante la graficación.

Por su parte Torres (2004) señala que los significados y sistemas simbólicos se encuentran directamente en las gráficas, estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo y cuantitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad. Los significados se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar intervalos que indiquen cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, cuándo la velocidad es positiva o negativa.

Buendía (2004) reconoce que el comportamiento de una gráfica o función requiere una visión dual local-global, cuyo uso significativo y articulado a lo largo de un sistema didáctico involucra reconocer el comportamiento inicial de la gráfica (conocer un todo en un cierto margen), complementando con una visualización global de la información geométrica.

### **3.3 Funcionamiento y forma**

La relación funcionamiento y forma es dialéctica, ya que ambos elementos dan origen a un *uso de gráfica*. Es decir, los funcionamientos y formas de las gráficas debaten entre sí y se van reorganizando para dar lugar a otros funcionamientos y formas gráficas, lo cual significa que la gráfica se resignifica.

La resignificación es interpretada como la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional, que se manifiesta en el uso del conocimiento dentro de una situación específica (Cordero Osorio, Cen Che, & Suárez Téllez, 2010)

El uso de la gráfica lo ubicamos como el papel que desempeña en la situación y se manifiesta por sus funcionamientos y formas. Así, el funcionamiento son las ejecuciones, acciones u operaciones que desempeña la gráfica en la situación, mientras que la forma son las clases de esas ejecuciones, acciones u operaciones (Cordero & Flores, 2007).

### **3.4 Resolución de problemas**

Schoenfeld (en Barrantes, 2006) señala que el término resolución de problemas ha servido como un paraguas bajo el cual se realizan radicalmente diferentes tipos de investigación, por lo que un requerimiento de cada estudio o discusión de la resolución de problemas se acompañe de una definición operacional del término, ya que gran confusión emerge cuando el mismo término se refiere a una multitud de algunas veces contradictorios de comportamientos típicamente no especificados.

“La importancia de la resolución de problemas es reconocida internacionalmente como un aspecto central del proceso de aprendizaje en matemáticas y sigue siendo la principal preocupación de educadores e investigadores en educación matemática” (Díaz, Poblete, 2001)

¿Qué entiende por resolución de problemas el MINEDUC?, ¿Qué entiende por resolución de problemas PISA?, ¿Qué otros entendimientos existen sobre lo que es resolución de problemas? ¿Son estas miradas de la resolución de problemas las que más se acercan al ideal para potenciar el desarrollo de competencias matemáticas?, estas son algunas interrogantes que surgen motivadas por las inquietudes planteadas por Schoenfeld.

Para el MINEDUC la Resolución de Problemas se entiende a partir de un saber y un saber hacer, propio del conocimiento disciplinario, necesario para la comprensión de la realidad y, fundamentalmente, para enfrentar y resolver variadas situaciones en diversos contextos. Es así como la Resolución de Problemas puede ir desde el enfrentar y resolver problemas muy explícitos y directos, hasta comparar y evaluar diferentes estrategias de resolución.

En PISA (Carabaña, 2008) se define la resolución de problemas como la capacidad individual que utiliza los procesos cognitivos para confrontar y resolver situaciones multidisciplinares donde el camino hacia su resolución, además de no ser obvio, necesita de conocimientos aplicables desde diferentes áreas, no exclusivamente desde matemáticas, ciencias o lectura.

Santos (2008) identifica a la resolución de problemas como una forma de pensar donde una comunidad de aprendizaje (los estudiantes y el profesor) buscan diversas maneras de resolver la situación y reconocen la relevancia de justificar sus respuestas con distintos tipos de argumentos. Es decir, la meta no es solamente reportar una respuesta sino identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema. También contempla actividades que permitan extender el problema inicial y formular

conjeturas y otros problemas.

Para Díaz y Poblete (2001) una de las definiciones más comúnmente usadas de la resolución de problemas, estipula que la tarea debe ser compleja si se va a referir a ella como un problema. Según esta definición, una tarea es un problema para un alumno si ella requiere de una solución bajo ciertas condiciones específicas, si este comprende la tarea, pero no encuentra una estrategia inmediata para su solución, y, finalmente, si es motivado para buscar la solución.

Estas miradas sobre lo que es resolución de problemas nos dan algunas directrices sobre las cuales tenemos que decidir en post del desarrollo de los estudiantes competentes en matemática, ¿Individuo o comunidad?, ¿Centrado en el entorno o en el objeto matemático?, ¿Solución matemática o respuesta a una problemática real?, ¿Respuesta mecánica o análisis de estrategias?

Las interrogantes anteriores nos hacen destacar que toda herramienta matemática ha nacido como respuesta a una situación o fenómeno, en tiempo determinado y bajo un contexto cultural específico. Históricamente la matemática ha sido utilizada para resolver los problemas del hombre como individuo que se desarrolla en una comunidad y como ciencia ha de involucrarse en el estudio del mundo físico (salvo las matemáticas puras), por lo que no puede desligarse de las necesidades de la sociedad y del beneficio de la misma.

Creemos que resolver problemas no debe entenderse como la identificación de un objeto matemático en una situación determinada, por ello entendemos como resolución de problemas cuando una comunidad se enfrenta a un fenómeno determinado del ambiente o entorno, en un contexto y tiempo específico, logrando por medio de la utilización de diversas herramientas establecer patrones, realizar conjeturas, generalizar la situación, proponiendo una respuesta que permita su aplicación en situaciones de similares características.

Desde su visión de la resolución de problemas Schoenfeld (1992, en Barrantes 2006) plantea el concepto de “Control” que se refiere a cómo un estudiante controla su trabajo y si ante un determinado problema puede ver una serie de caminos posibles para su solución, el estudiante tiene que ser capaz de darse cuenta si el que seleccionó en determinado momento está funcionando o si va hacia un callejón sin salida; es decir, tiene que darse cuenta a tiempo, retroceder e intentar de nuevo por otra vía.

Este proceso de Control creemos que es posible articularlo en relación a las cinco dimensiones que proponen para la configuración de estudiantes competentes Díaz, Quintanilla y Labarrere (2012.) Algunas acciones que involucran el control y su articulación con las dimensiones son las que se presentan a continuación:

- Entendimiento: tener claridad acerca de lo que trata un problema antes de empezar a resolverlo. Relacionamos esta acción con la dimensión que desarrolla maneras de pensar y puntos de vista sobre la acción y el actuar matemático competente.
- Consideración de varias formas posibles de solución y seleccionar una específica, o sea: hacer un diseño. Relacionada con la dimensión que aborda tareas y problemas, en la actividad matemática escolar, que favorecen la creación, la comunicación y la gestión. Desarrolla actividad matemática estudiantil con modelos y situaciones.
- Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar un camino no exitoso y tomar uno nuevo. Relación con dimensión que despliega competencias de autorreferencia y autorregulación de su desempeño en la actividad matemática.
- Llevar a cabo ese diseño que hizo, estar dispuesto a cambiarlo en un momento oportuno. Relación con dimensión que ostenta actividad matemática escolar en ambientes de desarrollo intencional.

- Revisar el proceso de resolución. Es posible relacionar esta acción de control con todas las dimensiones planteadas.

Se hace evidente el potencial de la resolución de problemas como herramientas para el desarrollo de estudiantes competentes en matemática, siempre que este proceso se realice de forma consciente y sea posible realizar seguimiento a los procesos de cada estudiante.

George Polya (1981) estableció cuatro etapas que después sirvieron de referencia para muchos planteamientos y modelos posteriores, en los que se fueron añadiendo nuevos matices, si bien el esquema básico de todos ellos se mantiene. Las etapas del proceso de resolución que determina Polya son las siguientes:

- Comprensión del problema.
- Concepción de un plan.
- Ejecución del plan.
- Visión retrospectiva.

### **3.5 Pensamiento Variacional**

Vasco (2003) señala que el principal propósito del pensamiento Variacional es la modelación matemática. Señala además que no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios; al contrario, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Señala Vasco que para resolver un problema interesante se debe armar primero un modelo de la situación, en donde las variables covaríen en forma semejante a la de la situación problemática, y no es posible realizarlo sin activar el pensamiento Variacional.

Por su parte Díaz (2009) señala que el pensamiento variacional se refiere a los procesos cognitivos que permiten analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de la actividad de la ciencia ciencias y la propiamente matemática donde la variación se encuentre como sustrato de ellas, situación que implica un alto grado de acción por parte del estudiante, ya que él es quien debe actuar para que tales procesos cognitivos interactúen con la diversidad de situaciones y problemas a los que puede verse enfrentado.

Con el fin de identificar los elementos que favorecen los procesos de variación y modelación en un aula bajo una bajo un modelo educativo Montessori se hace necesario caracterizar como el contexto y las prácticas que han de envolver los procesos de construcción del conocimiento.

Marquina (2012) señala que en las últimas décadas se han desarrollado teorías o acercamientos en los cuales se destaca la importancia de aspectos sociales y culturales sobre el individuo mismo, así como en los procesos de aprendizaje o la cognición misma. Ejemplo de ello son: la Socioepistemología, la Etnomatemáticas, la Semiótica Cultural, entre otros.

En particular, la Socioepistemología, asume como tesis que la construcción social del conocimiento está dado de manera sistémica bajo cuatro componentes fundamentales “su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza” (Cantoral y Farfán, 2003, citado en Marquina 2012).

Así mismo la Socioepistemología centra su atención en el papel de las Prácticas Sociales, entendidas como entornos para construir conocimiento matemático y además las reconoce como normativas de la actividad humana (Covian 2005, citado en Marquina 2012).

“Bajo este enfoque teórico (La Socioepistemología), el pensamiento y el lenguaje Variacional será entendido como una línea de investigación que, ubicada al seno del acercamiento socioepistemológico, permita tratar la articulación entre la investigación y las prácticas sociales asociadas a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos” (Cantoral & Farfán, 2003a).

### **3.6 Modelación**

Arrieta (2003), en el marco de la Socioepistemología, establece a la modelación como una social base en el diseño de secuencias de aprendizaje. Diseños que no se centran en los contenidos matemáticos o en las producciones de los estudiantes, sino en las prácticas sociales, que están a la base de la construcción de conocimiento y que ejercidas por los participantes utilizando herramientas y situadas en un contexto social, en este caso, en las prácticas sociales de modelación.

Marquina (2012) señala sobre Algunas investigaciones que han encontrado que una práctica recurrente en diversas comunidades, es la Modelación. Ello concurre con la recomendación que se hace en los currículum escolares de privilegiar como uno de cuatro procesos de enseñanza de las matemáticas, a la modelación (Villa, 2007, citado en Marquina 2012).

“La construcción de modelos matemáticos es una de las herramientas utilizadas hoy en día para el estudio de problemas en medicina, biología, fisiología, bioquímica, epidemiología, farmacocinética, entre otras áreas del conocimiento; sus objetivos primordiales son describir, explicar y predecir fenómenos y procesos en dichas áreas “. (Montesinos y Hernández, 2007, citado en Marquina 2012).

Bajo la mirada anterior, si se busca, estimular y potenciar el pensamiento variacional utilizando la modelación como herramienta o camino, es necesario identificar las



características del contexto en el que se han de desarrollar los estudiantes y de igual forma las prácticas sociales que han de envolver el proceso epistemológico.

Transferibles estos contextos deben ser cercanos a aquellos en los cuales los estudiantes vivirán y trabajarán en su vida de adulto.

“Podemos decir entonces que en algunas comunidades, las prácticas del uso de las matemáticas no siempre son reconocidas por sus miembros y en algunas ocasiones incluso, las prácticas son distintas a aquellas que se aprenden escolarmente. Es así que consideramos, existe una tensión entre las prácticas escolares y las prácticas del uso de las matemáticas. La problemática general que atiende nuestra investigación es la que deriva de la separación de la escuela y su entorno” (Marquina, 2012).

Castro y Castro (1997) sostienen que: Kaput, Goldin, Duval, Glaeserfeld, Vergnaud, han dedicado trabajo y tiempo a precisar el concepto de representación y a estudiar el papel que juegan las representaciones gráficas en el aprendizaje de los estudiantes. (p.102). Afirman, también, que: el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos. (p.99). (Planchart, 2002)

### **3.7 Visualización**

Visualización Matemática Trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver un problema. Con las relaciones abstractas que formulamos entre las diferentes presentaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado. Con la participación de una cultura aportando significados y significantes a los elementos involucrados en la visualización. (E. Carrasco, 2006)

Hitt (1998) señaló que desde 1985, aproximadamente, se le ha dado mayor importancia al proceso de generación de imágenes mentales adecuadas para el desarrollo de las habilidades como la visualización matemática, en la resolución de problemas y para el

aprendizaje de la matemática, en general. Esto ha impulsado, por un lado, el estudio del papel de las representaciones de los objetos matemáticos y, por el otro, el desarrollo de una matemática en contexto. (Planchart, 2002)

¿Cómo ha estado incorporada en la educación? En la educación formal e informal se han desarrollado e integrado los elementos visuales como parte esencial de la comunicación. Gráficas, signos y objetos pictóricos, imágenes impresas o computadorizadas están presentes en todas las áreas de la sociedad actual y los receptores modernos han desarrollado estructuras mentales que les permiten traducir y decodificar los mensajes. En el medio educativo los estudiantes y profesores promueven este tipo de convenio mediatizado para enriquecer la aprehensión de los conocimientos a través de la relación visual. En el caso de la enseñanza de las matemáticas lo visual juega un papel importante. Son diversas las áreas que precisan de representaciones visuales, tanto para representar algún concepto, como de instrumentos útiles para el análisis. A pesar de este desarrollo, el uso de la visualización en las clases de matemáticas no ha sido incorporado de manera sistemática ni generalizada; tampoco es constante la evaluación de sus ventajas y desventajas. (Planchart, 2002)

La importancia de la visualización matemática, entendida como la imagen mental que nos formamos sobre ideas matemáticas y que involucra iconos, dibujos, gráficas entre otros, se ha constituido en una herramienta de construcción de ideas matemáticas, pero no como una herramienta de la matemática formal. A partir de Euclides, se impulsó el deber de la matemática de ser deductiva, de ir desde una verdad a otra, y en ese fluir de verdad desde las premisas básicas (axiomas, postulados) las imágenes, diagramas y dibujos han sido desestimados como herramientas principalmente por la desconfianza que se la atribuye a los sentidos como medios para observar la realidad.(E. Carrasco, 2006).

Demostraciones visuales: Se entienden como aquellas demostraciones que se sustentan principalmente en argumentos propios a registros icónicos y/o gráficos y por tanto no responde a un solo registro algebraico. (E. Carrasco, 2006).

Castro y Castro (1997) sostienen que: Kaput, Goldin, Duval, Glaeserfeld, Vergnaud, han dedicado trabajo y tiempo a precisar el concepto de representación y a estudiar el papel que juegan las representaciones gráficas en el aprendizaje de los estudiantes. (p.102). Afirman, también, que: el incremento en la capacidad de visualización que se produce en el trabajo con representaciones gráficas ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos. (p.99). (Planchart, 2002)

Los alcances cognitivos que tiene la visualización matemática se pueden determinar si se describen y definen diversos aspectos y elementos que confluyen en el campo de la visualización. A continuación, se analizan: la tendencia anti-ilustrativa en la matemática, la visualización y otros términos afines, las funciones cognitivas de la visualización, el pensamiento visual o pensamiento simbólico y las dificultades que se presentan con la visualización. (Planchart, 2002)

Por otro lado, la graficación es considerada en la escuela como una habilidad que le permite al estudiante visualizar algunos de los aspectos que se presentan de cierto contenido matemático, siguiendo el ejemplo de la función cuadrática, la curva llamada parábola proporciona una forma visual de representar los puntos que satisfacen la expresión analítica de una ecuación cuadrática, o comprobar que la parábola definida como un lugar geométrico coincide con la curva que representan los puntos de la expresión analítica de una cierta función cuadrática.(Suárez & Cordero, 2010)

Se trata de la obra *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Oresme, 1340). La idea central de esta obra es que las figuras geométricas y el conocimiento sobre las proporciones matemáticas ayudan a ‘comprender fenómenos’ donde intervienen cualidades que pueden adquirir sucesivamente diferentes intensidades. Identificamos en este Tratado una intención de transformar el funcionamiento y la forma del

conocimiento matemático de la época, la geometría y las proporciones, estableciendo una nueva naturaleza epistemológica determinada por su uso para modelar, en el sentido mencionado, situaciones de variación. La transformación mencionada es interpretada como una evidencia de resignificación y arroja elementos para la conformación de nuestro marco de referencia. Con esta concepción se establece una relación entre la intención de ‘comprender, estudiar y controlar’ fenómenos con una práctica de modelación. (Suárez & Cordero, 2010)

La articulación de estos resultados conforma una epistemología para la modelación escolar que está anclada en las gráficas, que se llamará una Socioepistemología de la modelación-graficación, y que proporciona un marco de referencia para que los estudiantes resignifiquen sus conocimientos matemáticos. Para este estudio, nos centraremos en aquel conocimiento que se encuentra alrededor de la modelación gráfica del cambio y de la variación, como un caso especial se tomará la modelación del movimiento. (Suárez & Cordero, 2010)

Nicolás de Oresme, filósofo situado en el siglo catorce, ha sido estudiado como un matemático importante en la Edad Media. Algunos historiadores han destacado su trabajo en relación con su importancia como precursor de la geometría analítica (González-Urbaneja, 1992, p. 45), sin embargo éste no es el énfasis en el análisis que brindamos. Nosotros analizamos la obra de Oresme en cuanto a la aportación que hizo al generar una forma de representar aquellas características de las ‘cosas’ que cambian y que se nombran como “cualidades”. La palabra misma “cualidad” tiene, para Oresme, incorporada la noción de variación. Esto lo podemos advertir en el extracto siguiente, en el que al hablar “Sobre la continuidad de las intensidades”, al final del párrafo, menciona a la cosa “intensible”, que cambia de intensidad, y la llama “cualidad”. Es importante destacar que en la definición contenida en el párrafo analizado se introduce la continuidad como una característica inherente a las cualidades.(Suárez & Cordero, 2010).

“Toda cosa medible excepto los números se concibe como una cantidad continua, por lo tanto, para la medición de una cosa así es necesario que se puedan imaginar esos puntos, líneas y superficies o sus propiedades. [...] Por tanto, cada intensidad que se puede adquirir sucesivamente se debe imaginar como una recta perpendicular levantada en algún punto del espacio o sujeto de la cosa "intensible", una cualidad”. Oresme I.i, traducido a partir de Clagett 1968, 165 y 167. (Suárez & Cordero, 2010)

El propósito de la obra citada de Oresme es representar a través de figuras geométricas (rectángulos, trapecios, triángulos, semicircunferencias) el modo en que las cualidades varían. La forma y el funcionamiento de las figuras geométricas no consisten en describir la posición de los puntos respecto de coordenadas rectilíneas, sino que las figuras mismas capturan la esencia de la cualidad de cantidad continua. En ese sentido las figuras geométricas adquieren un significado global. Las propiedades de la figura representan propiedades intrínsecas a la cualidad misma. Es plausible interpretar que Oresme resignifica las figuras geométricas para establecer un nuevo funcionamiento de ellas y que permite modelar situaciones de variación. Es decir, se atribuye una nueva naturaleza a las figuras de la geometría para tener una nueva funcionalidad al identificar, describir y controlar el cambio y la variación. (Suárez & Cordero, 2010)

La aportación de Nicolás de Oresme para el análisis cuantitativo del movimiento la constituye la representación geométrica del mismo. Para Oresme “[...] la dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas. [...] Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por segmentos rectilíneos.” Oresme, citado por González-Urbaneja, 1992, 42. (Suárez & Cordero, 2010)

Atribuye a las figuras una naturaleza que con ayuda de la imaginación permite el conocimiento de la cualidad a representar:

“Les propriétés de cette qualité en seront examinées plus clairement et plus facilement dès lors que quelque chose qui lui est semblable est dessiné en une figure plane, et que cette chose, rendue claire par exemple visible, est saisie rapidement et parfaitement par imagination ...car l'imagination des figures aide grandement à la connaissance des choses même” Oresme. Traducido por Souffrin, P. y Weiss, J.P. (Suárez & Cordero, 2010)

"Las propiedades de esta cualidad se examinará con mayor claridad y facilidad cuando algo es como se dibuja en una figura plana, y que lo hizo visible ejemplo claro es la entrada rápida y completamente por la imaginación ... cifras de la imaginación ayuda mucho al conocimiento de las cosas aún más "Oresme. Traducido Por Souffrin, P. hay Weiss, J. P. (Traducción de Google “Modificada”)

Las relaciones que se establecen entre figuras geométricas y situaciones específicas de variación permiten observar cómo esta figuración de las cualidades surge en el momento del síntoma de la función (en el sentido de Youschkevitch, 1976). Es decir, tiene sentido pensar en que la graficación conforma elementos importantes de construcción para las ideas de la variación y que se desarrollan de manera independiente, en este caso anterior al desarrollo analítico del concepto de función. (Suárez & Cordero, 2010)

Roth y McGinn (1997) por su parte asumen que las gráficas no son solo una representación mental sino una forma humana de vida, plantean que para desarrollar habilidades para su lectura e interpretación es necesario involucrar a los estudiantes en la realización de prácticas sociales asociadas más que en la posesión a priori de habilidades cognoscitivas. En el marco de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional desarrollada por varios investigadores como Cantoral y Farfán (2000), Dolores (2008), se ha asumido la hipótesis que plantea que un universo amplio y significativo de gráficas puede contribuir al desarrollo de esta forma de pensamiento

matemático. De hecho, este estudio está inscrito al seno de esta línea de investigación. (C. D. Flores et al., 2009)

### **3.8 Grafica**

El estudio del uso de las gráficas se está consolidando como una línea de investigación en la que se estudian las prácticas de referencia asociadas a la graficación en el discurso matemático escolar (Suárez , Cordero, 2010).

Según Buendía (2012) las tareas que el profesor de matemáticas tiene que desarrollar, en el marco de referencia que el sistema educativo brinda a las gráficas cartesianas, están referidas a lograr la correcta articulación de los elementos semióticos que la componen, favorecer el tránsito desde un registro gráfico hacia el analítico, lograr la adecuada interpretación. Ante ello, lo que se adquiere –incluyendo al profesor– es un uso instrumental de los símbolos matemáticos inmersos sin entender los conceptos representados. Le cabe al profesor entonces, proponer tareas que promuevan lo que Duval (1988) ha señalado como conversiones directas entre registros de representación.

Los trabajos orientados hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente tecnológico de Torres (2004), Flores (2005) en Suarez y Cordero (2010) y de Cen (2006), han aportado información sobre el tipo de gráficas que se encuentra actualmente en la educación básica y secundaria, proporcionando evidencias de que el uso de ellas tiene un desarrollo que sustenta una construcción de conocimiento matemático. En estos estudios de uso de las gráficas (Cordero y Flores, 2007) existe una intención de caracterizar a la graficación como un conocimiento con estructura propia y de desarrollo susceptible.

Específicamente, Cen (2006) en el marco de un estudio socioepistemológico, señala que la construcción de gráficas permite al estudiante colocar en juego actitudes de argumentación, es decir, se puede construir y explicar un conocimiento matemático

mediante la graficación, del mismo modo que la actividad de graficación se puede incorporar en las prácticas institucionales en el modelo de conocimiento, dando cuenta del conocimiento matemático y las causas reales de tal conocimiento. Por su parte Torres (2004) señala que los significados y sistemas simbólicos se encuentran directamente en las gráficas. Estos significados pueden detectarse a través del análisis cualitativo de las gráficas de la posición y de la velocidad. Los significados se verán reflejados en las relaciones que los estudiantes logren establecer, es decir, a través de las gráficas de la posición y de la velocidad se pueden identificar intervalos que indiquen cuándo el movimiento es más lento, más rápido o el cuerpo se detiene, y cuándo la velocidad es positiva o negativa.

Describir la manera en la que estudiantes de distintos niveles de escolaridad representan el movimiento de objetos, tanto por medio de gráficas cartesianas como a través de dibujos, ha sido una labor que varios investigadores han realizado en Educación Matemática (Clement, 1989; DiSessa et al, 1991; Nemirovsky, 1994; Nemirovsky, Tierney y Wright, 1998; Sherin, 2000; Doorman, 2005). De las investigaciones de DiSessa et al. (1991), Sherin (2000), Nemirovsky (1994) y Nemirovsky et al. (1998), se puede inferir que, para el estudiante novicio, el estudio de fenómenos relacionados con el movimiento no es una tarea fácil de llevar a cabo. De estos estudios se desprende que la utilización de gráficas cartesianas y fórmulas algebraicas en la investigación del movimiento, requiere la comprensión del funcionamiento de una forma cultural de descripción gráfico-visual que subraya tanto aspectos cualitativos como cuantitativos del movimiento a través de una semiótica compleja que está lejos de ser transparente para el alumno (Miranda et al, 2007).

Para Miranda et al (2013) los objetos matemáticos son generados por los individuos en el transcurso de su desarrollo histórico cultural; en específico, estos objetos no son entidades substanciales. Los objetos son entendidos como formas culturalmente codificadas de movimiento, y basado en la teoría de la objetivación, las gráficas cartesianas en las que se representa el movimiento lineal de objetos, son signos de una



actividad de reflexión sobre el movimiento, reflexión que ha quedado incrustada en la cultura occidental desde la primera mitad del siglo XIV. Para Radford (2009) considerar a la gráfica cartesiana como signo o como objeto de mediación semiótica de cierta forma histórico-cultural de pensar el movimiento, implica una reorganización en la manera de concebir el aprendizaje de dicha gráfica. Con el fundamento epistemológico de la teoría de la objetivación se describe, precisamente, el lineamiento general de esa reorganización por medio de la concepción sociocultural del aprendizaje.

En lo que atañe a las gráficas, la dimensión epistemológica es la que tiene que ver directamente con el contenido matemático de enseñanza, el cual debe estudiarse desde las perspectivas de su origen y su funcionamiento, es decir, cuáles son las formas que se utilizan en la enseñanza escolar para poder graficar, y cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes al estudiar los aspectos globales y locales de las gráficas.

Por su parte, para el análisis de las producciones de los estudiantes, se escogió una situación de aprendizaje que tiene que ver con la modelación gráfica del movimiento, el que se realizó considerando dos niveles. Un primer nivel de análisis basado en el modelo propuesto por Torres (2004), que busca identificar las visiones locales y globales de la gráfica, cuyo uso significativo y articulado a lo largo de un sistema didáctico involucra reconocer el comportamiento inicial de la gráfica (conocer un todo en un cierto margen), complementando con una visualización global de la información geométrica. Un segundo análisis que describe cada figuración a partir del grado de iconicidad; Los componentes de la figura y su sintaxis, así como distinciones de percepción que provee la Gestal -leyes de percepción- articuladas desde la teoría de la imagen, y las textualidades asociadas a su construcción.

## CAPITULO 4. METODOLOGIA

Sandín (2003) justifica el estudio de casos principalmente porque el tipo de análisis apunta al conocimiento de formas de pensamiento, cuestión que tiene un carácter individual y comprensivo del que se espera generar teoría. Esta metodología, presupone que el conocimiento es esencialmente un producto social que se extiende o cambia continuamente de la misma manera que cambia la realidad concreta y no está separado de la práctica (Sandín, 2003)

“La investigación mediante estudio de casos nos permite centrarnos en el fenómeno de la experimentación y visualización matemática de los fenómenos naturales desde la perspectiva de los participantes, lo que facilitaría analizar de modo profundo y con intensidad el fenómeno de estudio con

El fin de establecer generalizaciones acerca de una población más amplia a la que pertenece el particular observado”. (McMillan, Schumacher, & Baidés, 2005)

Muestra: La implementación exploratoria, en el marco de un estudio de caso, aborda un caso de análisis, compuesto por cuatro estudiantes de tercer año medio del colegio Barrie Montessori de la Comuna de Peñalolén, Santiago de Chile.

### 4.1 Instrumentos

**Secuencia:** Se utilizará una actividad propuesta en una secuencia tomada de los Paquetes Didácticos (Suárez Téllez et al., 2005) diseñados por la Academia Institucional de Matemáticas Instituto Politécnico Nacional de México. Esta actividad pide a los estudiantes transitar por un ciclo de exploraciones gráficas

**Entrevista:** “La entrevista, es una técnica cuyo objetivo es obtener información de forma oral y personalizada, sobre acontecimientos vividos y aspectos subjetivos de la persona en relación con la situación que se está estudiando” (Bisquerra, 2004). En el estudio, se empleó la **entrevista** con los siguientes propósitos: (1) como un dispositivo exploratorio para ayudar a identificar variables y relaciones explicativas entre las mismas y (2) para complementar otros métodos haciendo un seguimiento de los resultados. Albert (2006) destaca entre las características de la entrevista el ser: (a) una relación entre dos personas, (b) bidireccional, preferentemente oral, (c) con unos objetivos conocidos y prefijados, al menos por el entrevistador y (d) con una asignación de roles que significa un control de la situación por parte del entrevistador. En particular se realizara una entrevista semiestructurada que permita integrar la actividad emergente que surja de la interacción entre entrevistador y entrevistado.

**Observación:** definida por Bravo (1984) como la inspección y estudio realizado por el investigador, mediante el empleo de sus propios sentidos, con o sin ayuda de aparatos técnicos, de las cosas o hechos de interés social, tal como son o tienen lugar espontáneamente. Van Dalen y Meyer (1981) consideran que la observación juega un papel muy importante en toda investigación porque le proporciona uno de sus elementos fundamentales; los hechos.

Este análisis se realizará sobre la entrevista y observaciones. Se procederá a transcribir las entrevistas y observaciones obteniendo una gran cantidad de información. Propósitos centrales:

- 1) Organización de las unidades, categorías, temas y patrones
- 2) Empleo de técnicas de visualización para representar ideas (esquemas)
- 3) Interpretación de ideas y conceptos

4) Reconstrucción de temas

5) Integración y construcción de teoría

Se desarrolló este estudio durante el año 2014 en el marco de una investigación descriptiva y exploratoria de naturaleza cualitativa, sustentado en estudio de caso y complementado con entrevistas. Los sujetos de estudio lo conformaron cuatro estudiantes de tercer año de secundaria de un establecimiento educacional particular subvencionado.

Con la finalidad de lograr una caracterización de los entendimientos estudiantiles previo al manejo de las gráficas y para la construcción de modelos, que les permitan describir la variación de la posición y la velocidad en una situación de movimiento, se utilizó una situación problema previamente validada y desarrollada por Flores (2007). Es un problema de movimiento que para su aplicación original, el autor utilizó calculadoras con poder de graficación y sensor de movimiento (CBR). Para efectos de esta investigación, no se usó la tecnología. El contenido de la situación problema seleccionada para esta investigación, estaba en correspondencia con el programa de matemáticas que cursaban los estudiantes. Éste establece que ellos deben adquirir conocimientos sobre el significado de la pendiente de una recta (por ejemplo, en el contexto del movimiento de objetos), así como de la fórmula  $v=d/t$ .

Las gráficas cartesianas que representan el movimiento lineal de objetos con velocidad constante son generalmente usadas por los profesores de matemáticas cuando enseñan las representaciones gráficas de funciones de la forma  $f(x) = mx+b$ . Es común que el análisis de este tipo de gráficas consista en pedir a los estudiantes que, dado un tiempo específico, determinen la distancia recorrida por el objeto. La situación problema propuesta cuyas respuestas son analizadas en este trabajo, se describe a continuación, y consiste en describir gráficamente el movimiento de una persona que se aleja de un

punto de partida hasta 500 metros, para luego regresar y sólo dispone de nueve minutos, pero durante dicho trayecto se detiene cuatro minutos:

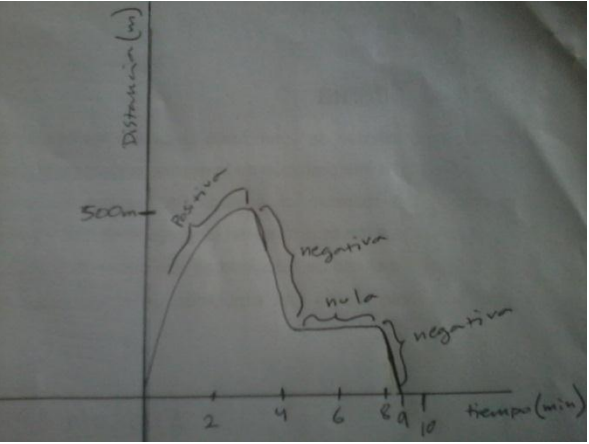
“Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes”. La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos. (Flores, 2007, pp.32).

En esta actividad se busca que los estudiantes comprendan el problema, y puedan construir una gráfica que represente los cambios de posición con respecto al tiempo, transitando por un ciclo de exploraciones previas a la construcción de ella. Básicamente, en el momento de realizar esta tarea los estudiantes deben tomar decisiones sobre las variables que intervienen, la escala de la gráfica, las distancias recorridas en distintos instantes.

## CAPITULO 5. RESULTADOS

Estudiante: Daike, estudiante de tercero medio.


**Tabla 1-** Resultados estudiante Daike

<p>¿Qué tipo de dibujos previos hacen para describir o entender la situación?</p>	<p>No realiza un dibujo previo.</p>
<p>¿Establecen un sistema de coordenadas? Si es así cuáles son las variables que emplean para determinar los cambios de posición</p>	<p>Realiza su gráfica utilizando dos variables, tiempo en minutos y distancia en metros.</p> 
<p>¿Toman en cuenta las unidades y las escalas en los ejes?</p>	<p>En el eje tiempo, para los nueve minutos utiliza números pares y entre el ocho y el diez establece el nueve. En el eje distancia solo señala los 500 metros.</p>

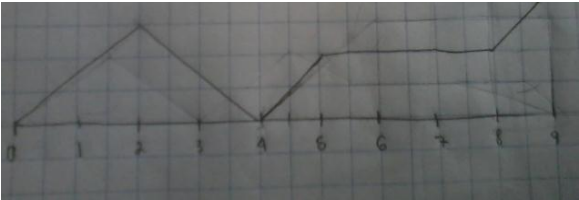
<p>¿Qué tipo de trazos realizan para construir la gráfica?, es decir, si utilizan rectas o curvas o rectas y curvas</p>	<p>Para la realización de la gráfica utiliza trazos curvos y rectos.</p>
<p>Establecen algún tipo de función matemática, si es así cuál o cuáles son</p>	<p>No establece función.</p>
<p>En su gráfica señalan los cambios de posición de ida, de regreso y cuando se detiene, emplean intervalos, (indican de donde a donde) para describir dichos cambios</p>	<p>En su gráfica señalan la velocidad positiva, negativa y nula</p>
<p>Hacen referencia a otra situación o fenómeno para explicar su gráfica</p>	<p>No hay evidencia.</p>
<p>Con respecto a la gráfica de la velocidad pueden identificar en la gráfica cuando tiene que ir más rápido, más lento o se detiene, si es así cómo lo hacen.</p> <p>Al hacer la gráfica de la velocidad, la relacionan con la de la distancia.</p>	<p>Al utilizar trazos curvos y rectos, expresa un cambio de velocidad a medida que se aproxima un cambio de dirección.</p>

Estudiante: Victoria, estudiante de tercero medio.

**Tabla 2-** Resultados estudiante Victoria

<p>¿Qué tipo de dibujos previos hacen para describir o entender la situación?</p>	<p>Realiza un dibujo previo para entender la situación, representando la forma circular del problema, incorporando las distancias y la ubicación del salón de música y la biblioteca.</p> 
<p>¿Establecen un sistema de coordenadas? Si es así cuáles son las variables que emplean para determinar los cambios de posición</p>	<p>Realiza su gráfica solo entorno a la variable tiempo, por lo que no presenta un sistema de coordenadas.</p>

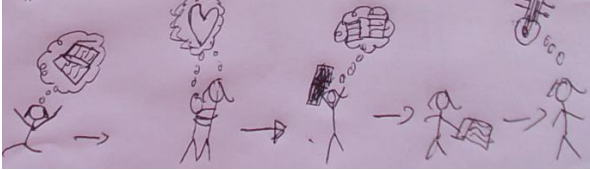
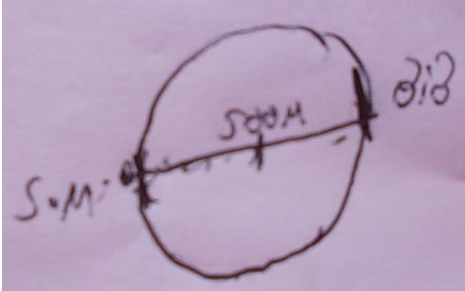


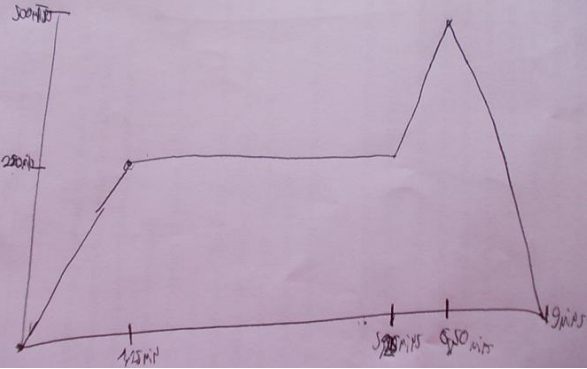
	 <p>Para victoria, la situación comienza en la biblioteca, ya que ella señaló que si “se le había olvidado en la biblioteca, es por que ahí había partido”, por esto en su gráfica es posible observar un momento más que en las otras producciones.</p>
<p>¿Toman en cuenta las unidades y las escalas en los ejes?</p>	<p>En el eje tiempo (el único realizado) gradúa en minutos de uno en uno, partiendo desde el cero hasta el nueve.</p>
<p>¿Qué tipo de trazos realizan para construir la gráfica?, es decir, si utilizan rectas o curvas o rectas y curvas</p>	<p>Para la realización de la gráfica utiliza solo líneas rectas.</p>
<p>Establecen algún tipo de función matemática, si es así cuál o cuáles son</p>	<p>No establecen función.</p>
<p>En su gráfica señalan los cambios de posición de ida, de regreso y cuando se detiene, emplean intervalos, (indican de donde a donde) para describir dichos</p>	<p>Al realizar su gráfica solo en relación al eje tiempo, los intervalos solo consideran esta variable, donde siempre coinciden los cambios de posición de forma exacta con los</p>

cambios	minutos.
Hacen referencia a otra situación o fenómeno para explicar su gráfica	No hay evidencia.
<p>Con respecto a la gráfica de la velocidad pueden identificar en la gráfica cuando tiene que ir más rápido, más lento o se detiene, si es así cómo lo hacen.</p> <p>Al hacer la gráfica de la velocidad, la relacionan con la de la distancia.</p>	<p>Al utilizar trazos rectos para su gráfica, no se identifica cambio de velocidad, pero si claramente el cambio de dirección.</p>

Estudiante: Cristóbal, estudiante de tercero medio.

**Tabla 3-** Resultados estudiante Cristóbal

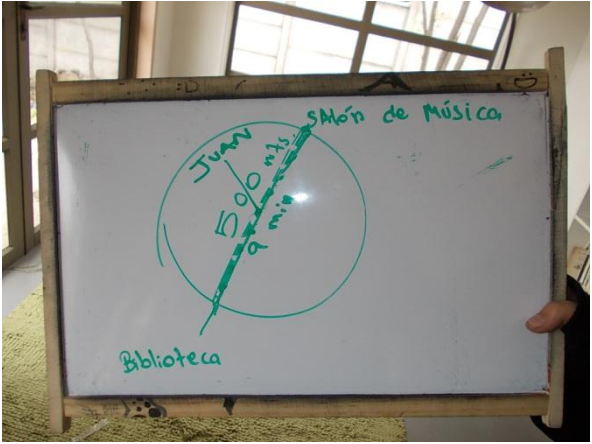
<p>¿Qué tipo de dibujos previos hacen para describir o entender la situación?</p>	<p>Realiza un dibujo previo representando las diversas situaciones por las que pasa Valentina.</p>  <p>Representa la forma circular del problema, incorporando las distancias y la ubicación del salón de música y la biblioteca.</p> 
<p>¿Establecen un sistema de coordenadas? Si es así cuáles son las variables que emplean para determinar los cambios de posición</p>	<p>Realiza su gráfica utilizando dos variables, tiempo en minutos y distancia en metros.</p>

	
<p>¿Toman en cuenta las unidades y las escalas en los ejes?</p>	<p>En el eje tiempo, solo indica el punto en que se cambia la dirección, sin utilizar minutos exactos, el primer cambio de dirección es a las 1,25 minutos.</p>
<p>¿Qué tipo de trazos realizan para construir la gráfica?, es decir, si utilizan rectas o curvas o rectas y curvas</p>	<p>Para la realización de la gráfica utiliza trazos rectos.</p>
<p>Establecen algún tipo de función matemática, si es así cuál o cuáles son</p>	<p>No establece función.</p>
<p>En su gráfica señalan los cambios de posición de ida, de regreso y cuando se detiene, emplean intervalos, (indican de donde a donde) para describir dichos</p>	<p>No señalan de forma verbal los cambios de dirección, pero al utilizar trazos rectos se observan con facilidad.</p>

cambios	
Hacen referencia a otra situación o fenómeno para explicar su gráfica	No hay evidencia.
<p>Con respecto a la gráfica de la velocidad pueden identificar en la gráfica cuando tiene que ir más rápido, más lento o se detiene, si es así cómo lo hacen.</p> <p>Al hacer la gráfica de la velocidad, la relacionan con la de la distancia.</p>	Al utilizar trazos rectos para su gráfica, no se identifica cambio de velocidad, pero si claramente el cambio de dirección.

Estudiante: Bruno, estudiante de séptimo básico.

**Tabla 4-** Resultados estudiante Bruno

<p>¿Qué tipo de dibujos previos hacen para describir o entender la situación?</p>	<p>Realiza un dibujo previo para entender la situación, representando la forma circular del problema, incorporando las distancias y la ubicación del salón de música y la biblioteca.</p> 
<p>¿Establecen un sistema de coordenadas? Si es así cuáles son las variables que emplean para determinar los cambios de posición</p>	<p>Realiza su gráfica utilizando dos variables, tiempo en minutos y distancia en metros.</p>

<p>¿Toman en cuenta las unidades y las escalas en los ejes?</p>	<p>En el eje tiempo gradúa en minutos de uno en uno, partiendo desde el cero hasta el nueve... En el eje distancia gradúa en metros de cincuenta en cincuenta llegando hasta quinientos.</p>
<p>¿Qué tipo de trazos realizan para construir la gráfica?, es decir, si utilizan rectas o curvas o rectas y curvas</p>	<p>Para la realización de la gráfica utiliza trazos rectos.</p>
<p>Establecen algún tipo de función matemática, si es así cuál o cuáles son</p>	<p>No establece función.</p>
<p>En su gráfica señalan los cambios de posición de ida, de regreso y cuando se detiene, emplean intervalos, (indican de donde a donde) para describir dichos cambios</p>	<p>En su gráfica señalan la velocidad positiva, negativa y nula, señalando la situación en la que se encuentra Valentina</p>

<p>Hacen referencia a otra situación o fenómeno para explicar su gráfica</p>	<p>No hay evidencia.</p>
<p>Con respecto a la gráfica de la velocidad pueden identificar en la gráfica cuando tiene que ir más rápido, más lento o se detiene, si es así cómo lo hacen.</p> <p>Al hacer la gráfica de la velocidad, la relacionan con la de la distancia.</p>	<p>Al utilizar trazos rectos para su gráfica, no se identifica cambio de velocidad, pero si claramente el cambio de dirección.</p>



## **Entrevista.**

Estudiante: Cristobal

Entrevistador (E): ¿Qué representa la gráfica realizada?

Cristóbal (C): Representaba el movimiento que el ejercicio denomina positivo o negativo. Una manera de representarlo entonces es que el gráfico representa el tiempo en el que se mueve entre los espacios y su velocidad.

E: En tu construcción realizaste dos dibujos auxiliares. ¿Qué función cumple cada uno de ellos en la construcción de la gráfica?

C: La circunferencia representa el espacio que recorre Valentina en la biblioteca y la sala de música que tiene una distancia de 500 metros, que es la distancia del patio. Es para representar visualmente lo que tengo en la cabeza ya que es más fácil de entender.

E: ¿Qué función cumple la secuencia que realizaste?

C: Esta secuencia representa cada hecho destacable, Ideas distintas separadas por puntos o comas (descripción de la secuencia de hechos).

E: Llama la atención que manifestaste 5 secuencias, que calzan con los puntos de cambio en la gráfica que realizaste.

C: La verdad fue de manera inconsciente, en cierta medida yo representé las cosas que tenía en la cabeza, ya que me pidieron que lo represente y sólo tenía una idea en la cabeza sin darme cuenta la traduje a ambos lenguajes (gráfico y dibujo).

E: ¿Lo que señalas es que la secuencia del cómic representa lo mismo que la gráfica cartesiana?

C: Sí.

E: La gráfica cartesiana sólo utiliza tramos rectos, ¿sentiste necesidad de otro tipo de trazos?

C: La verdad es que los cambios de velocidad son despreciables por lo que casi asumí una velocidad constante.

E: En el cómic representas la transición con flechas, ¿qué significa?

C: Fue una forma de reemplazar las viñetas y organizar ya que mis habilidades artísticas son limitantes por lo que quise hacer la secuencia lo más entendible posible y separar las ideas.

E: En una primera interpretación la flecha representó movimiento, no una separación estática, ya que la flecha indica dirección pero podría haber sólo sido un guión.

C: También podría representar la dirección de lectura, posiblemente la flecha no fue el símbolo más preciso.

E: Si no hubieses realizado la circunferencia o el cómic ¿podrías haber construido a la gráfica?

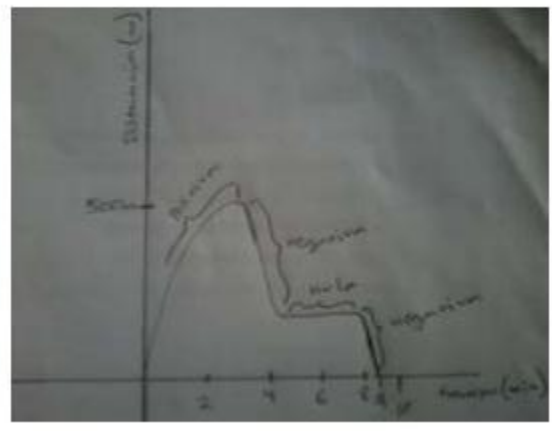
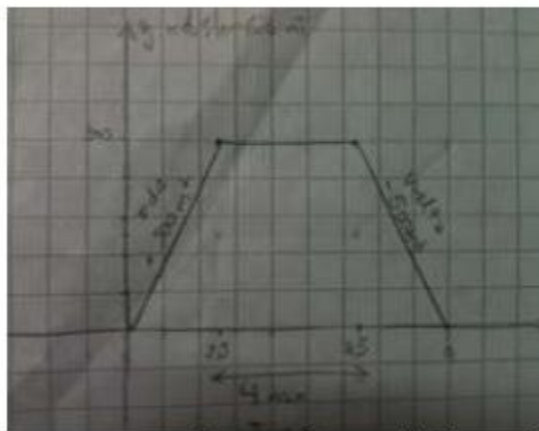
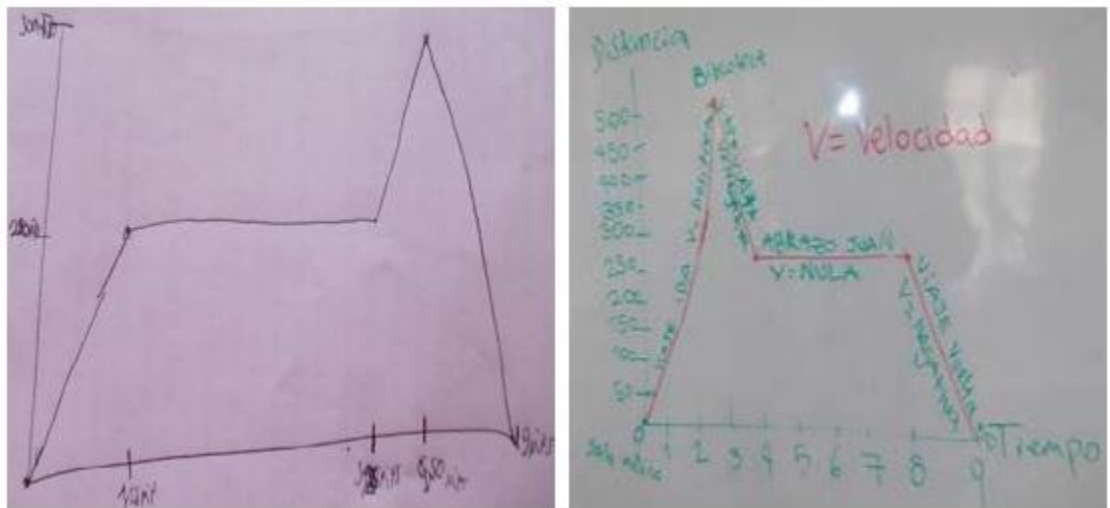
C: Hubiese sido mucho más lento el proceso para conseguirlo de esa manera, ya que si bien es un dibujo súper básico y es algo que tenemos en la cabeza, tenerlo visualmente nos permite verlo en perspectiva y entender cómo se está realizando el movimiento, además de ver si el movimiento es positivo o negativo. En el caso del dibujo es sólo para representar la situación, en mi opinión es más importante el dibujo de la circunferencia

ya que este posee la información.

## CAPITULO 6. ANALISIS DE RESULTADOS

### 6.1 Interpretaciones de los estudiantes: Primer nivel de análisis

Figura 6- Modelos gráficos de la posición y la velocidad



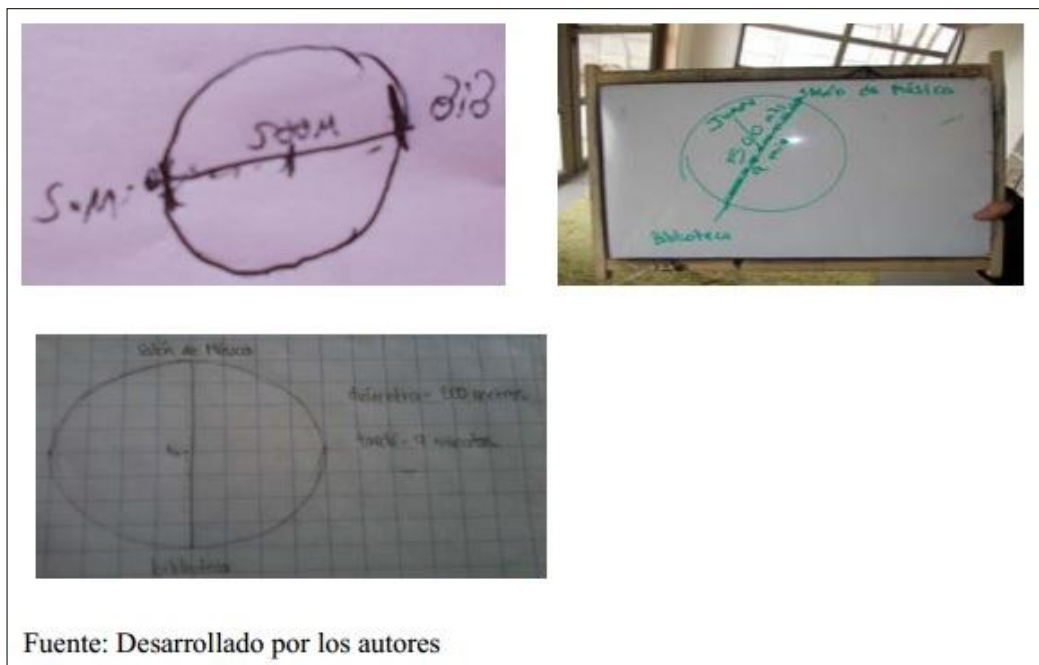
Fuente: Desarrollado por los autores

Respecto de la visión global del fenómeno, todos los estudiantes dan una visión global de los cambios de posición, sin embargo uno solo de ellos logra hacer trazos curvos que dan cuenta de los cambios de velocidad. Es una figuración que pareciera quedarse en la visión global del desplazamiento.

De forma local, en la construcción de la gráfica cartesiana, los estudiantes plantean la situación problema en base a dos ejes (tiempo/distancia). Se presentan diferencias en quienes gradúan los ejes y en los que señalan solo los puntos donde la gráfica cambia. Los estudiantes, salvo una excepción, complementan con información textual señalando la velocidad positiva, velocidad negativa o nula. Solo un estudiante utiliza curvas para su gráfica reflejando el cambio de velocidad. En la totalidad de las producciones se utilizaron trazos rectos, por lo que no indican cuando existe un cambio de velocidad. Se observa en las gráficas los cambios de dirección, marcando todos cinco puntos de cambio de la curva, identificando en ella la nulidad de movimiento durante cuatro minutos, distribuida de diferentes formas según el entendimiento del problema de cada estudiante a lo largo de los minutos en los que transcurre la acción.

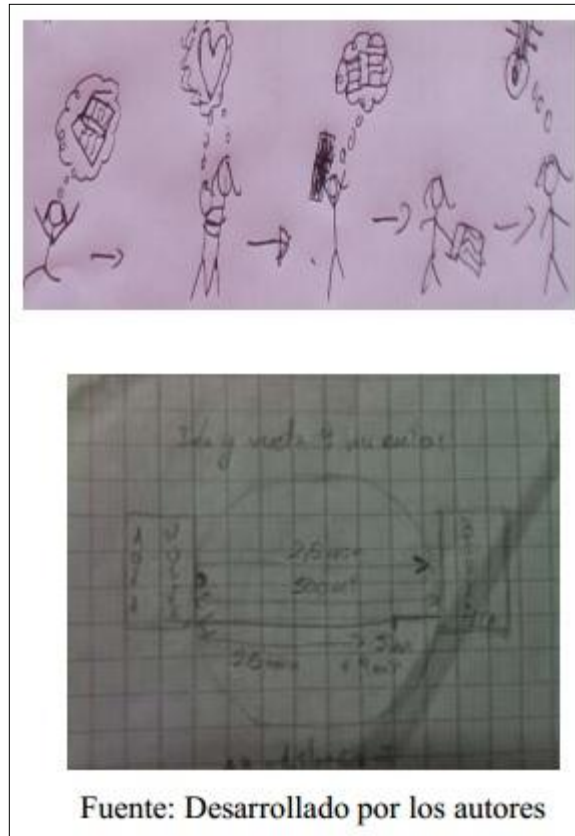
## 6.2 Interpretaciones de los estudiantes: Segundo nivel de análisis

Figura 7- Representaciones de Contexto



Recurren a descripciones del espacio y la traza del movimiento, dejando implícito aspectos de ello. Dos estudiantes representan el movimiento que envuelven a la acción. La porción de realidad que figuran los estudiantes responde al escenario donde se realizaba el movimiento, realizando una representación gráfica de la descripción. El repertorio de elementos lo constituyen el patio circular, el diámetro con su medida, y textualidades para señalar la ubicación del salón y la biblioteca, además de aportar información al contexto.

**Figura 8-** Secuencia de movimiento, contexto y gráfica.



Dos sintaxis se pueden apreciar en las figuras de los estudiantes. La primera corresponde a Cristóbal, referida a un cómic con cuatro escenas de una persona en posición de caminata, marcando en la iconicidad del dibujo la velocidad. En la segunda que corresponde a Victoria, se aprecian flechas a modos de vectores entre dos representaciones icónicas de los edificios de la escuela. Junto a ello se usan flechas, líneas continuas, que marcan dirección. Indicando los movimientos realizados por Valentina. Ambos presentan diversas escenas con las distintas acciones realizadas por Valentina, complementando con flechas para indicar el movimiento. Construyen la figuración de forma secuencial, utilizando instantes de referencia, indicando cambios de posición, así como connotaciones que forman parte de instantes posteriores al momento

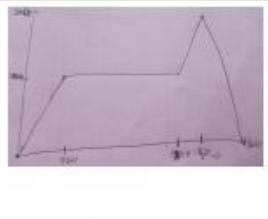
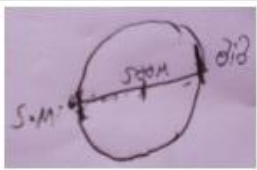

de referencia. El nivel de iconicidad de las figuraciones es alto, y es posible identificar las relaciones espaciales del fenómeno al complementar esta figuración con la representación del escenario donde se realiza el movimiento.

En la figura 3, la representación del patio circular y de la ubicación de la sala de música y de la biblioteca da encuadre y espacialidad a la zona en que se figuran los movimientos que realiza Valentina. Se constituyen en fondo y marco de la figura, que permiten al estudiante focalizar en un contexto la mirada en las trayectorias de Valentina. Marcan en los puntos en que cambia el movimiento con los valores numéricos presentes en el enunciado y así indican las distancias a recorrer por Valentina. El movimiento, queda implícito en las líneas, las cuales invitan a ojo a recorrer una trayectoria en la imagen. Recurren a la línea para expresar los movimientos de Valentina.

### **6.3 Funcionamiento y forma de las prácticas de figuración como medio de construcción de modelos gráficos en situaciones de movimiento**

. Las figuraciones previas a la gráfica cartesiana son entendidas desde las prácticas socioescolares (Carrasco & Diaz, 2012) como modos de operar compartidos por los actores escolares, para la construcción y la interpretación de figuraciones de entidades asociadas a un fenómeno, en particular, en este reporte el fenómeno se refiere a una situación de movimiento, de la cual en la construcción del modelo gráfico realizado por un estudiante se desprenden dos figuraciones previas. El uso de estas figuraciones presenta características particulares e individuales que se complementan en la construcción del modelo gráfico.



		
Imagen 1 – Gráfica 1	Imagen 2 – Auxiliar 1	Imagen 3 – Auxiliar 2 (Cómic)

La primera figuración (Imagen 2 – Auxiliar 1) es usada para representar el contexto donde se reproduce la situación de movimiento, la segunda figuración previa (Imagen 3 – Auxiliar) es usada para representar los hitos más importantes de la situación de movimiento desde la mirada del estudiante, asignando también un valor secuencial acorde al desarrollo de la situación de movimiento.

Desde la mirada del Binomio Modelación-graficación evidenciamos que el funcionamiento que desempeña cada figuración, entendida como una práctica que ofrece una forma específica para ser abordada, permiten articular en conjunto la construcción del modelo gráfico que representa el fenómeno, organizándose según la propia necesidad y la necesidad del estudiante para dar significado a los distintos elementos que conforman la gráfica,

En particular, en la situación de movimiento que se reporta, cada figuración previa a la gráfica cartesiana cumple con funciones específicas desde su forma particular, manifestando además las necesidades del estudiante en la comprensión del fenómeno que se pretende modelar, de manera tal que se presenta una figuración cuya función es identificar o establecer un contexto para el fenómeno de movimiento, ejecutándose por medio de la descripción visual del contexto. Como segunda figuración previa a la gráfica cartesiana se presenta una secuencia cuya función es identificar los hechos relevantes que intervienen en el fenómeno de movimiento, asignando a estos una secuencia que permite una articulación con el contexto de la situación y un momento específico en el modelo gráfico, identificando las diversas acciones que describen desde la mirada del estudiante la actividad del fenómeno.

## **CAPITULO 7. CONCLUSIONES**

A modo de conclusión proponemos establecer las prácticas de figuraciones previas a la gráfica cartesiana como elementos que dan significado al fenómeno y permiten establecer las características de este que necesitan los estudiantes para la construcción del modelo gráfico, identificando una necesidad particular de cada individuo bajo una institucionalidad escolar.

Como unidad de análisis del fenómeno realizado por el estudiante, las figuraciones previas a la gráfica cartesiana pueden presentarse con mayor o menor frecuencia según la necesidad de cada individuo, además de apuntar a una cualidad específica del fenómeno que necesita ser comprendida, por lo que si bien cada figuración ha de tener sus propias características se hace necesario englobarlas a todas en un mismo análisis como una escala previa realizada por los estudiantes en la construcción de un modelo gráfico, de modo que los funcionamientos y formas individuales de cada figuración permitan establecer y puntualizar tanto el camino como las necesidades presentadas por los estudiantes en la construcción del modelo gráfico final.

Se escogió una situación de aprendizaje que tiene que ver con la modelación gráfica del movimiento. En esta actividad se buscó que los estudiantes comprendieran el problema, explicitaran prácticas de figuraciones para llegar a registros gráficos, de tal manera que al cambiar las características de su movimiento pueden identificar los cambios que se producen en la gráfica. De esta forma se logra el análisis de un fenómeno y al mismo tiempo su representación. De acuerdo al objetivo de investigación y tomando en cuenta las características cualitativas de las gráficas que hicieron los estudiantes, se puede concluir que todos los estudiantes lograron hacer una gráfica correspondiente a los cambios de posición. Si bien sólo uno de ellos logró desde el inicio hacer trazos curvos, se puede concluir que la naturaleza de la tarea, es decir, partir de una situación para graficarla, hace que los estudiantes recurran a todo lo que saben para lograr la gráfica

que se les pide.

Por otra parte, enfrentarse a la tarea de hacer la gráfica del movimiento cumple con el rol de escenario en el cual se desarrolla y representa el movimiento, ambos icónicos y de bajo simbolismo, presentan una representación figurativa del fenómeno. Estos elementos fueron utilizados por los estudiantes, como etapas previas para la mejor comprensión de la situación, que posteriormente finalizó con la realización de la gráfica cartesiana. La utilización de figuraciones previas, va constituyendo una práctica socioescolar, toda vez que dos de los casos no responden a la misma institución educativa. Práctica que involucra la construcción de una representación figurativa del fenómeno, estructurando desde la evocación del mismo, dos elementos que dan sentido a la comunicación del fenómeno de variación: el escenario y/o marco en el que se desarrolla el movimiento, dado por un patio circular y los puntos clave donde ocurren cambios y, la figuración de la trayectoria del móvil en ese espacio, en un proceso que va despojando de elementos contextuales para poder graficar finalmente solo las variables solicitadas, y en una práctica de representación figurativa del fenómeno, a las que concurren aspectos socioculturales, cognitivos y matemáticos.

La interpretación gráfica de los estudiantes nos permitieron obtener una visión de su conocimiento al realizar las gráficas y su interpretación con la intención de servir en la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, a la luz de estos resultados, es necesario utilizar el uso de las gráficas en relación al conocimiento de conceptos específicos de la matemática escolar, ya que se lograría una mayor significación de los conceptos.

## Bibliografía

- Barrantes, H., Meta-Matemáticas, U. C. R., de Ciencias Exactas, E., & Naturales, U. (2006). Resolución de problemas. *El Trabajo de Allan Schoenfeld. Cuaderno de Investigación Y Formación En Educación Matemática. Año, 1(1)*. Retrieved from <http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno1/Cuadernos%201%20c%204.pdf>
- Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico). *Centro de Investigación Y de Estudios Avanzados Del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México.*
- Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 9(2), 227–251.*
- Cantoral, R., & Farfán, R. (1998a). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, 42(3), 854–856.*
- Cantoral, R., & Farfán, R. (1998b). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon, 42(3), 854–856.*
- Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003a). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 6(1), 27–40.*
- Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003b). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 6(1), 27–40.*
- Carabaña, J. (2008). Las diferencias entre países y regiones en las pruebas PISA.

- Colegio Libre de Eméritos, Madrid*. Retrieved from [http://www.actiludis.com/wp-content/uploads/2009/09/pisa\\_carabana\\_vf.pdf](http://www.actiludis.com/wp-content/uploads/2009/09/pisa_carabana_vf.pdf)
- Carrasco, E. (2006). *Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo* (Tesis de maestría no publicada). CICATA, Mexico. Retrieved from <http://cicataleg-publications.ipn.mx:8080/handle/123456789/889>
- Carrasco, E., & Diaz, L. (2009). Metáforas, herramientas para interpretar argumentos variacionales. Leonora. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 35–41.
- Carrasco, E., & Diaz, L. (2012). Dos casos de figuración para lo que varía. Documento interno de trabajo Postgrado en Educación Matemática, Universidad de los Lagos, Chile.
- Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95–124). Horsori. Retrieved from <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095373>
- Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo: una epistemología a través de la actividad humana. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 4(2), 103–128.
- Cordero Osorio, F., Cen Che, C., & Suárez Téllez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 13(2), 187–214.

- Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 8(2), 145–168.
- Díaz, L., Quintanilla, M., & Labarrere, A. (2012). Promoviendo sujetos competentes ante la ciencia y sus problemas Análisis de microdiseños docentes de evaluación. *Las Competencias de Pensamiento Científico*, 83.
- Díaz Quezada, M. V., & Poblete Letelier, Á. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, (45), 33–42.
- Flores, C. (2007). *Variaciones simultáneas de primer y Segundo órdenes en una situación de Gráfica y modelación de Movimiento*. Retrieved from <http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/5224>
- Flores, C. D., Chablé, A. G. C., Pech, E. R. C., Interián, C. A. C., & Solache, C. G. P. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Número 18–Junio de 2009*, 41.
- Kandinsky, N. (1993). *Punto y línea sobre el plano: Contribución al análisis de los elementos pictóricos*. Labor S.A. Retrieved from <http://en.scientificcommons.org/6967000>
- Lopez, J. (2006). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, Mexico.
- Marquina, N. (2012, Enero). *Incorporando Nuevas Prácticas de Modelación al sistema escolar. Un estudio de su constitución* (Tesis Magister). Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Acapulco, Mexico.
- MINEDUC. (2009). Ministerio de Educación Chile. Objetivos Fundamentales y

Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media,  
Actualización 2009. Impresos Universitaria.

Pérez, I. E., & Carrasco, E. (2012). Características de las prácticas estudiantiles de figuración ante un fenómeno de variación. In *XVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática, Universidad San Sebastian*. SOCHIEM.

Planchart, O. (2002). *La Visualización y la Modelación en la adquisición del concepto de función* (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Instituto de Ciencias de la Educación, Unidad de Matemática Educativa, Cuernavaca, Morelos, Mexico. Retrieved from <http://164.42.157.2/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf>

Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. Retrieved from <http://www.sidalc.net/cgi-bin/wxis.exe/?IsisScript=SIBE01.xis&method=post&formato=2&cantidad=1&expresion=mfn=009622>

Roth, W.-M., & McGinn, M. K. (1997). Graphing: Cognitive ability or practice? *Science Education*, 81(1), 91–106.

Santos Trigo, L. M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. In *Investigación en educación matemática XII* (p. 8). Retrieved from <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2748785>

Suárez, L., & Cordero, F. (2010). Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Relime*. Retrieved from <http://www.clame.org.mx/relime/201018d.pdf>

Suárez Téllez, L., & Cordero Osorio, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente

tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación En Educación En Ciencias*, 3(1), 51–58.

Suárez Téllez, L., Cordero Osorio, F., Daowz Ruiz, P., Ortega Cuenca, P., Ramírez Ortega, A., & Torres Guerrero, J. L. (2005). De los paquetes didácticos hacia un repositorio de objetos de aprendizaje: un reto educativo en matemáticas. Uso de las gráficas, un ejemplo. *RIED: Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 8(1), 307–334.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. (Tesis no publicada del Programa de Maestría). CICATA-IPN., Mexico. Retrieved from <http://cicataleg-publications.ipn.mx:8080/handle/123456789/1185>

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM—Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau*. Retrieved from [http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos\\_publicacoes1/indicacoes\\_01/pensamento\\_variacional\\_VASCO.pdf](http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf)



## **Anexos**

### **Anexo 1. Situación de aprendizaje Epifanía.**

(L. Suárez Téllez et al., 2005)

Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes, tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía.

La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos.

1) Construye una gráfica que describa los cambios de posición de Valentina en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.

2) Todos hemos escuchado o hecho descripciones de objetos en movimiento, que incluyan expresiones como “detenido”, “rápido”, “lento”, “más rápido”, “disminuyó su velocidad”, “más alejado”, “aceleró más”, y muchas otras que seguramente te han asaltado la memoria. Convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario.

Identifica en la gráfica intervalos en los que la velocidad sea negativa, positiva o nula, y

describe las características de la gráfica, al igual que en el párrafo anterior, introduce matices en la descripción de la velocidad y anota las características correspondientes de la gráfica.