

LIMITACIONES DE APRENDIZAJE QUE EVIDENCIAN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

LEARNING LIMITATIONS THAT EVIDENCE STUDENTS OF SECONDARY EDUCATION IN THE STUDY OF THE QUADRATIC FUNCTION

Marianela Alpízar Vargas, Hazel Fernández Álvarez, José Luis Morales Reyes, Steven Quesada Segura

Universidad Nacional. (Costa Rica)

marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr, hazelgt17@hotmail.com, josemore93@hotmail.com, steven_09_11@hotmail.com

Resumen

Este trabajo de investigación plantea las dificultades y errores que presentan estudiantes, de la educación secundaria costarricense, en el aprendizaje de la función cuadrática. La investigación se fundamenta en uno de los organizadores del Análisis Cognitivo, subanálisis perteneciente al Análisis Didáctico del Grupo Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada. Dentro de los resultados, se tiene que la mayoría de los errores se deben a deficiencias en el manejo de contenidos y procedimientos; además, que presentan gran dificultad en situaciones que requieren ir más allá de la aplicación de fórmulas.

Palabras clave: análisis cognitivo, función cuadrática, dificultades y errores

Abstract

This research paper is aimed at analyzing the difficulties and errors that Costa Rican secondary school students present when learning the quadratic function. The research is based on one of the organizers of cognitive analysis, proposed by the Didactic Analysis of the Numerical Thinking Group of the University of Granada. It was found that most errors are due to deficiencies in the management of contents and procedures; besides, they present great difficulty in situations that require more than the application of formulas.

Key words: cognitive analysis, quadratic function, difficulties and errors

■ Introducción

Esta investigación toma como marco de referencia uno de los subanálisis del Análisis Didáctico, propuesto por el Grupo Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, específicamente desarrolla lo referente al organizador denominado limitaciones de aprendizaje, el cual pertenece al análisis cognitivo.

Lo reportado en este escrito corresponde a algunas reflexiones generadas a raíz de una investigación realizada, como requisito parcial, para optar por el grado académico de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica. En dicha investigación se utilizó el Análisis Didáctico, como fundamentación teórica, en la elaboración de un material didáctico, para la enseñanza de la función lineal y de la función cuadrática, coherente con el Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). El material didáctico está dirigido a estudiantes de décimo año de educación secundaria. Cabe destacar que, en Costa Rica, la educación secundaria consta de cinco años y la edad de los estudiantes oscila entre los trece y los diecisiete años.

En la investigación completa se realizaron los análisis: conceptual, de contenido, cognitivo y de instrucción sobre la función lineal y la función cuadrática; sin embargo, en este artículo solamente se reportan algunos de los resultados referidos con el análisis cognitivo de la función cuadrática.

La importancia del estudio planteado radica en que, los contenidos de cada unidad didáctica se deberían adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos (Abrate, Pochulu y Vargas, 2016). Además que la detección de las dificultades y los errores vinculados a un contenido matemático permiten conocer los factores que pueden interferir en el proceso de aprendizaje del estudiante (Arias y González, 2016); por lo que, se facilita la elección de tareas que permitan enfrentar las dificultades y evitar los errores; es decir, se deben conocer las dificultades y los errores más comunes en los estudiantes para plantear materiales didácticos que colaboren con la labor del docente en el proceso de enseñanza, pero sobre todo, que contribuyan con el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

■ Marco teórico

El análisis didáctico es un sistema cíclico de cinco categorías, a saber: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis evaluativo, considerando que los dos primeros son uno solo, dado que su objetivo es analizar el contenido matemático (Rico y Fernández, 2013). La finalidad del análisis didáctico es fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación de materiales didácticos que organizan y transmiten conocimientos matemáticos, así como la puesta en práctica y la evaluación de estos (Rico y Fernández, 2013).

La base de esta investigación es el análisis cognitivo, el cual se ajusta a una concepción escrutadora o regresiva, ya que trata de organizar el para qué y hasta dónde se deben aprender determinados conocimientos sobre un tópico específico (Rico, 2013). Es decir, se enfoca en los estudiantes a los cuales se dirige el proceso de enseñanza.

Para efectuar el análisis cognitivo se establecen tres organizadores. El primero se refiere a las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, a su precisión y riqueza, a su alcance en el largo, medio y corto plazo, el segundo se enfoca en las limitaciones de aprendizaje, dentro del cual se consideran los errores y dificultades de los estudiantes, y el último son las oportunidades de aprendizaje, que se refieren a aquellas situaciones que diseña o adapta el docente con el fin de contribuir al aprendizaje de un determinado tópico matemático.

Este estudio se enfoca en las limitaciones de aprendizaje, donde las dificultades de aprendizaje pueden ser hipotéticas o empíricas, conjeturadas o conocidas, y los errores pueden estar ya documentados o ser detectados durante la práctica. Es decir, este organizador se ocupa de algunas situaciones que pueden poner un obstáculo al

aprendizaje de los escolares, y se parte del hecho de que son muchas las variables que pueden afectar el desarrollo cognitivo de los estudiantes en el contexto del aprendizaje escolar (Lupiáñez, 2013).

Al enfocar esta investigación en el segundo organizador, fue necesario considerar un apartado teórico para los errores y dificultades que han manifestado los estudiantes al trabajar con los conocimientos de la función cuadrática. Según Lupiáñez (2013) las dificultades de aprendizaje forman parte inherente del propio proceso de aprendizaje y aunque puedan tener su origen en muchas causas, una de ellas tiene que ver con la propia complejidad del conocimiento matemático.

Al respecto Socas (1997) menciona que en el aprendizaje de la Matemática, los alumnos, presentan muchas dificultades y éstas son de naturalezas distintas. Algunas de ellas tienen origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Así mismo, señala que las dificultades pueden abordarse desde varias perspectivas, entre ellas: el desarrollo cognitivo de los alumnos, el currículo de Matemática y los métodos de enseñanza.

Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores; además, el error va a tener procedencias diferentes, pero en todo caso va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste (Socas, 1997).

Para efectos de esta investigación se entenderá por dificultad, cualquier situación cognitiva que enfrente el estudiante, que le impide o afecte en forma negativa sus procesos de resolución de ejercicios y problemas; además, se entenderá por error, aquella situación observable donde el estudiante brinde una respuesta equivocada. Además, se considerará parte de la clasificación de errores propuesta por Radatz (1980) mencionado por Abrate, Pochulu y Vargas (2006), a saber:

- 1) Errores debido a deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos en la elaboración de una tarea Matemática; por ejemplo, ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.
- 2) Errores causados por la ausencia del pensamiento flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas (asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento). Dentro de esta clase de errores se tienen:
 - De asociación: Razonamientos o asociaciones incorrectas. Por ejemplo, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en asociación con el hecho de que $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
 - De interferencia: Cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros. Por ejemplo la multiplicación de dos números negativos interfiere en la resolución de una resta: $-5 \cdot -3 = 8$ lleva a $-5 - 3 = 8$.
- 3) Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales: aquellos que se presentan cuando cada paso de la tarea es correcto, o responde a la lógica interna del procedimiento esperado, pero el resultado final no es la solución debido a los errores de cálculo que se presentaron en la ejecución de operaciones básicas, o acarreados por la transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en la situación.

Propiamente en el aprendizaje de la función cuadrática, en la literatura, se pueden encontrar algunas dificultades. Córdoba, Diaz, Haye y Montenegro (2013) señalan algunas de ellas en cuanto a los estudiantes:

- 1) No relacionan el coeficiente del término lineal con la posición del eje de simetría de la parábola. Este caso se refiere a que cuando los estudiantes grafican una función cuadrática, sabiendo solo que $a > 0$, $b = 0$ y $c < 0$ no tienen claro que $b = 0$ da como resultado el eje de simetría sobre el eje y .
- 2) No aciertan al establecer el coeficiente del término cuadrático mediante la información visual contenida en la gráfica.
- 3) Los problemas se revelan con mayor fuerza cuando el registro de partida es la gráfica. Es decir, teniendo solo una parábola ubicada en el plano cartesiano tienen dificultad al determinar su criterio.

De forma similar Huang, Li y An (2012), en una investigación relacionada con las estrategias de enseñanza de la función cuadrática en China, determinaron las siguientes dificultades generales:

- 1) Organización del currículo: En China estudian primeramente la función cuadrática, y luego la función lineal y las ecuaciones cuadráticas. A pesar de que tradicionalmente no se hace así, sino que se consideran las ecuaciones cuadráticas y la función lineal como conocimientos previos. Lo que podría afectar el entendimiento de las funciones cuadráticas.

Por ejemplo: Se le pide a un estudiante encontrar el punto mínimo de la función $f(x) = 3x^2 + 9x - 3$, él la simplifica dividiendo por tres y obtiene $f(x) = x^2 + 3x - 1$ completa cuadrados y halla el punto mínimo de ella, asumiendo que es el mismo de la función dada originalmente. Esto se debe a que usó la misma generalización que cuando se resuelve la ecuación $3x^2 + 9x - 3 = 0$ es equivalente a resolver $x^2 + 3x - 1 = 0$

- 2) Pocas variaciones de los parámetros: La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene diferentes variaciones dependiendo de si b y c son o no cero. Además cuando el número de variaciones y ejemplos son limitados aparecen errores como los siguientes:

- a) Pensar que la función $f(x) = ax^2 + bx$ no tiene intersección con el eje y porque no aparece c .
- b) Si un estudiante estudia las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$ se dará cuenta que c regula el movimiento hacia arriba o hacia debajo de la función $f(x) = ax^2$ pero también lo puede llevar a generalizar que hace lo mismo con $f(x) = ax^2 + bx + c$.

De las secciones anteriores, se puede evidenciar que los estudiantes, en general, presentan dificultades en la articulación entre las distintas formas de representación funcionales, con mayor tendencia cuando se realiza entre la representación gráfica y la representación algebraica; además se les dificulta el significado de los distintos coeficientes y su afectación en las distintas propiedades de la función cuadrática.

■ Metodología

Esta investigación es de corte cualitativo con un enfoque descriptivo, ya que define y clasifica los errores y dificultades que evidencian estudiantes de décimo año de la educación secundaria costarricense.

Para el desarrollo de la investigación se elaboraron dos cuestionarios. El primero de ellos, con el objetivo de describir las dificultades y errores que han identificado algunos docentes de Matemática, de la educación secundaria, al momento de enseñar la función cuadrática. Dicho cuestionario se basó, principalmente, en las habilidades específicas, de la función cuadrática propuestas en el Programa de Estudios de Matemática del MEP y los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para la consecución de dichas habilidades. Por otro lado, el segundo cuestionario se aplicó a estudiantes de décimo año con el fin de detectar y conocer otros errores o dificultades que no mencionaran los docentes en el primer cuestionario.

Los participantes a los cuales se les aplicó el cuestionario fueron treinta profesores de Matemática de educación secundaria, con al menos dos años de experiencia impartiendo décimo año, de los cuales al menos en uno debía haber seguido el actual Programa de Estudios de Matemática del MEP, el cual fue aprobado en 2012. Los docentes fueron escogidos a través de una muestra por conveniencia, se seleccionaron profesores de las regiones educativas Heredia y San José Central, debido a que en dichas zonas se recibieron una mayor cantidad de capacitaciones relacionadas con la aplicación del actual Programa de Estudios del MEP. Además, como no se tenía interés en inferir a la población, se consideró trabajar con una muestra no probabilística, por lo que treinta entrevistados era un número adecuado para aportar información valiosa sobre las dificultades y errores que se han detectado en los estudiantes costarricenses de la educación secundaria al estudiar la función cuadrática.

Para la validación del cuestionario aplicado a los docentes se realizaron dos etapas. La primera, por medio de juicio de expertos, utilizando una rúbrica de evaluación para este fin, donde se detallaban aspectos como: redacción, conexión con las habilidades específicas propuestas por el MEP, coherencia del ítem con la escala utilizada y por último, algunas observaciones generales o recomendaciones. Los expertos fueron cuatro profesores de Matemática, dos de ellos tenían relación con educación secundaria y los otros dos con educación universitaria. La segunda parte de la validación se realizó mediante una prueba piloto, la cual se aplicó a diez docentes de Matemática de educación secundaria que no eran parte de la muestra.

El segundo cuestionario se diseñó considerando algunas de las habilidades propuestas en el Programa de Estudios de Matemática del MEP que se encuentra en vigor, consistió en una serie de ejercicios y problemas relacionados con la función cuadrática. Se aplicó a setenta y seis estudiantes de décimo año, con edades que oscilan entre los 15 y 16 años, estos fueron seleccionados por conveniencia, dado que los investigadores contaban con facilidad de contacto con los mismos y disponían de las lecciones de Matemática para la aplicación de los cuestionarios. La aplicación de este segundo cuestionario se realizó luego de que los estudiantes abordaron en sus clases el tema de función cuadrática.

■ Resultados

En cuanto al cuestionario que se aplicó a los estudiantes; inicialmente, se revisó uno a uno los setenta y seis cuestionarios aplicados, dentro de los cuales se señalaron y anotaron el tipo de error encontrado, posteriormente se contabilizaron y categorizaron. Además se categorizaron los errores descritos por los docentes en el cuestionario respectivo.

En la siguiente tabla se presenta una descripción de los errores detectados por medio de los cuestionarios aplicados (docentes, estudiantes); además se categorizan de acuerdo con lo expuesto por Abrate et al. (2006) en el marco teórico de este artículo.

Tabla 1. Errores presentes en el aprendizaje de la función cuadrática

Categorización de los errores	Errores encontrados
Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales	a. Mal empleo de la ley de signos en la realización de operaciones básicas en el conjunto de los números reales. b. Omite el signo de un número negativo al remplazarlo en la fórmula de las coordenadas del vértice. En la figura 1 puede observarse un ejemplo de este tipo de error.
Errores debidos a asociaciones incorrectas	a. Cálculo incorrecto de potencias de la forma $-a^2$ en confusión con $(-a)^2$
Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática.	<ul style="list-style-type: none"> • Ubicación incorrecta de pares ordenados en el plano cartesiano. En la figura 2 se presenta un ejemplo de este error. • Errores al aplicar métodos de factorización. • Error algebraico al resolver ecuaciones lineales. • No identifica a, b y c dado el criterio de la función. • No asocia el signo del discriminante con la cantidad de intersecciones de la función con el eje x. • No distingue que determina cada variable del criterio en su representación gráfica. • Dada la representación gráfica de una función cuadrática, determina de forma incorrecta pares ordenados que pertenecen a la misma. • Confunde el intervalo de crecimiento con el de decrecimiento. • Ubica pares ordenados en un eje cartesiano, pero no traza correctamente la parábola. • Dada la representación gráfica de una función cuadrática al determinar el criterio de la misma, utiliza la fórmula de la pendiente • Calcula el vértice de la representación gráfica de una función cuadrática pero no determina el ámbito y los intervalos de monotonía o lo realiza de forma incorrecta.

Fuente: Elaboración propia basados en los cuestionarios aplicados a estudiantes y docentes

Se ejemplifican a continuación algunos de los errores citados en la Tabla 1, en la primera de las figuras se presenta una omisión de signos.



Figura 1. Error relacionado con la omisión de signos.

En la figura 2 se presenta otro de los errores evidenciados, correspondiente a un conocimiento previo que es necesario para realizar correctamente la representación gráfica de una función, como lo es la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano. En la siguiente imagen se puede observar dicho error, dado que calcula el vértice, pero no es capaz de ubicarlo adecuadamente; así mismo, se observa una confusión en el cálculo de la ordenada del vértice, porque realiza $y = \frac{-\Delta}{2a}$ en lugar de $y = \frac{-\Delta}{4a}$.

vértice, porque realiza $y = \frac{-\Delta}{2a}$ en lugar de $y = \frac{-\Delta}{4a}$.

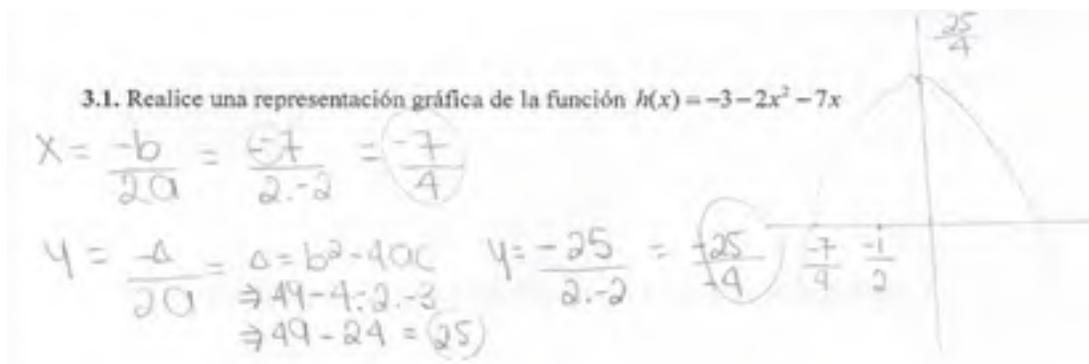


Figura 2. Error relacionado con la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano.

Además, de la información en la Tabla 1 se puede inferir que casi la totalidad de los errores corresponden a deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos. Algunos de ellos, de acuerdo con el currículo de Matemática costarricense, corresponden a conocimientos previos como lo son métodos de factorización, resolución de ecuaciones cuadráticas y ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano. Por otro lado, se presentan errores relacionados con el concepto de función, como lo es el distinguir entre abscisas y ordenadas, la comprensión del concepto de monotonía, el dominio de las fórmulas para determinar las coordenadas del vértice de una función cuadrática y la interpretación de la influencia que ejerce en la representación gráfica de una función los parámetros de la representación algebraica.

Por otro lado, para determinar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver tareas relacionadas con la función cuadrática se aplicó el cuestionario a docentes. El cuestionario constaba de una serie de procedimientos relacionados con los aspectos matemáticos, determinados por los autores de este escrito, necesarios para la consecución de cada habilidad específica establecida en el Programa de Estudios del MEP para la función cuadrática.

En el cuestionario los docentes debían indicar la frecuencia con que sus estudiantes realizaban el procedimiento descrito, siendo 5: siempre, 4: casi siempre, 3: algunas veces, 2: casi nunca y 1: nunca. Para efectos de esta investigación, se consideró como dificultad presente a aquellos procedimientos cuyo puntaje otorgado por los docentes fuese menor a noventa. Debido a que el puntaje asignado por los docentes cuando un estudiante realiza algunas veces una determinada actividad es de tres puntos, al ser treinta cuestionarios, si todos seleccionaran la categoría algunas veces, el puntaje total sería noventa. Por lo que, si el puntaje es menor a noventa es porque la mayoría de los profesores asignó puntajes menores a tres, lo que quiere decir que indicaban que sus estudiantes nunca o casi nunca lograban realizar dicho procedimiento, por lo que se infiere que ahí se presentaba una dificultad.

En la siguiente tabla se muestran aquellas acciones en las que, por su puntaje, se determinó que se presenta alguna dificultad.

Tabla 2. Dificultades presentes en el aprendizaje de la función cuadrática

Dificultades detectadas por los profesores	Puntaje obtenido
Determina los intervalos de monotonía a partir del criterio de la función	90
Determina los intervalos de monotonía a partir de la representación gráfica de la función	88
Tiene un manejo adecuado de operaciones algebraicas y aritméticas al resolver ecuaciones cuadráticas	87
Determina los intervalos donde la función es positiva o negativa en la representación gráfica	86
Plantea problemas que involucren funciones cuadráticas	84
Diferencia entre intervalos de monotonía y los intervalos donde la función es positiva o negativa	83
Dada la función cuadrática que modela un problema en un contexto real es capaz de extraer conclusiones a partir de ella	80
Resuelve ejercicios que involucren implícitamente las ecuaciones de segundo grado.	80
Calcula el ámbito de la función cuando el dominio no es \mathbb{R} .	79
Determina a partir de la representación gráfica los valores de “a”, “b” y “c”	78
Plantea funciones cuadráticas para modelar problemas en contextos reales	75
Obtiene el mayor intervalo donde la función es inyectiva	74

Fuente: Elaboración propia a partir de los cuestionarios aplicados a los docentes

En la Tabla 2 se puede observar que existen diversas dificultades. Algunas de ellas están relacionadas con los intervalos de monotonía, en primera instancia al determinar los intervalos de monotonía a partir del criterio de la

función y luego al determinar los intervalos de monotonía a partir de la representación gráfica de la función. Esto podría indicar que no existe comprensión de lo que son los intervalos de monotonía ni del cómo aplicar las fórmulas en el caso del criterio de la función, estas son las dificultades que se presentan en menor medida ya que están con puntaje cercano al 90.

Además, se evidencian dificultades relacionadas con el manejo inadecuado de operaciones algebraicas y aritméticas al resolver ecuaciones cuadráticas, que corresponden a conocimientos previos necesarios de acuerdo con el currículo de Matemática costarricense.

Por otro lado, se puede evidenciar que los cuatros procedimientos con menor puntaje, es decir, aquellos en los que la mayoría de los docentes indicaron que casi nunca o nunca logran realizar sus estudiantes, corresponden a habilidades que requieren de análisis más allá de simplemente aplicar fórmulas; es decir que conllevan una integración de diferentes procedimientos y conceptos, se vuelve indispensable el paso de una representación a otra, el conocimiento de fórmulas y el dominio de conceptos propios de las funciones, entre otras.

Algunas situaciones que corresponde a lo expresado anteriormente son: calcular el ámbito de una función cuadrática cuando su dominio está acotado, o plantear una función cuadrática que modele una situación de un contexto real. Lo anterior es preocupante, porque son habilidades que incentivan el desarrollo de capacidades cognitivas superiores y la resolución de problemas en diversos contextos, lo cual es perseguido por el currículo costarricense.

■ Conclusiones

Este estudio evidencia la variedad de dificultades y errores que pueden presentarse en el proceso de aprendizaje de la función cuadrática. La cual corresponde a una de las funciones elementales que se abordan en la educación preuniversitaria. Los resultados reportados en este escrito permitieron, a los autores del mismo, la elaboración de tareas cuya intencionalidad era exponer a los estudiantes ante las situaciones en las que usualmente se presentan mayores dificultades y errores.

Esta investigación brinda, a la comunidad de docentes de matemáticas, elementos para considerarse al momento de planificar la enseñanza de este tópico y para la elaboración de los materiales didácticos a utilizar.

El conocer sobre los errores y dificultades que se presentan en el aprendizaje de un determinado tópico matemático permite la creación de tareas más provechosas, ya que en lugar de evitar que los estudiantes se enfrenten a ciertas dificultades, lo que se debe hacer es exponerlos a las mismas. Así, por ejemplo, uno de los principales errores en el aprendizaje de la función cuadrática corresponde al paso de una representación matemática a otra, por lo que, dentro de las tareas matemáticas se solicita dicho proceso, con el objetivo de ir disminuyendo los errores que se comenten al realizar esta acción.

A manera de cierre, y en concordancia con lo expresado anteriormente, se recomienda a los docentes de matemática encargados de la enseñanza de la función cuadrática, no solo solicitar la representación algebraica de la función, sino también su representación gráfica; esto expondrá al estudiante a la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano y a la resolución de ecuaciones cuadráticas para determinar la intersección con los ejes coordenados.

■ Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>

- Arias, I. y González, Y. (2016). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica*. (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica.
- Córdoba, L., Díaz, M., Haye, E. y Montenegro, F. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En Y, Morales y A, Ramírez (Eds.) *I CEMACYC Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. (pp. 1-13). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC. Recuperado de <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf>
- Huang, X., Li, S. & An, S. (2012). Understanding of Teaching Strategies on Quadratic Functions in Chinese Mathematics Classrooms. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 16 (3), 177-194.
- Lupiáñez, J.L. (2013). Análisis Didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 81-101). Granada, España: Editorial Comares, S.L.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(33), 11-27. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf>.
- Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Editorial Comares, S.L.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori, Barcelona. Recuperado de [http://face.uasnet.mx/zona/mochis/recursos_web/alumnos/semestre2/procesoAprendizajeMatematicas/tema2%20obstaculos%20en%20la%20ense+anza%20\(1%20a%20la%2018\).pdf](http://face.uasnet.mx/zona/mochis/recursos_web/alumnos/semestre2/procesoAprendizajeMatematicas/tema2%20obstaculos%20en%20la%20ense+anza%20(1%20a%20la%2018).pdf)