

CONCEPÇÕES E REPRESENTAÇÕES DE VETORES EM LIVROS DIDÁTICOS DE ENGENHARIA

CONCEPTIONS AND REPRESENTATIONS OF VECTORS IN DIDACTIC ENGINEERING TEXT BOOKS

Celso Luiz Andreotti, Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN (Brasil)
celso.andreotti@hotmail.com, elisa.gal.meg@gmail.com, lgxbarros@hotmail.com

Resumo

Tem-se como objetivo neste trabalho investigar abordagens conceituais e tipos de registro de representação semiótica utilizados para os vetores em livros didáticos dos cursos de Engenharia. Trata-se de uma pesquisa documental cujos fundamentos teóricos apoiam-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e os procedimentos metodológicos orientam-se pela análise de conteúdo de Bardin. Constatamos que representações vetoriais privilegiadas em livros da área de Matemática não são as mais utilizadas, necessariamente, nos livros técnico-científicos e o contrário ocorre com a representação algébrica trigonométrica, amplamente utilizada nos textos das áreas técnicas e pouco explorada nos da área de Matemática.

Palavras-chave: conceito de vetor. representações semióticas. livros didáticos de engenharia

Abstract

The aim of this work is to investigate conceptual approaches and types of semiotic representations registers used for vectors in textbooks of the Engineering courses. This is a documental research whose theoretical foundations are based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representations and methodological procedures are guided by Bardin's content analysis. We note that vector representations privileged in Mathematics textbooks are not necessarily the most used ones, in technical-scientific textbooks and the opposite occurs with the trigonometric algebraic representation, widely used in texts of technical areas and little explored in Mathematics.

Key words: vector concept. semiotic representations. engineering textbooks

■ Introdução

O conceito de vetor está presente em diversas disciplinas do curso de Engenharia e é significativa e relevante sua importância para as disciplinas de Física, Mecânica Aplicada, Mecânica Geral, Resistência dos Materiais, Vibrações Mecânicas, entre outras. O interesse por esta pesquisa nasce, especialmente, das observações cotidianas das dificuldades apresentadas pelos estudantes nas operações vetoriais que exigem o domínio de conceitos básicos da Matemática, das diversas possibilidades de representação desse objeto e das habilidades e conhecimentos necessários que permitem a passagem de uma forma de representação para outra.

Poynter e Tall (2005) traçaram estratégias de abordagem do conceito de vetor no intuito de facilitar o processo de ensino e de aprendizagem, levando em consideração os efeitos das experiências físicas que lançam luz sobre uma nova maneira de compreender este objeto. Segundo os autores, a maneira como o conceito de vetor é construída, a partir de ideias físicas, facilita o acesso ao objeto matemático, o que conseqüentemente fortalece a ponte entre a representação semiótica e o conceito de vetor. Os autores observam ainda que o conceito de vetor desenvolvido pela Física, como representante de força e aceleração e está diretamente ligado ao movimento, enquanto que a Matemática o relaciona, por exemplo, com a ideia de translação. Estudaram problemas cognitivos advindos destas diferentes abordagens e testaram um conceito mais próximo ao de vetor livre, que está relacionado ao efeito da ação física de translação.

Watson, Spirou e Tall (2003) observam que a aprendizagem de vetores deve ocorrer numa região entre a teoria da corporificação e o simbolismo matemático e explorar o aspecto dinâmico da representação por uma flecha que corporifica tanto a sensação de movimento dinâmico como o conceito da própria flecha como um objeto matemático em si, associado à translação. Os autores exploram os aspectos conceituais de vetor, de acordo com as características pertinentes a cada um dos três mundos da Matemática. Da Física tem-se o conceito de força e os efeitos que ela pode causar no mundo real e, ainda, a ideia mais forte envolvida nesse contexto, que é a possibilidade de que esses efeitos possam ser sentidos ou corporificados, e principalmente emprestados para construir o conceito do objeto matemático vetor. Consideram que essa característica torna o mundo corporificado, com seus aspectos físicos, bastante importante para o processo de aprendizagem desse conceito por parte do aluno.

A noção de vetor no ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, a partir da concepção, realização e análise de uma sequência didática que tem por objetivo explorar a articulação entre os registros de representação de vetores é explorada por Castro (2001). A representação semiótica de vetores e a conversão entre as representações envolvendo o registro gráfico, foram apontadas pela autora como as principais dificuldades encontradas pelos alunos, sobretudo quando o registro gráfico era o de chegada. Patrício (2011) tratou das dificuldades dos alunos de Licenciatura em Matemática, com relação à produção, ao tratamento e à conversão das representações semióticas de vetores. Observou que o planejamento e a abordagem do conceito de vetor, feita para o Ensino Médio, que o utiliza apenas no plano, como ferramenta para o estudo da cinemática, dinâmica e estática, entre outros, pode ser uma das origens das dificuldades enfrentadas pelos alunos. Por outro lado, na nossa experiência no ensino superior, constatamos que a representação algébrica trigonométrica para os vetores é amplamente explorada nos textos especializados nas disciplinas das Engenharias, e somam-se às dificuldades já mencionadas aquelas advindas do conhecimento dos conteúdos de Trigonometria.

Encontramos em Duval (2006, 2011a, 2011b) o aporte teórico para orientar nosso olhar e analisar as possibilidades de registros de representação para os vetores nos livros didáticos de disciplinas das áreas de Matemática, Física e áreas técnicas da Engenharia. O livro didático é uma fonte de estudo e consulta e, portanto, justifica-se investigar como os autores exploram as concepções e a diversidade de registros de representações semióticas para vetores levando em consideração as três atividades cognitivas destacadas pela teoria adotada: a produção, o tratamento e a conversão dessas representações. Nesta pesquisa de caráter documental, orientada pela análise de conteúdo proposta por Bardin (1977), os dados foram selecionados nos livros didáticos de forma fornecer subsídios para as respostas

a questões relativas à abordagem adotada para o conceito de vetor e aos tipos de representação semiótica explorados nos textos ao longo da teoria e problemas propostos.

■ Marco teórico

Os tipos de registros de representações semióticas encontrados em livros didáticos para tratar do objeto matemático vetor, das operações, dos tratamentos e das conversões realizadas entre as diferentes representações, levaram à escolha da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. Segundo Duval, as representações semióticas são fundamentais para os processos cognitivos do pensamento matemático e para a própria produção de conhecimento e “[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois tipos de registros de representações semióticas” Duval (2011a, p.14). Os tipos de registro considerados por Duval compreendem: registros em língua natural, registros figurais, registros simbólicos e registros gráficos, como apresentados na Figura 1. Para os vetores, no âmbito de cada um dos tipos de registro, destacamos, na Figura 1, exemplos correspondentes às representações que denominaremos: representação em língua natural, representações geométricas, representações algébricas vetorial, em coordenadas, trigonométrica e módulo-ângulo e representações gráficas. Deixaremos de lado as representações algébricas matriciais que estenderiam nossa pesquisa a um numero muito maior de livros texto e ampliaria o número de áreas da Engenharia a serem consideradas.



Figura 1: Classificação das representações semióticas utilizadas nesta pesquisa.

Fonte: Acervo pessoal.

Nos utilizaremos das informações da Figura 1 para a análise dos dados obtidos a partir do levantamento realizado tendo como fonte os textos das disciplinas dos cursos de engenharia, nas áreas matemática e técnica.

No exercício da atividade matemática, Duval considera também dois tipos de transformações que são realizadas no âmbito das representações semióticas: o tratamento, que ocorre mantendo o tipo do registro utilizado, e a conversão, que relaciona diferentes tipos de registro de representação. No recorte dos dados escolhido para análise não levaremos em conta essas transformações, daremos ênfase à abordagem conceitual e os tipos de representação mobilizados pelos autores.

■ Método

A coleta e análise de dados foram delineadas a partir do método da análise de conteúdo proposto por Bardin (1977), adaptada a esta pesquisa. Na fase de pré-análise, selecionamos onze livros didáticos dentre os adotados em disciplinas de Matemática ou técnico-científicas do currículo de Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção, livros esses que são de autores reconhecidos no meio acadêmico e indicados com frequência nas bibliografias básica ou complementar dos Planos de Ensino e Aprendizagem de instituições de ensino das rede pública e privada do estado de São Paulo - Brasil. Seis dos livros selecionados, que denotamos Livros 1 a Livro 6, são destinados a disciplinas da área de Matemática (Vetores e Geometria Analítica ou Álgebra Linear) e cinco, denotados Livros 7 a Livro 11, a disciplinas das áreas técnicas (Física - 2, Mecânica para Engenharia – 2 e Resistência de Materiais).

Na exploração do material, estabelecemos os aspectos do objeto matemático vetor a serem considerados relevantes e, finalmente, os categorizamos com a finalidade de orientar a análise de conteúdo dos livros didáticos em nossa pesquisa. Consideramos para esse trabalho:

- 1) Conceito de vetor estabelecido nos livros didáticos da Engenharia;
- 2) Representações semióticas utilizadas para os vetores.

Observamos que, nos livros de Matemática, Física e Engenharia selecionados, alguns símbolos e notações adotados apresentam algumas diferenças que mencionaremos quando forem relevantes. Este fato acrescenta um grau a mais na complexidade da produção dos registros de representação, no caso do nosso interesse específico voltado para os vetores.

■ Análise dos dados

Apresentaremos inicialmente a análise dos dados no que diz respeito à abordagem do conceito de vetor, primeiramente nos livros de Matemática e depois nos livros das disciplinas técnico-científicas da Engenharia e verificar como o objeto vetor é explorado em ambas as áreas e como são estabelecidas as ligações entre os diferentes aspectos dessas distintas abordagens feitas para o mesmo objeto.

Destacamos a seguir, nas Figuras 2 a 4 algumas das definições contidas nos Livros de 01 a 06, da área de Matemática.

Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor que tem (A, B) como representante será indicado por \vec{AB} . Quando não se quer destacar nenhum representante em especial, usam-se letras latinas minúsculas com uma seta ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{d}, \vec{b}, \vec{x}$ etc.). O conjunto de todos os vetores será indicado por V^2 .

Figura 2: Definição de vetor.

Fonte: Livro 01, p.6.

Figura 3: Definição de Vetor

Fonte: Livro 08, p.13

Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor que tem (A, B) como representante será indicado por \vec{AB} . Quando não se quer destacar nenhum representante em especial, usam-se letras latinas minúsculas com uma seta ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{d}, \vec{b}, \vec{x}$ etc.). O conjunto de todos os vetores será indicado por V^2 .

Figura 4:

Definição de vetor.

Fonte: Livro 06, p.2.

Nos Livros de 01 a 06, constatamos que o conceito de vetor é em geral abordado rapidamente de maneira intuitiva, destacando os conceitos de grandezas escalares e vetoriais, lembrando o uso da representação de uma força por meio de uma flecha e estabelecendo as noções iniciais de vetor preferencialmente, em todos os textos, por meio da representação geométrica. Em geral, os textos apresentam o conceito de vetor a partir do conceito geométrico de segmento orientado e passam imediatamente à definição formal. Pouca ênfase é dada à contextualização ou aos aspectos dinâmicos ou corporificados, associados às translações, aos movimentos, às forças, aspectos considerados por Poynter e Tall (2005) e Watson, Spirou e Tall (2003) como importantes para a compreensão e aprendizagem do conceito.

Nos Livros 7 e 8, da área de Física, são destacados as grandezas vetoriais e o vetor como a ferramenta para representá-las; no Livro 7, ressalta-se informalmente a possibilidade de deslocar o segmento orientado por translação, como vemos na Figura 5.

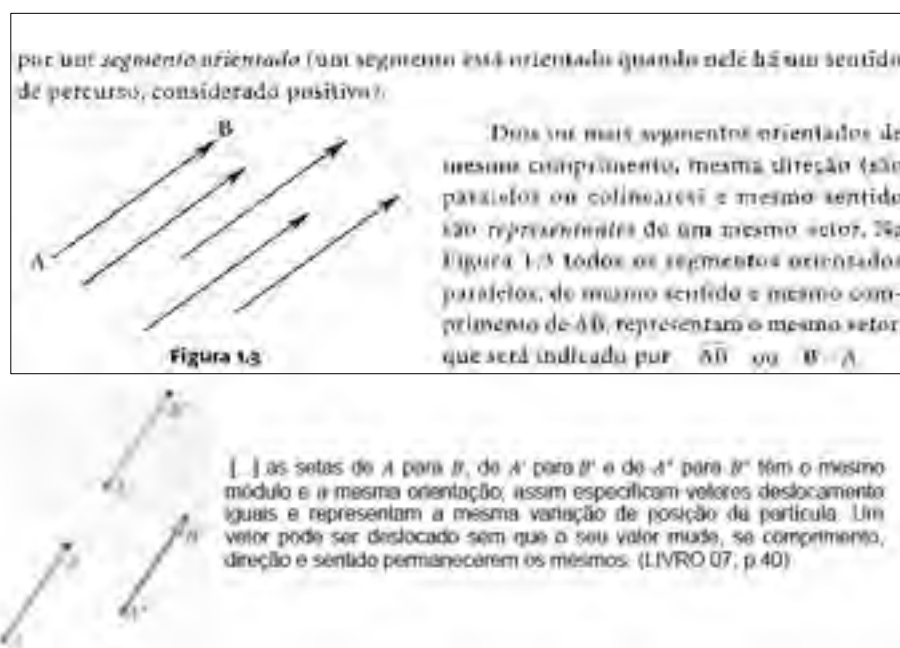


Figura 5: Representantes de um mesmo vetor.
Fonte: LIVRO 07, p.40.

Na Figura 6 trazemos uma abordagem do Livro 8 com características que podemos considerar corporificadas, conforme Watson, Spirou e Tall (2003).



Figura 6: Conceito de magnitude (módulo ou norma) de um vetor.
Fonte: 08, p.13

Ambos os textos dão ênfase às representações algébricas trigonométrica ou módulo-ângulo, como na Figura 7 e apresentam, em apêndices, “tutoriais matemáticos” que resumem os elementos de Trigonometria desde as razões trigonométricas no triângulo retângulo até as funções trigonométricas e suas inversas.

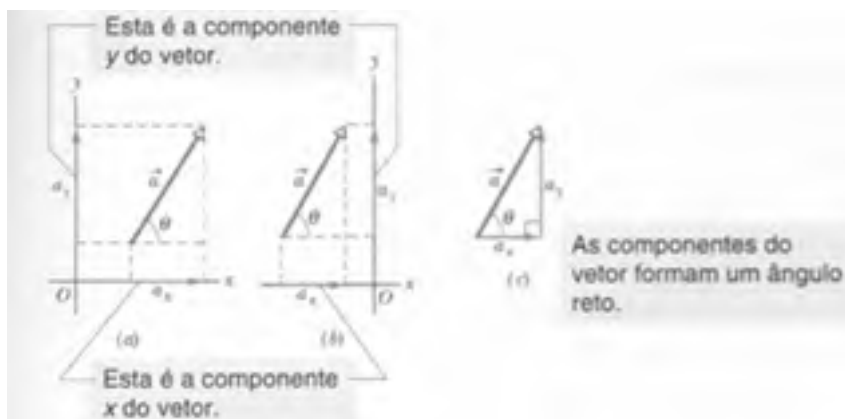


Figura 7: Decomposição de um vetor no plano em suas componentes.
Fonte: LIVRO 07, p.43.

Encontramos referências à representação algébrica vetorial nos Livros 7 e 8, conforme a Figura 8.

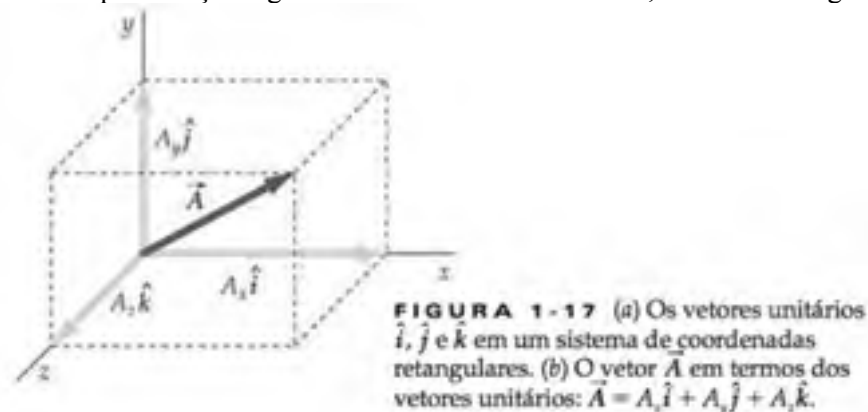


Figura 8: Representação vetorial na base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.
Fonte: LIVRO 08, p.19.

Não há nos Livro 9 a 11, todos do mesmo autor, uma definição formal de vetor; o conceito é introduzido por meio de sua representação geométrica, sem preocupação em mostrar que uma “flecha” é apenas um representante de uma classe infinita de segmentos orientados. sua representação geométrica e seus elementos, conforme Figura 9. A direção é estabelecida considerando inicialmente o ângulo com uma reta horizontal, mas verificamos que também pode ser tomada como referência a direção vertical. A notação para vetor, neste livro, é dada por meio de letras em negrito, como \mathbf{A} , e sua intensidade (módulo) sem negrito, como A .



Figura 9: Representação geométrica de vetor e seus elementos.
Fonte: LIVRO 09, p.11.

Nos Livros 10 e 11 encontramos a utilização dos vetores diretamente relacionada às aplicações, como já mencionado. Apresentamos na Figura 10 um exemplo no qual o conceito de vetor é utilizado para a solução e as representações mais comumente identificadas em ambos os textos.

(a)

Exemplo 13.1

A caixa de 50 kg mostrada na Figura 13.6a repousa sobre uma superfície horizontal para a qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_k = 0.3$. Se a caixa está sujeita a uma força de tração de 400 N como mostrado, determine a velocidade da caixa após 3 s partindo do repouso.

Diagrama do corpo livre

O peso da caixa é $W = mg = 50 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}$. Como mostrado na Figura 13.6b, a força de atrito tem uma intensidade de $F = \mu_k N_c$ e atua para a esquerda, visto que ela se opõe ao movimento da caixa. Supõe-se que a aceleração a atua horizontalmente, na direção x positiva. Há duas incógnitas, a saber, N_c e a .

Equações de movimento

Utilizando os dados mostrados no diagrama do corpo livre, temos:

$$\sum F_x = ma_x \quad 400 \cos 30^\circ - 0.3N_c = 50a \quad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad N_c - 490.5 + 400 \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

Solvando a Equação 2 para N_c , substituindo o resultado na Equação 1 e resolvendo para a , resulta em:

$$N_c = 290.5 \text{ N}$$

$$a = 5.185 \text{ m/s}^2$$

(b)

Figura 13.6

Figura 10: Exemplo-utilização das representações algébricas módulo-ângulo e trigonométrica.
Fonte: LIVRO 10, p.90.

A análise dos dados coletados nos livros aponta para uma convergência em relação à introdução do conceito de vetor por meio de uma abordagem geométrica e para uma divergência nas representações utilizadas no que se refere às aplicações do conceito. De um lado, os autores dos livros de Matemática privilegiam o uso de representações algébricas, sobretudo em coordenadas, algumas vezes, vetorial; as representações algébricas trigonométrica e módulo-ângulo não são evocadas nas considerações teóricas, nos enunciados, ou nas resoluções dos problemas.

Por outro lado, os autores dos livros de Física e, também, dos livros técnico-científicos diversificam as representações, tanto no tratamento teórico quanto na resolução de problemas, com presença expressiva das representações algébrica-trigonométrica e módulo-ângulo, e das representações figurais geométrica e gráfica. A representação algébrica-trigonométrica é largamente utilizada nos processos de resoluções dos problemas, assim como as operações de tratamento e conversão; isto é, na parte teórica dos livros de Física observa-se o cuidado em mostrar como se transita de uma representação gráfica ou de uma representação com módulo e ângulo de um vetor para a sua representação algébrica trigonométrica, ou seja, o processo de cálculo das componentes vetoriais por

meio da aplicação das razões trigonométricas e, também, partindo dessa última representação para a representação algébrica vetorial.

Nos livros das disciplinas técnico-científicas é fato que a finalidade não é considerar os vetores como objetos matemáticos, mas como ferramenta para se chegar à solução de problemas específicos das áreas técnicas. Nas disciplinas técnico-científicas, assim como na Física, fica evidenciado pelas análises, tanto da parte teórica como dos problemas propostos, que os conceitos trigonométricos são fundamentais para a produção da representação de vetor mais frequentemente utilizada, e também para as operações envolvidas nos cálculos necessários às resoluções de problemas, assim como para as mudanças necessárias de representações, conforme a demanda para as resoluções dos problemas. Nos livros de Matemática (1 a 6), os conceitos trigonométricos não são abordados para a produção de uma representação algébrica trigonométrica, e as considerações sobre ângulos aparecem somente relacionadas ao produto escalar.

■ Conclusões

Devemos lembrar que a primeira abordagem de vetores para os estudantes acontece no Ensino Médio, exclusivamente nas aulas de Física e sob um único ponto de vista, o geométrico, pois, de acordo com as orientações curriculares, vetores não fazem parte do conteúdo de Matemática.

A abordagem geométrica para conceituar o vetor no Ensino Superior é encontrada em praticamente todos os livros. Nos livros de Matemática essa conceituação geométrica encontra-se preferencialmente como elemento introdutório. De um lado, os autores dos livros de Matemática (1 a 6) privilegiam, na prática, o uso de representações algébricas, sobretudo em coordenadas, não evidenciando representações algébricas módulo-ângulo ou trigonométrica nos enunciados e nas resoluções propostas. Por outro lado, os autores dos livros de Física e, também, dos livros técnico-científicos diversificam as representações, com presença expressiva das representações geométricas, gráficas, algébricas módulo-ângulo ou trigonométrica, nos enunciados ou nas resoluções dos problemas propostos. As representações algébricas módulo-ângulo ou trigonométrica são largamente utilizadas nos processos de resoluções dos problemas. Nos livros de Física, ressalta-se o fato de que as representações em língua natural são praticamente um terço de todas as representações identificadas nos enunciados pela própria característica dos problemas, que é de descrição dos fenômenos envolvidos, necessitando análise e interpretação do texto, a partir do qual se extrai as informações iniciais, em nosso caso específico, sobre vetores. Embora os enunciados apresentem poucas representações geométricas ou gráficas, as resoluções evidenciam a presença desses tipos de representações, associadas às representações trigonométricas.

Ante a esses pontos de vista, observamos que tanto os autores dos livros de Matemática como os dos livros de Física e Técnico-científicos, desenvolvem os conceitos de vetores e as produções de suas representações de forma bastante independentes.

Observamos que os livros didáticos de disciplinas de Matemática não contemplam elementos relativos aos vetores a serem posteriormente utilizados nas disciplinas dos cursos de Engenharia, com relação a abordagem e representações do objeto matemático vetor. Destacamos esse ponto baseados nos dados levantados nas partes teóricas e nos problemas propostos nos livros didáticos examinados, que demonstram, por sua vez, a baixa exploração das representações geométricas e gráficas e, principalmente, a ausência da Trigonometria nas representações de vetores que, como já mencionado, traz elementos essenciais e de ampla utilização nas engenharias.

Verificamos, nesse estudo, a necessidade de reforçar efetivamente, em disciplinas da Engenharia, como Cálculo e Geometria Analítica, a exploração dos conceitos de Trigonometria, visando a convergência dos objetivos estabelecidos nos livros didáticos da Matemática e nos livros didáticos das áreas técnicas, e, a partir daí, chegar a

uma uniformização das representações de vetores, incluindo símbolos e notações utilizadas, de forma a termos mais proximidade entre as disciplinas de Matemática e as disciplinas das áreas técnicas. Consideramos importante uma abordagem de vetor que não fique somente no contexto matemático, mas que leve em conta os aspectos e necessidades relacionados aos pontos de vista de aplicações de outras ciências, como a Física e a Engenharia.

■ Referências

- Bardin, I. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa, Portugal: edições 70
- Castro, S. C. (2011). Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Puc-sp.São Paulo.
- Duval, R. (2011). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S.D.A. *aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. 8ª ed. Campinas: Papirus
- Duval, R. (2011b). *Ver e ensinar a matemática de outra forma – entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem editora.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 61, 103-131
- Patrício, R. (2011). As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação de mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará – pa.
- Poynter, A. e Tall, D. (2005). What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching. *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick* (128-135).
- Watson, A., Spyrou, P. e Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*, 1(2), 73-97.