JUSTIFICACIÓN Y EXPRESIÓN DE LA GENERALIZACIÓN DE UNA RELACIÓN FUNCIONAL POR ESTUDIANTES DE CUARTO DE PRIMARIA[xvi]

Justification and expression of the generalization of a functional relationship by fourth grade students

Ayala-Altamirano, C.[a] y Molina, M.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

Analizamos las respuestas de un grupo de estudiantes de cuarto de primaria (9 a 10 años) al resolver una tarea que involucra la función f(x)=2x. Presentamos el análisis de las discusiones entre los estudiantes y el investigador-docente que tienen lugar durante dos sesiones de clases en el marco de un experimento de enseñanza. En los resultados se aprecia cómo la justificación ayudó a expresar de modos más sofisticados la generalización de las relaciones funcionales identificadas. Concretamente el intercambio de ideas ayudó a que la expresión de las generalizaciones fuera cada vez más precisa, involucrara diversos elementos matemáticos y se refiriera a cantidades indeterminadas para expresar la relación entre las variables.

Palabras clave: *Educación primaria, generalización, justificación.*

Abstract

We analyse the responses of a group of fourth-grade students (9 to 10 years old) when solving a task that involves the function f(x)=2x. We present the analysis of the discussions between the students and the researcher-teacher that took place during two sessions within the framework of a classroom teaching experiment. The results show how justifications helped to express the generalization of the identified functional relationships in more advanced ways. The exchange of ideas specifically helped to make the expression of generalizations more precise, to include various mathematical elements and to refer to undetermined quantities to express the relationship between the variables.

Keywords: *Elementary education, generalization, justification.*

INTRODUCCIÓN

Adoptando lo propuesto por Radford (2018), consideramos que el pensamiento algebraico se caracteriza por referir a cantidades indeterminadas (incógnitas, variables y los parámetros) y razonar de manera analítica con estas, recurriendo a modos idiosincráticos o específicos evolucionados culturalmente para representar la indeterminación y sus operaciones. El manejo analítico de los objetos indeterminados implica que, aunque no se conozcan las cantidades, se utilizan como si fueran conocidas. El modo de designar a lo indeterminado puede ser variado, involucrando el simbolismo alfanumérico u otros símbolos: lenguaje natural, gestos, ritmos, entre otros. Por otro lado, distinguimos cuatro prácticas del pensamiento algebraico identificadas por Blanton y colaboradores (Blanton, 2017): (a) generalización (b) representación, (c) justificación y (d) razonamiento con generalizaciones.

En este marco, una línea de investigación abierta que mencionan estudios previos es indagar en los tipos de tareas que alientan a los estudiantes a analizar variedad de generalizaciones y

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2019). Justificación y expresión de la generalización de una relación funcional por estudiantes de cuarto de Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 183-192). Valladolid: SEIEM.

justificaciones que utilizan otros estudiantes (Lannin, 2005) e identificar tipos de apoyo curricular e instructivo que ayuden a los maestros a crear un entorno de andamiaje para el desarrollo de justificaciones sofisticadas. Nuestro propósito en este trabajo es analizar una propuesta de enseñanza basada en prácticas de justificación llevadas a cabo al resolver tareas que involucran una relación funcional, así como describir cómo la discusión e intercambio de ideas entre los estudiantes ayuda a expresar de modo algebraico la relación entre cantidades que covarían. A su vez buscamos extender al contexto funcional, los hallazgos de otras investigaciones las cuales señalan que la justificación permite que la generalización tenga sentido, anima a los estudiantes a establecer conjeturas para establecer generalizaciones y ayuda a desarrollar una generalización más potente (Ellis, 2007a).

Otras investigaciones informan sobre las estrategias de estudiantes de primaria al resolver problemas de generalización de patrones o relaciones funcionales. Por ejemplo, Callejo, García-Reche y Fernández (2016) y Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016) en sus estudios analizan las respuestas escritas de estudiantes al expresar la generalización. En esta comunicación, buscamos complementar dichos estudios al indagar sobre el proceso de generalización analizando las discusiones en las que los estudiantes justifican sus respuestas escritas y, a su vez, describir el efecto del intercambio de ideas en la expresión de la generalización.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

La generalización se puede entender como un proceso (*generalizing*) o como un producto (*generalization*). El proceso implica: (a) Identificar los elementos comunes en todos los casos, (b) Extender el razonamiento más allá del rango en el que se originó, y (c) Derivar resultados más amplios de casos particulares (Ellis, 2007b; Strachota, Knuth y Blanton, 2018). De modo similar, Radford (2010) describe el proceso de generalización de patrones, no obstante, al derivar los resultados más allá del campo perceptual menciona que la generalización debe proporcionar una expresión directa que permite obtener cualquier término de la secuencia. Además, él propone que la generalización está compuesta por capas, las cuales adquieren mayor grado de sofisticación en relación a los sistemas semióticos utilizados para razonar y expresar esa generalidad. La generalización como producto es el resultado de dicho proceso. Las prácticas de representación, justificación y razonamientos son algebraicas cuando se realizan al servicio de acciones con o sobre generalizaciones.

Según Chua (2017), la justificación es un medio para determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación. Sus roles son determinar la verdad para eliminar las propias dudas o persuadir a otros de que la conjetura es verdad. Los tipos de argumentos de los estudiantes dependen de sus habilidades y de la naturaleza de las tareas.

Diversas investigaciones se han centrado en el estudio de las justificaciones y argumentos de los estudiantes en contextos matemáticos. En primaria, en el marco de la aritmética generalizada, Schifter (2009) concluye que es necesario hacer comprender a los estudiantes de primaria que no se justifica con algunos casos particulares. Además, nota que cuando los estudiantes señalan en los casos particulares que eso sucede con “cualquier número” esta puede ser una forma de expresar la generalidad. Por otra parte, añade que en este nivel las leyes de la aritmética no pueden ser la base de la justificación, pues estas leyes aún están en cuestión para los estudiantes. La notación variable tampoco suele ser un medio para expresar la generalidad. Esta autora evidencia cómo los estudiantes usan representaciones visuales para justificar afirmaciones generales.

Otros trabajos establecen niveles de justificaciones al analizar las respuestas de estudiantes al evaluar argumentos matemáticos, crear los propios, demostrar y discutir la naturaleza de las justificaciones (Knuth, Choppin y Bieda, 2009; Lannin, 2005). Blanton (2017) señala que, en los estudios llevados a cabo con estudiantes de primaria en el contexto funcional, es frecuente que al justificar recurran a casos empíricos. De modo similar, Lannin (2005) concluye que los estudiantes de sexto grado, al realizar tareas de generalización de situaciones numéricas, tienden a usar justificaciones empíricas o ejemplos genéricos.

En el contexto español y centrándose en educación secundaria, Chico (2018) analiza el impacto de la interacción en grupos en la producción de discursos matemáticos. Analiza las discusiones de los estudiantes al resolver un problema de patrones algebraicos, considerando los elementos matemáticos involucrados y las acciones de los estudiantes (iniciar, compartir, solicitar y rechazar). Concluye que ciertas formas de interacción influyen en el desarrollo de la lengua del álgebra y el discurso matemático, evidenciando su efecto sobre el pensamiento algebraico en procesos de generalización.

OBJETIVOS

El objetivo de esta comunicación es evidenciar cómo una propuesta de enseñanza basada en la acción de justificar ideas ayudó a que estudiantes de cuarto de primaria expresaran de un modo más sofisticado la generalización en tareas que involucran una relación funcional.

MÉTODO

Esta investigación forma parte de un proyecto más amplio, que sigue la metodología de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), cuyo objetivo es indagar en las capacidades algebraicas de estudiantes de primaria al participar en situaciones que involucran relaciones funcionales. Es de tipo cualitativa, y tiene carácter exploratorio y descriptivo.

La muestra está compuesta por 25 estudiantes que cursan cuarto de primaria (9 a 10 años). El colegio es un centro privado-concertado del sur de España que atiende a una población con un nivel socioeconómico muy bajo. Antes de efectuar las sesiones de trabajo, los estudiantes no habían recibido instrucción sobre la generalización y expresión de ideas algebraicas. Para mantener el anonimato de los estudiantes se les asignó un código específico: E_i, con $i = 1… 25$. En el caso de las investigadoras, el código utilizado fue I.

Recogida de datos

Durante el experimento de enseñanza se diseñó e implementó un cuestionario individual inicial, dos entrevistas clínicas semiestructuradas (una inicial y otra final), y cuatro sesiones de clases de una duración aproximada de 60 minutos.

En la implementación de las sesiones de clases participó un grupo de investigadores los cuales tenían distintos roles: investigador-docente, investigador-observador y técnico de cámaras. Los estudiantes mantuvieron la distribución habitual, sentándose en grupos de tres o cuatro integrantes. Las sesiones se componían de distintos momentos: (a) Presentación de la situación general por parte del investigador-docente, (b) trabajo individual o en pequeños grupos, y (c) discusiones generales en las que los estudiantes podían presentar sus ideas, interpelar a otro estudiante para que diera alguna explicación o hacer una sugerencia para mejorar la respuesta o generalización propuesta.

Las fuentes de información en la recogida de datos son tres: (a) hojas de trabajo, (b) grabaciones de video con cámara fija ubicada al final de la sala de clases, y (c) grabaciones con una cámara móvil que captó el trabajo realizado por algunos estudiantes.

Las tareas trabajadas en las cuatro sesiones están diseñadas considerando el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Este modelo está compuesto por siete pasos que permiten obtener una relación general a partir del análisis de casos particulares, la detección de elementos comunes entre ellos, la formulación de una conjetura y su posterior comprobación.

En las primeras tres sesiones las cuestiones planteadas en las hojas de trabajo refieren, en primer lugar, a casos particulares no consecutivos, seguidamente a casos lejanos y, finalmente, a la generalización de la relación funcional. En las dos primeras sesiones las situaciones consideradas involucran las funciones $f(x)=2x+1$ y $f(x)=x+3$. En las sesiones 3 y 4, objeto de análisis en este trabajo, las tareas refieren a una misma situación (ver Figura 1) basada en la función $f(x) = 2x$.

Isabel está preparando su fiesta de cumpleaños. Comienza organizando las mesas y las cajas de sorpresas para sus invitados. Ella junta algunas mesas formando una fila y coloca las cajas en los lados, tal como se muestra en la imagen.

Figura 1. Situación-Contexto de las tareas de las sesiones 3 y 4

En la sesión 3, la investigadora-docente presentó la situación mostrando imágenes de las mesas y cajas de sorpresas, las que pegó una a una en la pizarra hasta obtener la misma representación que se muestra en la Figura 1. La primera fase del proceso de generalización (identificar elementos comunes entre los casos particulares presentados) se realizó de forma grupal con todo el grupo clase considerando cuatro casos particulares. Establecieron la relación entre la cantidad de mesas y cajas de sorpresas y registraron los casos en una tabla. Enseguida, en pequeños grupos, realizaron los dos procesos de generalización restantes: trabajar con casos lejanos y generalizar. Completaron la tabla que se muestra en la Figura 2 y explicaron de modo general qué debían hacer para conocer la cantidad de mesas y de cajas. La sesión finalizó con una discusión grupal en la que los estudiantes compartieron sus respuestas a estas tareas.

Completa la tabla con la información que falta.

Número de mesas	Número de cajas
6	
20	
9	
	2
	44
	30
2 000	
	10 000

Explica cómo lo sabes

Explica cómo lo sabes

Explica cómo lo sabes

Explica cómo lo sabes

Explica cómo lo sabes

Escribe aquí un número muy grande para ti

Escribe aquí un número muy grande para ti

- ¿Cómo sabes cuántas mesas hay cuando conoces la cantidad de cajas?
- ¿Cómo sabes cuántas cajas hay cuando conoces la cantidad de mesas?

Figura 2. Tareas propuestas en el trabajo en pequeños grupos durante la sesión 3

En la sesión 4 se plantearon tres tareas dirigidas a que elaboraran argumentaciones de validación, es decir, que se expresaran a favor o en contra de las ideas propuestas. En la primera tarea analizaron casos sugeridos en una tabla y argumentaron si las relaciones eran verdaderas o falsas (ver Figura 3, parte izquierda). En la segunda tarea, cada estudiante escribió un mensaje explicando cómo conocer la cantidad de cajas en dos supuestos: cuando la cantidad de mesas era mil y cuando era una cantidad desconocida representada por la letra "Q". Esta actividad se llevó a cabo durante una discusión grupal, por turnos cada estudiante expresó su explicación y luego otro estudiante señaló si estaba de acuerdo o no con esta. En la tercera tarea volvieron a analizar sentencias y argumentar si eran verdaderas o falsas, en esta ocasión algunas de las sentencias involucraban el uso de letras (ver Figura 3, parte derecha).

Número de mesas	Número de cajas		V	F	Explicación
2	2	⇨	V	F	
1.000	El doble de 1.000	⇨	V	F	
5	5 + 5	⇨	V	F	
10 : 2	10	⇨	V	F	

1. La cantidad de mesas es el doble que la cantidad de cajas.
2. Cuando Isabel utiliza 11 mesas necesita 21 cajas.
3. Cuando Isabel utiliza 4 mesas necesita 2x4 cajas.
5. Cuando Isabel utiliza Z mesas necesita 2xZ

Figura 3. Ejemplos de tareas de la sesión 4 (parte izquierda: tarea 1, parte derecha: tarea 3)

Análisis de datos

Se analizaron las videograbaciones y sus respectivas transcripciones. La unidad de análisis considerada son las discusiones grupales. Caracterizamos las respuestas de los estudiantes según su grado de sofisticación atendiendo a la relación entre los siguientes puntos: (a) si se refieren a lo indeterminado, (b) si lo nombran de manera explícita, y (c) si explican la relación matemática entre las variables. En este último punto, consideramos los elementos matemáticos que mencionan: el conteo, la adición, la multiplicación, entre otros. El modo de expresar la generalidad en su mayoría fue verbal, sin embargo, en los casos que tuvimos evidencias del uso de otros sistemas semióticos, por ejemplo, gestos o símbolos alfanuméricos, estos fueron señalados.

En la Tabla 1, mostramos tres ejemplos organizados desde mayor a menor grado de sofisticación. E_{08} y E_{17} aluden a la suma, no obstante, la respuesta de E_{08} es más sofisticada pues se refiere a las variables de forma explícita e indeterminada. E_{03} relaciona las variables por medio de la multiplicación, por lo que podría considerarse que es una respuesta más sofisticada que la de E_{08}, además ambos mencionan las variables explícitamente, sin embargo, E_{03} utiliza casos numéricos particulares y no se refiere a las variables de modo general o indeterminado, tal como lo hace E_{08}.

Tabla 1. Ejemplos de caracterización de respuestas

Respuesta	Variables mencionadas	Relación matemática	Expresión de la indeterminación
E_{08}: Yo he puesto seis, porque si las cajas tengo que llevarlo a las mesas que sea, pues es sumando de dos en dos.	Cajas Mesas	Sumando de dos en dos	Las mesas que sean
E_{03}: Que seis por dos, seis, por seis mesas, y dos por dos cajas, entonces seis por dos son doce.	Cajas Mesas	Seis por dos son doce.	Implícita
E_{17}: Sumando. 2000	Implícitas	Sumando	Implícita

RESULTADOS

Presentamos los resultados derivados del análisis de las discusiones grupales sobre las respuestas obtenidas en cada una de las tres fases del proceso de generalización.

Identificar los elementos comunes en todos los casos

En la discusión inicial de la sesión 3, la clase discute sobre cuántas mesas hay cuando se utilizan 16 cajas. Dos estudiantes señalan que hay diez mesas, otro siete y tres dicen que hay ocho mesas. No obstante, al preguntarles cómo podrían comprobar sus respuestas o no daban argumentos o eran muy generales. Por ejemplo, E_{02} explica por qué cree que son ocho como sigue: "Porque he sumado las cajas y las mesas". La discusión sobre este caso termina cuando el estudiante E_{13} al explicar por qué hay ocho mesas basa su justificación en el conteo y usa gestos para representar con sus dedos las mesas. Él señala: "Aquí tenemos seis. Si empiezas desde el principio te sale ocho. [Cuenta de dos en dos y utiliza los dedos para llevar la cuenta] Dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce y dieciséis. Te sale ocho [muestra ocho dedos]" (Ver Figura 4).

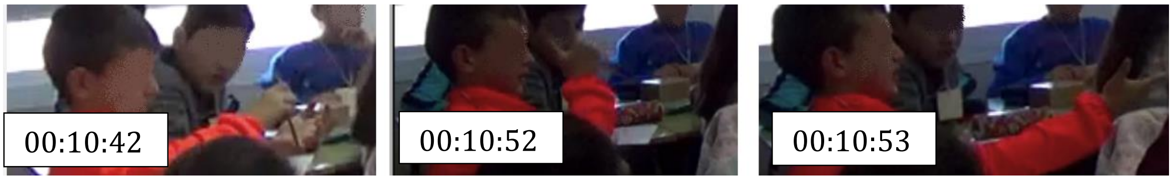

Figura 4. Estudiante E_{13} realizando el conteo sobre el que basa su justificación

Cuando la investigadora-docente pregunta a la clase si están de acuerdo con esa respuesta, señalan que sí y completan la tabla con el número ocho. El siguiente caso fue "tengo dos mesas, ¿cuántas cajas necesito?". El estudiante E_{18} siguiendo con el argumento dado anteriormente señala "cuatro, porque he contado dos, cuatro". Cuando se les pregunta por el número de mesas cuando hay doce cajas, el estudiante E_{08} generaliza la relación entre la cantidad de mesas y cajas, propone una justificación que se basa en las acciones antes realizadas, interpreta el conteo como la suma de dos en dos y refiere a la indeterminación como "las mesas que sean". Él dice: "Yo he puesto seis, porque si las cajas tengo que llevarlo a las mesas que sea, pues es sumando de dos en dos".

Luego de la intervención de E_{08}, los argumentos mencionan otros elementos matemáticos. El estudiante E_{23} dice que hay seis mesas porque doce es el doble de seis. El estudiante E_{17} señala que ha multiplicado las dos cajas por seis, el estudiante E_{21} dice: "es como la mitad. La mitad de doce es seis. Entonces seis más seis son doce" y el estudiante E_{03} señala: "Que seis por dos, seis, por seis mesas, y dos por dos cajas, entonces seis por dos son doce". Este último estudiante no solo explicita la relación matemática entre las variables, también explicita el nombre de cada una de ellas.

Extender el razonamiento más allá del rango en el que se originó

La sesión continuó con el trabajo en pequeños grupos en la tarea mostrada en la Figura 2. Tras el trabajo escrito vuelven a compartir sus respuestas en una discusión grupal, donde se repitieron los argumentos señalados en la primera parte de la sesión. Algunos estudiantes responden y argumentan correctamente, otros responden correctamente, pero argumentan usando incorrectamente la relación matemática. Por ejemplo, al preguntar por el número de mesas para dos cajas:

E_{04}: Uno, porque el doble de dos me da uno.

I: ¿El doble de dos es uno?

E_{03}: No

I: ¿Por qué no E_{03}?

E_{03}: Ella ha dicho el doble de dos, que es cuatro.

I: ¿Y cómo sería entonces?

E_{03}: Sería la mitad. La mitad de dos.

La posibilidad de expresar sus argumentos y discutirlos con otros permite clarificar el uso de algunos conceptos matemáticos y que los propios estudiantes identifiquen los errores. Sucede algo similar en el diálogo entre E_{08} y E_{21} al explicar cuántas mesas utilizaron cuando tenían 44 cajas.

E_{08}: Que yo lo hice multiplicando cuarenta y cuatro y me dio veintidós.

I: ¿Y por cuánto multiplicó?

E_{08}: Por dos.

E_{21}: E_{08} lo que tú hiciste es la mitad. No multiplicando. Porque si lo hubieras multiplicado te hubiera salido ochenta y ocho.

Derivar resultados más amplios de casos particulares.

Al final de la sesión 3 la discusión se centró en los casos con cantidades indeterminadas. A continuación, se muestra el dialogo entre la investigadora-docente y unos estudiantes.

I: Cuándo calculamos los quinientos millones o cualquier número de mesas, ¿qué tenemos que hacer para saber el número de cajas? ¿Alguien me puede explicar eso? Yo le puedo decir cualquiera de estos números, el que sea. ¿Qué teníamos que hacer para encontrar el número de cajas cuando me dan el número que sea de mesas?

E_{02}: El doble de quinientos mil [aunque se le pregunta por una cantidad indeterminada, basa su respuesta en un caso particular]

E_{14}: Que yo hice... como mira si cuarenta el número de cajas y veinte el número de mesas, pues yo he hecho, he pensado que veinte más veinte son cuarenta y lo he sumado.

Estos argumentos no logran capturar y expresar lo indeterminado. Los estudiantes explican la relación matemática, pero a partir de casos particulares. Al comparar estos argumentos, el estudiante E_{02} no nombra de manera explícita las variables involucradas en la situación, mientras que el estudiante E_{14} sí las nombra, al referirse al número de mesas, al número de cajas y la operación matemática que las relaciona. En este sentido, aunque ambos son argumentos basados en casos empíricos, el del estudiante E_{14} es más sofisticado al mencionar explícitamente las variables.

A continuación, se muestra el diálogo entre el estudiante E_{21} y la investigadora-docente, quien le realiza preguntas que buscan lograr mayor precisión en los argumentos del estudiante y generar oportunidades para que éste se exprese de modo general.

1. I: ¿Cómo saber el número de mesas si me dicen el número de cajas? El que sea, cualquiera.
2. E21: Que el número de cajas de, por ejemplo, hay quinientos millones de mesas, no pues siempre tiene que haber más cajas que mesas.
3. I: Pero si te dicen el número de cajas, ¿qué haces rápidamente para saber el número de mesas?
4. E21: Pues... la mitad. Pensando la mitad del número de cajas.
5. I: Cuando sabes el número de mesas, para saber el número de cajas, ¿qué haces?
6. E21: Multiplicando.
7. I: ¿Cuánto?
8. E21: Por dos
9. I: ¿Qué cosa?
10. E21: Quinientos millones por dos. Serían diez millones.
11. I: Entonces, cuando sabes el número de mesas, para saber el número de cajas, ¿qué haces?
12. E21: Pues multiplicar.
13. I: ¿Cuándo sabes el número de mesas para saber el número de cajas qué haces?
14. E21: Multiplico por 2 que son las cajas que hay en cada mesa.

Los argumentos dados por el estudiante E_{21} se refieren a las variables de modo indeterminado. Aunque en dos momentos (líneas 2 y 10) intenta dar una explicación refiriéndose a una cantidad en particular, no continúa dicha argumentación y expresa de dos modos distintos la relación entre las mesas y las cajas. Primero establece una relación cualitativa (línea 2) y luego menciona las operaciones que permiten calcular cualquier número de mesas o número de cajas (líneas 4 y 14).

En la sesión 4, en la segunda tarea los estudiantes debían escribir un mensaje explicando cómo determinar el número de cajas sabiendo la cantidad de mesas. En la Figura 5 se muestran las respuestas de los estudiantes E_{15} y E_{17} al primer caso considerado mil mesas.

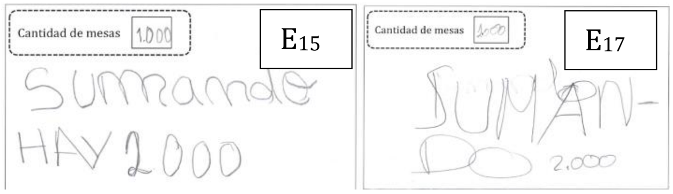

Figura 5. Respuestas estudiantes E_{15} y E_{17}, tarea 2, sesión 4

En el siguiente dialogo la estudiante E_{15} llega a plantear de modo general su estrategia a partir de la validación de la respuesta de E_{17} y el contraste de ideas.

E_{17}: Yo he sumado mil más mil y me ha dado dos mil.

I: ¿Y en tu cartel dice eso? Dice solo sumando.

E_{17}: Que sumé mil más mil.

I: E_{15} ¿qué opinas de ese mensaje?

E_{15}: Que yo lo he hecho igual que ella.

I: Muestra el tuyo. Dice sumando.

E_{15}: Porque si suma el mismo número con el mismo número te sale la cantidad de cajas.

En el diálogo las estudiantes discuten sobre la validez del mensaje que dice solo “sumando”. E_{15} valida esta expresión y la complementa verbalizando el cálculo que debería realizarse. Al final E_{15} recurre a cantidades indeterminas y expresa de modo general el cálculo, se refiere al número de mesas con la frase “el mismo número” y se refiere explícitamente a la otra variable (cantidad de cajas).

En el siguiente caso la cantidad indeterminada se representa por la letra “Q”. La investigadora-docente señala que “Q” representa un número que no conocen, que podría ser cualquiera. La primera reacción de los estudiantes fue preguntar qué significaba eso y relacionaron la letra con los números quince o cuarenta. La estudiante E_{01} acepta que la letra podría ser un número, establece la relación de manera indeterminada, no obstante, deja implícitas las variables. Luego valida su respuesta al utilizar un caso empírico, al asignar un valor a la letra Q.

E_{01}: Depende, porque si es de la letra no hay mesas, pero si es de número. Entonces es el doble del número.

I: ¿Si es de letra no hay mesas?

E_{01}: Si no es de letra, es de cuarenta y hay 80 cajas.

I: ¿Y cómo sabes que hay 80 cajas?

E_{01}: Porque hay el doble.

DISCUSIÓN

Los resultados nos permiten observar cómo los estudiantes fueron mejorando sus argumentos para expresar la relación entre las mesas y las cajas. El conteo de dos en dos fue la primera herramienta matemática que les permitió explicar y comprobar sus respuestas, luego se volvió más sofisticado al referirse a las relaciones de doble o mitad, llegando a mencionar de manera explícita en sus argumentos las variables involucradas en la relación funcional. Esto evidencia cómo la interacción social permite que los estudiantes expresen de modo más sofisticado la generalización. Al incluir en las tareas procesos de justificación y discusión de las respuestas, ampliamos al contexto funcional hallazgos relacionados con los beneficios de la interacción social (por ejemplo, Chico, 2018).

También mostramos que la transición a estrategias o formas de expresar la generalización más sofisticadas depende de cada estudiante. Ellos reconocen la equivalencia entre sumar dos veces el mismo número o calcular el doble, pero mencionan el que más se ajusta a sus habilidades de cálculo. Esto podría ser debido a que sus habilidades aritméticas están en desarrollo, tal como lo evidenció Schifter (2009) en el marco de la aritmética generalizada. Por ejemplo, las estudiantes E_{15} y E_{17} en el proceso de derivar los resultados a casos más amplios expresan la generalización a partir de la suma, a pesar de que antes ya se había verbalizado la multiplicación. Esto se podría explicar con lo que señaló E_{15} cuando la investigadora-docente pregunta: "¿Qué teníamos que hacer para encontrar el número de cajas, cuando me dan el número que sea de mesas?". E_{15} señala: "Depende de cómo lo quieras hacer. Haciendo el doble, multiplicando, restando, sumando, como tú quieras, pero siempre depende del que esté". Aparentemente E_{15} valida la posibilidad de resolver de múltiples formas la situación. Lo que coincide con E_{12} al justificar su respuesta en la actividad que se muestra en la parte izquierda de la Figura 3. Él dice que cuando hay 5 mesas es correcto decir que hay 5 + 5 cajas, "porque el número de mesas es cinco y, cinco más cinco son diez. Lo he comparado con el doble de cinco que es diez".

Por otro lado, se constata que los estudiantes de primaria recurren a justificaciones empíricas como también se observa en otras investigaciones (e.g. Blanton, 2017). Según Lannin (2005) el uso de justificaciones empíricas se debe a la falta de conexión con el contexto, por lo que las preguntas que pueda plantear el profesor son fundamentales para mejorar la justificación y expresión de la generalización, tal como sucedió en el dialogo entre E_{21} y la investigadora-docente, en la fase de derivar los resultados más amplios. Aquí la interacción entre el docente y el estudiante permitió que éste lograra ser más preciso al momento de justificar y expresar su generalización.

CONCLUSIONES

En esta comunicación mostramos una propuesta de enseñanza en la que las operaciones aritméticas se pueden interpretar como cambios. Observamos que las instancias de justificación permitieron que los estudiantes lograran generalizar la relación de correspondencia entre las variables y referirse a ella en términos de cantidades indeterminadas.

El reconocimiento de las ideas de otros ayudó a los estudiantes tanto a adoptar estrategias de resolución más sofisticadas como a verbalizar sus explicaciones de modo más preciso. El primer caso se ve reflejado, por ejemplo, en lo sucedido cuando los estudiantes buscaban elementos comunes al inicio de la sesión 3. Considerando la idea de contar propuesta por el estudiante E_{13} y las intervenciones de otros, el estudiante E_{08} logra plantear de forma general la relación entre las variables. Luego de su intervención el conteo se expresó como sumar de dos en dos, multiplicar, calcular el doble o la mitad. Un ejemplo para el segundo caso se observa cuando los estudiantes E_{04} y E_{08} plantean la respuesta correcta verbalizando las relaciones que se habían discutido hasta el momento (doble y multiplicar). Si bien esto era incorrecto, las intervenciones de los estudiantes E_{03} y E_{21} ayudaron a verbalizar la relación correcta.

Por otro lado, el proponer casos particulares no consecutivos propició que los estudiantes establecieran la relación de correspondencia. Esto contrasta con resultados previos (Carraher y Schliemann, 2007) que muestran que cuando los estudiantes resuelven situaciones en las que los casos son consecutivos, tienden a analizar los datos de manera recursiva, fijando su atención en cada una de las variables por separado y tienen mayor dificultad para identificar como estas covarían.

Concluimos que a medida que participaron de las actividades y justificaron sus respuestas, los estudiantes fueron mejorando tanto su capacidad de justificar como la de expresar la generalización de modo más sofisticado. Esto extiende y coincide con lo que plantean Knuth et al. (2009) quienes señalan que la participación en actividades que fomentan la justificación logra mejorar la capacidad de plantear la generalización. Al igual que Ellis (2007a), quien trabajó con estudiantes de secundaria, al incluir el proceso de justificación desde el inicio de la sesión de clases, en vez de solo al final, la generalización fue cada vez más sofisticada.

Referencias

Blanton, M. (2017). Algebraic reasoning in Grades 3-5. En M. Battista (Ed.), *Reasoning and Sense Making in Grades 3-5* (pp. 67-102). Reston, EE. UU.: National Council of Teachers of Mathematics.

Callejo, M. L., García-Reche, Á. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano en estudiantes de Educación Primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *AIEM*, *10*, 5-25.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, EE. UU.: NCTM.

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *AIEM*, *14*, 31-47.

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 115-122). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Ellis, A. B. (2007a). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 194-229.

Ellis, A. B. (2007b). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262.

Knuth, E. J., Choppin, J. M. y Bieda, K. N. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 153-170). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417–426). Málaga: SEIEM.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Cham, Suiza: Springer.

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 87-101). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Strachota, S., Knuth, E. y Blanton, M. (2018). Cycles of generalizing activities in the classroom. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 351-378). Cham, Suiza: Springer.

[xvi] Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Una de las autoras es beneficiaria de una Beca de Doctorado otorgada por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), folio 72180046.