¿AYUDAN LOS MATERIALES MANIPULATIVOS A RESOLVER TAREAS MATEMÁTICAS? SÍ, PERO...

Do manipulatives help solving mathematical tasks? Yes, but...

De Castro, C.[a] y Palop, B.[b]

[a]Universidad Autónoma de Madrid, [b]Universidad de Valladolid

Resumen

Los metaanálisis sobre el uso de manipulativos, tanto físicos como virtuales, muestran que estos constituyen una ayuda eficaz en el aprendizaje de las matemáticas. En este artículo estudiamos el uso y eficacia de manipulativos dependiendo de variables como el tipo de tarea o la edad del niño. Se han seleccionado, en un entorno online, 1344 respuestas de estudiantes de Educación Primaria (de 6 a 8 años) a tareas aritméticas y problemas aritméticos verbales, contextualizados en la vida cotidiana o en el propio uso del ábaco, con números hasta el 10. Los estudiantes disponían en todas las tareas de un ábaco virtual. Los estudiantes han utilizado 1.96 veces más el ábaco en problemas sobre ábaco que en los de vida cotidiana, y 1.85 veces más en cálculos que en problemas de vida cotidiana. Salvo en los problemas de la vida cotidiana, la probabilidad de que los alumnos que usan el ábaco acierten la respuesta es más del doble que la de los que no lo usan.

Palabras clave*: aritmética, resolución de problemas, Educación Primaria, materiales manipulativos, tecnología.*

Abstract

Meta-analyzes on the use of manipulatives, both physical and virtual, show that these are an effective aid in the learning of mathematics. In this paper, we examine the use and effectiveness of manipulatives depending on variables such as the type of task or the age of the child. We have selected, in an online environment, 1344 responses from primary school students (6 to 8 years old) to arithmetic tasks and verbal arithmetic problems with numbers up to 10, contextualized in everyday life or in the abacus itself. Students had a virtual abacus at hand in all the tasks. The students have used 1.96 times more the abacus in problems about the abacus than in daily life problems, and 1.85 times more in calculations than in daily life problems. Except in daily life problems, students who use the abacus have more than twice as many chances to give a correct answer than those who do not use it.

Keywords: *arithmetic, problem solving, Primary Education, manipulatives, online learning.*

EL USO DE MATERIALES MANIPULATIVOS EN MATEMÁTICAS

La idea de que el uso de materiales manipulativos puede mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas no es nueva. Apoyada en teorías del aprendizaje de autores clásicos como Montessori, Piaget o Bruner, se ha convertido en una creencia muy extendida (McNeil y Jarvin, 2007). Paralelamente al entusiasmo generado por los manipulativos, se han venido escuchando voces críticas que, si bien reconocen la aportación de los manipulativos, tratan de matizar y atenuar las altas expectativas puestas en los mismos. Así, Ball (1992) decía, con ironía, que la "comprensión no viaja a través de la punta de los dedos subiendo por el brazo" y que "las ideas matemáticas no residen en […] materiales de plástico" (p. 47); Baroody (1989) proponía que las cajas de materiales deberían venderse con una etiqueta advirtiendo que éstos no garantizan el aprendizaje, y Marshall y Swan (2008) sostienen que, aunque se suele asumir la efectividad del uso

De Castro, C. y Palop, B. (2019). ¿Ayudan los materiales manipulativos a resolver tareas matemáticas? Sí, pero... En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 243-252). Valladolid: SEIEM.

de manipulativos, no disponemos de evidencias suficientes de investigación que apoyen esta efectividad ni, en su caso, qué condiciones la favorecen.

Los metaanálisis realizados hasta la fecha sobre la eficacia de los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas, aunque han encontrado efectos positivos de su uso, no son del todo concluyentes, y suelen expresar que el uso de manipulativos debe estudiarse conjuntamente con otras variables. En uno de los primeros metaanálisis, Sowell (1989) concluye que las intervenciones con manipulativos de al menos un curso de duración en educación primaria, comparadas con enseñanza “simbólica”, producen efectos significativos de tamaño medio y alto. No obstante, su síntesis de 60 estudios no permite responder la cuestión de para qué situaciones es apropiado el uso de manipulativos, ni cuál sería el manipulativo más adecuado para una situación particular (p. 504).

Hodgen, Foster, Marks y Brown (2018) revisan 5 metaanálisis sobre el uso de manipulativos en matemáticas, encontrando una evidencia alta en favor de su uso y señalando, como condiciones necesarias para que este sea efectivo: (1) que los profesores se aseguren de que los alumnos conectan adecuadamente el trabajo con manipulativos con las ideas matemáticas que estos representan; (2) que el uso sea suficientemente extenso, pero no excesivamente prolongado en el tiempo; y (3) que los profesores ayuden a los alumnos, partiendo de los manipulativos, a desarrollar representaciones más abstractas.

Baroody (2017) traslada el foco de los materiales manipulativos a las experiencias concretas. Estas pueden implicar manipulativos, pero también analogías verbales o imágenes virtuales. El uso de manipulativos no garantiza que se produzca una experiencia educativa, que será valiosa en la medida en que consiga extender el conocimiento matemático informal para mejorar la comprensión de conocimientos formales. También en esta línea, López y Alsina (2015), en un estudio cuasi-experimental en Educación Infantil, encontraron que el método de trabajo por rincones favoreció más la adquisición de conocimientos matemáticos que el uso de materiales manipulativos o de cuadernos de actividades. Los autores atribuyen los “malos resultados” del método manipulativo a “una gestión inadecuada de los materiales en el aula […] o a […] un mal acompañamiento por parte del maestro ofreciendo unos andamios inadecuados ante el alumno y la situación en particular” (p. 9). Maz-Machado y Adrián (2014), en un estudio cuasiexperimental en primer curso de primaria, no encontraron diferencias significativas en el índice de competencia matemática (ICM) entre los alumnos que habían utilizado materiales manipulativos durante el curso y los que no.

Otro factor a considerar es la formación y la actitud de los maestros sobre el uso de manipulativos. Moyer (2001), en su observación de maestros utilizando materiales manipulativos, indica que los maestros experimentan dificultades para representar con ellos conceptos matemáticos y que piensan que usar manipulativos es divertido, pero no necesario, para el aprendizaje de las matemáticas.

Carbonneau, Marley y Selig (2013) encuentran en su metaanálisis sobre materiales manipulativos que su uso, al compararse con la enseñanza con símbolos escritos, produce un efecto en el aprendizaje de tamaño pequeño a medio. Además, el tamaño del efecto depende de variables de enseñanza como la riqueza perceptiva de los materiales o el nivel de guía ofrecido a los alumnos en el uso de manipulativos. Los manipulativos, además, tienen un efecto alto en retención, pero bajo en transferencia, solución de problemas y justificación. Moyer-Packenham y Westenskow (2013), en otro metaanálisis sobre materiales manipulativos virtuales (con 66 estudios), indican que el uso de estos materiales produce efectos moderados en el rendimiento de los alumnos al compararlo con otros enfoques de enseñanza (p. 47).

Teniendo todo esto en cuenta, en este estudio nos basamos en que la retención de hechos numéricos parece favorecida por los manipulativos, a diferencia de la resolución de problemas (Carbonneau et al, 2013). Esto nos lleva a plantearnos que, tanto el uso de manipulativos, como la efectividad del mismo, pueden depender del tipo de tarea. Además, si el uso del material no debe ser muy prolongado, y debe dejar paso a representaciones simbólicas (Hodgen et al., 2018), o conectar el conocimiento informal con el formal (Baroody, 2017), los métodos de enseñanza deben favorecer, en general, un descenso en el uso de manipulativos para cada tarea con la edad. Así, consideramos también la edad como una variable de interés al estudiar el uso y efectividad de los manipulativos.

Las tareas concretas incluidas en el diseño del presente estudio están inspiradas en el trabajo de Hughes (1986, p. 50) que compara el rendimiento de alumnos de 3 a 5 años en tres tipos de tareas: de caja cerrada, de tienda hipotética y de código formalizado. Estas tareas han sido sustituidas en el presente estudio, respectivamente, por problemas verbales contextualizados en el uso del ábaco, problemas verbales de la "vida cotidiana" y operaciones aritméticas (ver detalle de las tareas en la sección del método). El ábaco utilizado es un *rekenrek*, desarrollado por Adrian Treffers, investigador del Instituto Freudenthal de Holanda, como modelo visual para el aprendizaje del cálculo (De Castro, 2015).

Este estudio se ha realizado con datos tomados de una plataforma online para la enseñanza de las matemáticas (*Smartick*). Las secuencias de actividades que realizan los alumnos de esta plataforma están diseñadas a partir de trayectorias de aprendizaje, creando un camino de enseñanza individualizado para cada alumno que se va actualizando en función de los resultados de cada sesión de trabajo. Las trayectorias de aprendizaje están orientadas a un objetivo, o un ámbito del conocimiento matemático, y tienen en cuenta los hitos que van marcando el desarrollo del pensamiento matemático (camino de aprendizaje) y la instrucción (camino de enseñanza) que puede favorecer la evolución de los alumnos (Sarama y Clements, 2009). Los participantes de este estudio tienen familiaridad con el ábaco, pues previamente han realizado con este manipulativo actividades del sistema que configuran el camino de enseñanza para la subitización (De Castro, 2015). Al incluir problemas aritméticos verbales, el estudio se ha realizado con alumnos a partir de 6 años que tienen en sus datos personales registrada la condición de saber leer.

Objetivos de la investigación

Los objetivos que nos planteamos en esta investigación son:

Determinar la influencia que las variables tipo de tarea, operación a realizar y edad tienen en el uso del ábaco por parte de los niños.

Determinar la influencia que las variables de uso del ábaco, operación a realizar y edad del niño tienen sobre su efectividad en cada uno de los tres tipos de tareas estudiados.

MÉTODO

Presentamos un estudio cuantitativo, mediante modelos de regresión logística, en el que estudiamos la influencia entre el uso del ábaco, la resolución correcta o incorrecta de una tarea, el tipo de tarea, la operación aritmética correspondiente a dicha tarea (suma o resta), y la edad del alumno en el momento de la resolución. Dado que, tanto el uso del ábaco como la resolución correcta o no de una tarea son variables categóricas binarias, utilizamos modelos logísticos binomiales para estudiar los factores de los que ambas dependen (Hosmer y Lemeshow, 2000).

Las tareas

Hemos planteado 3 tipos de tareas: Ejercicios *simbólicos* (tipo S) con una operación aritmética descontextualizada de suma o resta; problemas aritméticos verbales de cambio creciente o decreciente con incógnita en la cantidad final, contextualizados en el *ábaco* (tipo A) o en la *vida cotidiana* (tipo V) (ver Tabla 1). En todas las tareas aparece un ábaco de una fila, e intervienen números hasta 10 en los datos o el resultado. En la Figura 1, vemos una captura de pantalla de una tarea de tipo A. En las demás tareas (S y V), solo cambia en la pantalla la parte del enunciado.

La elección de estas tareas para el estudio se basa en el trabajo de Hughes (1986). También, al considerar los problemas aritméticos verbales, hemos dado mayor variedad a los enunciados que en

Hughes (1986, p. 50), que sólo utiliza un problema de "tienda hipotética" ("Si en una tienda hubiese un niño y entrasen allí otros dos, ¿cuántos niños habría ahora en la tienda?"). Así, hemos tenido en cuenta que los problemas verbales requieren "crear un modelo de la situación del problema, aplicando para ello el conocimiento del mundo real que posea el alumno" (Vicente y Orrantia, 2007, p. 66).

Tabla 1. Tareas empleadas en el estudio

Tipo de tarea			
Operación/ Categoría semántica	Operación simbólica (S)	Problema de ábaco (A)	Problema de vida cotidiana (V)
Suma/ Cambio creciente	2+6	Si marcas el 2 en el rekenrek y después añades 6 cuentas, ¿qué número marcará?	En el patio había 2 palomas. Nos pusimos a echarles pan y llegaron otras 6. Escribe cuántas palomas había al final en el patio.
Resta/ Cambio decreciente	8-6	Si marcas el 8 en el rekenrek y después quitas 6 cuentas, ¿qué número marcará?	En un árbol hay 8 pájaros posados. De pronto, se oye un ruido y salen volando 6. ¿Cuántos pájaros quedan en el árbol?

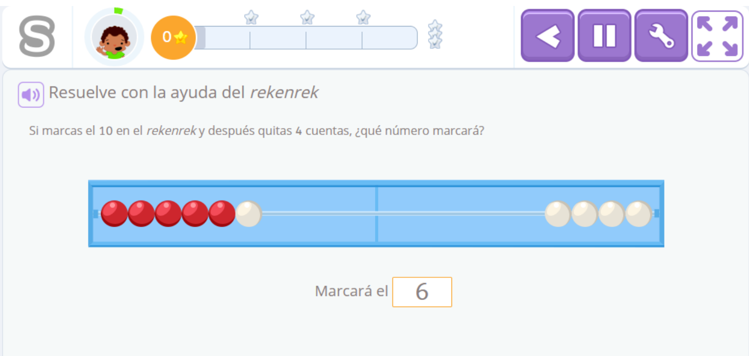

Figura 1. Entorno online en que se han realizado las tareas (ejemplo de tarea de tipo A)

RESULTADOS

Recogida de datos

Smartick guarda un registro por cada ejercicio incluyendo: *variables de sujeto*, como la edad, el curso, o si se han detectado necesidades educativas especiales; *variables de tarea*, como el tipo de problema, la operación o el tamaño de los números; y *variables de proceso*, como la respuesta del alumno, si es o no correcta, el tiempo de respuesta, o si ha interactuado o no con el ábaco.

De todos los registros, se han tomado al azar 4301 resoluciones de ejercicios de tipo S, A o V, realizados por niños de 6 a 8 años durante un plazo de 2 años. De cada niño se ha seleccionado un único ejercicio para garantizar la independencia de los datos. De esos 4301 registros, se han seleccionado los que pertenecen a alumnos sin NEE detectadas, que se resuelven con una suma o una resta, con números hasta 10, con presencia de un ábaco virtual de una fila. Este filtrado ha producido la muestra final de 1344 resoluciones de ejercicios.

Variables

Las variables que hemos tenido en cuenta son: (1) el "tipo de tarea"; (2) La "operación/categoría semántica", (3) la resolución correcta o incorrecta; y (4) el uso del ábaco (ver apartado de tareas en la sección del Método). Con respecto a la variable "uso del ábaco", el uso del manipulativo ha sido opcional y solo se ha tenido en cuenta si el niño ha interactuado con el material, no realizándose ningún tipo de evaluación sobre esta interacción.

Variables controladas

El ábaco utilizado es de una única fila. Los números que aparecen en los cálculos y en los problemas no superan el 10, ni en los datos, ni en el resultado. Las categorías semánticas de los problemas aritméticos verbales (en las tareas tipo A y V) son cambio creciente y decreciente, ambas con la incógnita en la cantidad final. Se han tenido en cuenta resultados de investigación sobre estas dos variables. Con respecto al tamaño de los números, cuanto menor es, más fáciles son las operaciones aritméticas y los cálculos necesarios para resolver un problema verbal con dichos números (Zbrodoff y Logan, 2005). En cuanto a las categorías semánticas de los enunciados, según las investigaciones sobre resolución de problemas aritméticos verbales, los problemas de cambio creciente y decreciente con incógnita en la cantidad final, y los problemas de combinación con incógnita el total, son los más sencillos de resolver y se pueden abordar en torno a los 4-5 años (Sarama y Clements, 2009).

La Tabla 2 muestra la frecuencia del uso del ábaco y de resolución correcta de los ejercicios. En una primera inspección general, puede observarse que los porcentajes más altos corresponden a la resolución correcta de las tareas con el uso del ábaco. En las operaciones simbólicas es donde se produce una mejora mayor en el porcentaje de resolución al pasar de no usar el ábaco a usarlo.

Tabla 2. Frecuencia de uso del ábaco y resolución de ejercicios

		Problema de Ábaco		Problema de la Vida		Operación Simbólica		
Operación/Categoría semántica	Ábaco	NC	C	NC	C	NC	C	Total
Suma/cambio creciente	No Usa	5%	16%	5%	32%	7%	29%	235
	Usa	8%	70%	6%	56%	6%	58%	423
Resta/cambio decreciente	No Usa	5%	22%	7%	33%	8%	29%	259
	Usa	5%	68%	9%	52%	5%	57%	427
Número total		14	106	107	680	58	379	1344

C: Respuesta correcta; NC: Respuesta no correcta

Técnica estadística

Para la selección de los modelos de regresión logística binaria, se ha partido del modelo saturado con la totalidad de variables consideradas y de las interacciones entre ellas, para someterlo a un proceso iterativo de reducción de variables hacia atrás basado en el criterio de información de Akaike (AIC) de los modelos (Heinze, Wallisch y Dunkler, 2018). "No existe un único criterio que sea la panacea de los problemas de selección de modelos" (Bozdogan, 1987), por lo que se ha realizado un análisis parsimonioso de los 4 modelos que se presentan. Dado el reducido número de variables en juego, se ha revisado el proceso iterativo y matizado la inclusión o no de algunas de las variables teniendo en cuenta su significatividad (p-valor) en el modelo finalmente seleccionado. Todos los modelos se han construido utilizando la aplicación informática R (R Core Team, 2016) versión 3.02, bajo RStudio 1.0.136 con la función glm con parámetro family=binomial.

El uso del ábaco

Partimos del modelo saturado (AIC=1775.5) y realizamos un análisis hacia atrás mediante un algoritmo paso a paso con el test chi cuadrado. El algoritmo converge descartando la variable de operación y manteniendo la edad, el tipo de problema y la interacción de ambas (p-valor: 0.010; AIC=1764.7). Sin embargo, ni la variable edad ni tampoco la interacción alcanzan la significatividad en este modelo. Por ello, planteamos el modelo más parsimonioso que mantiene únicamente la variable del tipo de tarea, cuyos resultados resumimos en la Tabla 3.

Tabla 3. Modelo logístico del uso del ábaco

	β	$SE\ \beta$	p	*odds ratio*
(Constante)	1.14	0.21	<0.001 ***	3.13
Contexto de vida diaria	-0.68	0.23	0.003 ***	0.51
Simbólico	-0.61	0.24	0.009 ***	0.54

AIC=1764. Likelihood ratio test p-value=0.007

Dado que hemos fijado el ábaco como categoría de referencia, este análisis nos indica que los niños usan casi 2 veces más el ábaco (1/0.51=1.96) cuando el problema está contextualizado en el ábaco frente a los ejercicios contextualizados en la vida diaria. De igual manera sucede (1/0.54=1.85) cuando el problema es de tipo simbólico. Por otra parte, no se aprecian apenas diferencias en el uso del ábaco entre los ejercicios de tipo contextualizados en la vida frente a los simbólicos (de la tabla anterior podemos derivar el coeficiente entre estos dos valores $\beta = -0.68 + 0.61 = -0.06$).

La efectividad en la resolución

En el apartado anterior hemos observado que el tipo de tarea es determinante para que los alumnos decidan utilizar o no el ábaco. Dado que, a continuación, nuestra intención es investigar si este uso tiene algún efecto en la resolución correcta de la tarea, estudiaremos cada uno de los tipos de tareas propuestos de manera independiente. De este análisis podremos derivar cuáles son los factores determinantes en la efectividad del niño de entre las variables seleccionadas de edad, operación de suma o resta y de uso del ábaco dependiendo del tipo de tarea a la que se enfrenta.

Problemas contextualizados en la vida

Partimos del modelo saturado (AIC=636.57) y el algoritmo converge en el modelo que mantiene las variables operación y uso del ábaco (AIC=627.25, p-valor=0.104). Dado que ninguna de las variables consideradas es significativa, y a la vista del p-valor del modelo, descartamos el procedimiento automático en este caso. Mostramos en la Tabla 4 el modelo con las tres variables consideradas (sin las interacciones entre ellas) donde podemos apreciar que ninguno de los p-valores alcanza el nivel de significatividad. Tras realizar el estudio pormenorizado de todas las variables, así como las combinaciones de parejas de variables (omitido por brevedad), concluimos que ninguno de los factores considerados en el estudio son determinantes del acierto o no del alumno. En particular, concluimos que no se detecta una relación clara de influencia entre el uso del ábaco y la correcta resolución de este tipo de problemas por parte de los niños.

Tabla 4. Modelo logístico de la efectividad para problemas de la vida

	β	$SE\ \beta$	p	*odds ratio*
(Constante)	1.34	0.97	0.165	3.83
Usa el ábaco (ref. no)	0.29	0.21	0.163	1.34
Resta (ref. suma)	-0.31	0.21	0.131	0.73
Edad (ref. 6)	0.07	0.14	0.602	1.08

AIC=628.97. Likelihood ratio test p-value=0.188

Problemas contextualizados en el ábaco

Partimos de nuevo del modelo saturado (AIC=94.59) y el algoritmo converge en el modelo que mantiene las variables de uso del ábaco y edad (AIC=86.71, p-valor=0.056) y que mostramos en la Tabla 5.

Tabla 5. Modelo logístico de la efectividad para problemas de ábaco

	β	*SE β*	*p*	*odds ratio*
(Constante)	5.81	2.69	0.031 *	335.29
Usa el ábaco (ref. no)	0.90	0.60	0.132	2.46
Edad (ref. 6)	-0.63	0.37	0.087 .	0.53

AIC=86.71. Likelihood ratio test p-value=0.056

Concluimos de los datos anteriores que los ejercicios contextualizados en el ábaco, independientemente de si son de suma o de resta, resultan muy sencillos a los niños (tienen 335.29 veces más chance de acertar que de fallar, con p=0.031). Si tomamos el intervalo de confianza al 95% del *odds ratio* para el uso del ábaco, obtenemos que este valor se mueve entre 0.73 y 7.95. En el peor caso (*odds*=0.73), esto significa que la resolución de ejercicios contextualizados en el ábaco es algo menos efectiva cuando se usa el ábaco. En el mejor caso (*odds*=7.95), con el uso sería casi 8 veces más probable que un niño respondiese correctamente la pregunta. Con respecto a la variable de la edad, vemos que tiene un efecto negativo en la efectividad significativo al 90% (p-valor=0.087). Si consideramos el intervalo de confianza al 95% del *odds ratio* para esta variable, obtenemos que oscila entre el 0.25 y el 1.08, indicando que los niños mayores tienen menor probabilidad de contestar correctamente a este tipo de tareas.

Problemas de tipo simbólico

Partimos del modelo saturado (AIC=339.58) y el algoritmo converge en el modelo que mantiene las variables de uso del ábaco, la operación realizada y la edad, además de la interacción de estas dos últimas cuyos datos mostramos en la Tabla 6.

Tabla 6. Modelo logístico de la efectividad para problemas simbólicos (I)

	β	*SE β*	*p*	*odds ratio*
(Constante)	-9.04	6.34	0.134	0.0001
Usa el ábaco (ref. no)	1.04	0.28	<0.001 ***	2.81
Edad (ref. 6)	1.79	1.04	0.103	5.50
Resta (ref. suma)	10.62	6.86	0.122	4113.95
Edad: Resta	-1.75	1.12	0.121	0.173

AIC=335.1. Likelihood ratio test p-value=0.002.

En el modelo anterior, llama la atención la variable que indica si tipo de operación es una suma o una resta. Los valores tan elevados de error y de p-valor, llevan a que el *odds ratio* en el intervalo del 95% resulte entre 0.041 y 2*10^12, de donde concluimos que esta variable debe ser eliminada del modelo. Obtenemos al descartar este factor un modelo más parsimonioso que incluye únicamente el uso del ábaco y la edad en la Tabla 7.

Tabla 7. Modelo logístico de la efectividad para problemas simbólicos (II)

	β	*SE β*	*p*	*odds ratio*
(Constante)	-0.93	6.34	0.134	0.40
Usa el ábaco (ref. no)	1.04	0.28	<0.001 ***	2.83
Edad (ref. 6)	0.36	0.38	0.343	1.44

AIC=334.4. Likelihood ratio test p-value=0.001.

Es interesante notar en la comparación entre los dos modelos que el efecto introducido por el factor del uso o no de ábaco se mantiene, haciendo que la probabilidad de que un niño resuelva correctamente esta tarea es casi tres veces mayor cuando utiliza el ábaco que cuando no lo utiliza. La edad aparece como un factor que podría favorecer la resolución, pero la baja significatividad del resultado y el elevado error del coeficiente nos lleva a probar el ajuste con un tercer (y último) modelo, manteniendo únicamente el uso o no del ábaco cuyos resultados vemos en la Tabla 8.

Tabla 8. Modelo logístico de la efectividad para problemas simbólicos (y III)

	β	*SE β*	*p*	*odds ratio*
(Constante)	1.33	0.19	<0.001 ***	3.76
Usa el ábaco (ref. no)	1.02	0.29	<0.001 ***	2.78

AIC=333.4. Likelihood ratio test p-value<0.001.

Mood (2010) indica que "en la regresión logística las variables omitidas afectan a los coeficientes" (p. 67), remarcando que no se pueden incluir todas las variables que afectan a un resultado. En este caso concreto, observamos dicho cambio en las tablas 6, 7 y 8.

Confirmamos, por lo tanto, que los problemas de tipo simbólico resultan sencillos para los niños siendo casi 4 veces más probable que produzcan resultados correctos que incorrectos, dado que los odds de la constante son 3.76. Cuando el niño, además, usa el ábaco se multiplica casi por 3 (2.78 veces) su probabilidad de dar con la respuesta correcta a la pregunta.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Sintetizando los resultados de este estudio, los alumnos de *Smartick* han utilizado más (casi el doble de veces) el ábaco en los problemas de ábaco y en las operaciones simbólicas descontextualizadas que en los problemas aritméticos verbales de la "vida diaria". Y es en las tareas de operación simbólica (sumas y restas) donde usar el ábaco multiplica casi por tres la probabilidad de dar la respuesta correcta. Este es el resultado principal del estudio y confirma la idea que guía su diseño: los materiales manipulativos pueden mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero no por igual en todas las tareas.

Por otra parte, los alumnos han utilizado más el ábaco en los problemas de ábaco que en los problemas aritméticos verbales. Esto es lógico, pues en los problemas de ábaco se hace una pregunta sobre el propio ábaco ("Si marcas el 2 en el rekenrek y después añades 6 cuentas, ¿qué número marcará?"), lo que supone un claro estímulo para el uso del mismo, mientras que los problemas aritméticos verbales describen situaciones totalmente ajenas al ábaco. Lo llamativo es que el mayor uso del ábaco en los problemas de ábaco no conduce a una mayor eficacia en la resolución de los mismos. Los alumnos parecen albergar la idea de que el ábaco les va a ayudar en problemas que se refieren al ábaco, pero, en realidad, el uso del ábaco no mejora la resolución de estos problemas frente a los tipos simbólico y de la vida diaria.

Con respecto a la variable edad, esta no ha dado resultados de interés en ninguno de los modelos. O bien era excluida como variable del modelo, o bien no arrojaba resultados significativos. Este resultado no era esperado, pues en todas las teorías que sustentan el uso de manipulativos en matemáticas se espera que los alumnos vayan prescindiendo de los manipulativos con la edad. La explicación que encontramos está en la forma de seleccionar los ejercicios que hemos adoptado. Para garantizar la hipótesis de independencia, hemos tomado un único ejercicio de cada alumno. La plataforma Smartick plantea a los alumnos tareas según su nivel de competencia matemática, por lo que es lógico que los niños a los que aún se les plantean sumas hasta 10 a los 8 años tengan un nivel inferior en matemáticas que los niños que superan estas tareas a los 6 o 7 años. En este punto, se obtuvo el resultado de que los alumnos mayores (8 años) tenían menor probabilidad de responder correctamente a los problemas de ábaco. Este efecto constituye una limitación en el presente estudio y debería corregirse en futuros trabajos. Una forma de hacerlo sería hacer que cada alumno pase por todos los tipos de tarea para evitar que, en las edades superiores, las tareas más sencillas se propongan a los alumnos que, probablemente, tengan mayores dificultades con las matemáticas.

Con respecto a los problemas aritméticos verbales, su inclusión en el diseño ha resultado de gran interés, pues es claramente el tipo de problema en que los niños menos usan el ábaco. Aparte de este resultado, con respecto a la efectividad del uso del ábaco, no han aportado mucha información. Esto puede deberse a que se han utilizado las dos categorías semánticas que la investigación ha determinado como más sencillas. Estos tipos de problemas se pueden plantear desde los 4-5 años (Sarama y Clements, 2009) y quizá en las edades de este estudio (6 a 8 años), no son los más representativos de la resolución de problemas aritméticos verbales. Por otra parte, desde el punto de vista del aprendizaje por analogía y de la transferencia, los problemas verbales, aunque tengan la misma estructura profunda (misma categoría semántica), difieren mucho en aspectos superficiales. Por el contrario, tanto las operaciones aritméticas como los problemas de ábaco son todos iguales entre sí y sólo difieren en los números que aparecen en los mismos.

De cara a futuros estudios, queda pendiente abordar de forma diferente la influencia de la variable edad, una limitación de este trabajo, y tratar de replicar y ampliar los resultados de este estudio utilizando tareas con otros materiales manipulativos, como los bloques de base 10, o con otros tipos de tarea.

Referencias

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of Math Education. *American Educator: The Professional Journal of the American Federation of Teachers*, *16*(2), 14-18, 46-47.

Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *Arithmetic Teacher*, *37*(2), 4-5.

Baroody, A. J. (2017). The use of concrete experiences in Early Childhood Mathematics instruction. *Advances in Child Development and Behavior*, *53*, 43-94.

Bozdogan, H. (1987). Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, *52*(3), 345-370.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 380-400.

De Castro, C. (2015). Aprendiendo a subitizar cantidades con el rekenrek en un sistema online para el aprendizaje de las matemáticas. *Épsilon, 90*, 49-57.

Heinze, G., Wallisch, C. y Dunkler, D. (2018). Variable selection: A review and recommendations for the practicing statistician. *Biometrical Journal*, *60*(3), 431-449.

Hodgen, J., Foster, C., Marks, R. y Brown, M. (2018). *Evidence for review of mathematics teaching: Improving mathematics in key stages two and three.* Londres, Reino Unido: Education Endowment Foundation.

Hosmer, D. W. y Lemeshow, S. (2000). *Applied Logistic Regression* (2nd ed.). Nueva York, EE. UU.: John Wiley & Sons.

Hughes, M. (1986). *Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Planeta.

López, M. y Alsina, Á. (2015). La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6, 4*(1), 1-10.

Marshall, L. y Swan, P. (2008). Exploring the use of mathematics manipulative materials: Is it what we think it is? En *Proceedings of the EDU-COM 2008 International Conference. Sustainability in Higher Education: Directions for Change*. Perth, Australia: Edith Cowan University. Recuperado de: https://ro.ecu.edu.au/ceducom/33/

Maz-Machado, A. y Adrián, C. (2014). Uso de materiales didácticos y desarrollo del sentido numérico en primaria. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* - 2014 (pp. 109-114). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

McNeil, N. y Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate. *Theory Into Practice*, *46*(4), 309-316.

Mood, C. (2010). Logistic Regression: Why we cannot do what we think we can do, and what we can do about it. *European Sociological Review*, *26*(1), 67-82.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 175-197.

Moyer-Packenham, P. S. y Westenskow, A. (2013). Effects of virtual manipulatives on student achievement and mathematics learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, *4*(3), 35-50.

R Core Team (2016). *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* Viena, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Recuperado de: http://www.R-project.org/

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 498-505.

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación*, *19*(1), 61-85.

Zbrodoff, N. J. y Logan, G. D. (2005). What everyone finds: The problem-size effect. En J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 331-345). New York, EE. UU.: Psychology Press.