

# CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS

## Teaching knowledge of the content of the quadratic function in pre-service teachers of Mathematics

Hau-Yon, F. y Zapata, M.

Universidad de Piura

### Resumen

*El conocimiento didáctico del contenido (PCK) es relevante ya que permite identificar los conocimientos, estrategias y pensamiento de los profesores, pero recogerlo y describirlo es una tarea compleja debido a su propia naturaleza. En esta investigación (que es parte de otra más amplia) se trata de caracterizar el PCK de los Estudiantes Para Profesor (EPP) de la carrera de Matemática y Física respecto a la función cuadrática utilizando como herramienta la Representación del Contenido (CoRe). El PCK se ha caracterizado tomando en cuenta las categorías de los subdominios del PCK del modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge - MTSK. Este estudio permitirá a los estudiantes para profesor reflexionar sobre el conocimiento matemático y didáctico del tema en cuestión.*

**Palabras clave:** *Conocimiento didáctico del contenido (PCK), Representación del Contenido (CoRe), Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), Formación de profesores de matemática de secundaria, función cuadrática.*

### Abstract

*Teaching Content Knowledge, known as Pedagogical Content Knowledge (PCK), is relevant because it allows the identification of knowledge, strategies and beliefs of teachers. However, due to its own nature, it is complex to collect and describe. This research (which is part of a larger one) intends to characterize the PCK of pre-service teachers (EPP) of Mathematics and Physics in terms of the quadratic function, using Content Representation (CoRe) as a tool. PCK has been characterized taking into account the categories of the subdomains of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge - MTSK model. This study will allow pre-service teachers to reflect on mathematical and teaching knowledge of the subject matter.*

**Keywords:** *Pedagogical knowledge content (PCK), Content Representation (CoRe), Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), Secondary School Mathematics teacher training, quadratic function.*

### INTRODUCCIÓN

Dos son las principales preocupaciones de los formadores de futuros docentes de matemáticas, por un lado, que interioricen y comprendan el contenido matemático, y por otro, que sepan enseñarlo. Debido a las dificultades que presentan los estudiantes para profesor (EPP en adelante), tanto en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la función cuadrática como en la planificación y ejecución de sesiones de clase, se ha considerado la necesidad de conocer cómo es el PCK de los estudiantes respecto de este tema, de modo que se les pueda orientar a lo largo de su formación. Pero determinar este conocimiento didáctico no es sencillo, por lo que existen herramientas que permiten describirlo, tal es el caso de entrevistas, análisis de videos, observaciones de clase y las

desarrolladas por Loughran, Mulhall y Berry (2004), la Representación del Contenido (CoRe) y los Repertorios de Experiencia Profesional y Didáctica. Para este estudio solo se ha utilizado el CoRe con el objetivo de caracterizar el conocimiento didáctico del contenido (PCK) respecto a la función cuadrática como punto de inicio o referencia de un estudio más amplio donde se analizarán las prácticas de los EPP en función de las categorías del modelo MTSK.

Los objetivos específicos fueron recoger el conocimiento que tienen los EPP acerca de la enseñanza, así como de las características del aprendizaje y de los estándares de aprendizaje relacionados con el tema de función cuadrática.

A continuación, se desarrolla la fundamentación teórica que sustenta la investigación.

## FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se aborda en esta sección el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) con sus subdominios y categorías, el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y cómo recogerlo, y los estudios realizados sobre función cuadrática.

### **Modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* - MTSK**

Una de las líneas de investigación sobre la Formación de Profesores de Matemática se centra en el estudio del conocimiento profesional del profesorado, basándose en diversos modelos. El marco referencial que se ha tomado en este trabajo es el MTSK propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013). Este modelo parte de los trabajos sobre el conocimiento profesional desarrollados por Shulman (1986, 1987), y del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008).

El MTSK es un modelo teórico cuyo objetivo es estudiar analíticamente el conocimiento del profesor y, a la vez, se le considera como herramienta metodológica para analizar las prácticas pedagógicas tomando como base sus categorías (Flores, Escudero y Aguilar, 2013). Está compuesto por dos dominios: El *Conocimiento Matemático* (MK, *Mathematical Knowledge*) y el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK, *Pedagogical Content Knowledge*), cada uno de los cuales posee tres subdominios.

En este informe se explicará con mayor detalle los subdominios del PCK ya que el objetivo del estudio es caracterizar el conocimiento didáctico del contenido de los EPP de matemáticas.

El primer subdominio del PCK es el *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT, *Knowledge of Mathematics Teaching*), referido al conocimiento que tiene el profesor sobre las características del contenido matemático como objeto de enseñanza, condicionadas por la naturaleza misma del contenido (Escudero, 2015). Este subdominio incluye “vías, recursos y formas de enseñar matemáticas [...] conocimiento que posee de diferentes estrategias y teorías institucionales o personales de enseñanza de las matemáticas” (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015, p. 597). Este subdominio está conformado por tres categorías: la primera categoría, Teorías de enseñanza (C1), estudia –como su mismo nombre lo indica– el conocimiento sobre teorías y formas de enseñanza asociadas a un determinado contenido matemático basado en resultados de investigación en Educación Matemática y en Didáctica de la Matemática. Incluye, además, el conocimiento sobre teorías personales de enseñanza. La segunda categoría, Recursos materiales y virtuales (C2), considera el conocimiento de las características matemáticas específicas de los recursos utilizados para la enseñanza del contenido matemático en particular y no solo al conocimiento del recurso como tal. La tercera categoría, Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (C3), constituye todo aquello que el profesor debe conocer respecto de las potencialidades, limitaciones y repercusiones de las mismas para elegir las más adecuadas en el proceso de enseñanza del contenido matemático (Escudero-Ávila, Contreras y Vasco, 2016).

El segundo subdominio es el *Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, Knowledge of Features of Learning Mathematics)* que Escudero (2015) define como el “conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general” (p. 44); con ello, la importancia recae en las características de aprendizaje derivadas de la interacción de los estudiantes con el contenido matemático. En palabras de Escudero-Ávila, Climent y Vasco (2016) “su foco principal lo constituye el contenido matemático como objeto de aprendizaje” (p. 43). Este subdominio está compuesto por cuatro categorías. Siguiendo la numeración a partir de las anteriores, la cuarta categoría, Teorías de aprendizaje (C4), considera el conocimiento de teorías de aprendizaje personales o formales asociadas al aprendizaje tanto de la matemática en general como a contenidos específicos. La quinta categoría, Fortalezas y dificultades (C5), se refiere tanto al conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido como al conocimiento de los errores, obstáculos y dificultades típicos y atípicos de aprendizaje que pueden presentar los alumnos sobre un contenido matemático específico; no obstante, se incluyen en esta categoría solo las que son propias del contenido matemático. La sexta categoría, Formas de interacción con un contenido matemático (C6), tiene en cuenta el conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, típicos y atípicos (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013; citado en Escudero-Ávila et al., 2016). Asimismo, incluye el conocimiento que tiene el profesor sobre los modos de aprehensión asociados a la naturaleza del contenido matemático (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017). La séptima categoría, Intereses y expectativas (C7), se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre las principales motivaciones de sus alumnos al abordar un contenido matemático, así como al conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad, preconcepciones o concepciones erróneas que pueden tener sobre un determinado contenido matemático (Escudero-Ávila et al., 2016).

El tercer subdominio es el *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, Knowledge of Mathematics Learning Standards)* que considera el conocimiento que tiene el profesor acerca de lo que sus alumnos deben lograr en un nivel determinado que, además de lo prescrito en el currículo, incluye las investigaciones y opiniones de profesores expertos (Flores et al., 2013). Presenta tres categorías, que presentamos siguiendo la numeración anterior. La octava categoría, Expectativas de aprendizaje (C8), contempla aquel conocimiento que tiene el profesor sobre lo que espera que sus alumnos aprendan en un nivel educativo específico. La novena categoría, Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (C9), se refiere al conocimiento sobre la profundidad con la que debe desarrollarse el contenido matemático, el mismo que debe ser acorde con el nivel educativo. Por último, la décima categoría, Secuenciación con temas anteriores y posteriores (C10), contempla el conocimiento sobre el ordenamiento de diversos contenidos matemáticos, ya sea dentro de un mismo curso o en cursos anteriores; esto es, los conocimientos y capacidades previas que posee un alumno para aprender un nuevo contenido en términos de lo que los estándares determinan, y lo que aportará este en el abordaje de temas posteriores (Escudero-Domínguez y Carrillo, 2016).

### **El PCK y cómo capturarlo**

Pinto y González (2006), Pinto y González (2008) y Van Driel, Verloop y De Vos (1998), que han realizado investigaciones sobre el PCK en general y en el campo de la matemática, evidencian la complejidad en la comprensión, descripción, análisis y caracterización del PCK, debido a la propia naturaleza del conocimiento profesional. Baxter y Lederman (1999) afirman que como el PCK no puede observarse directamente por ser un constructo interno, es complejo, tácito y de difícil acceso para articular y registrar.

Si bien el PCK se desarrolla a través de la experiencia de los profesores en aula, conocerlo es verdaderamente importante. Su aporte tanto en programas de formación de maestros como en los de servicio es ineludible (Lehane y Bertram, 2016). Después de años de investigación, se ha concluido

que la mejor forma de caracterizar el PCK es a partir de observaciones del desempeño docente y entrevistas donde se consulte sobre cómo, por qué y para qué enseña un determinado contenido. Pinto y González (2006) concluyen que cerca del 88% de investigaciones se centran en el conocimiento del contenido a enseñar y menos de la mitad en el conocimiento de la didáctica específica del contenido.

Para capturar el PCK es necesaria una combinación de enfoques y herramientas, una de ellas –la utilizada en este estudio– es la Representación del Contenido (*CoRe, Content Representation*) propuesta por Loughran et al. (2004). Lehane y Bertram (2016) sostienen que la función principal del CoRe es evidenciar el nivel de comprensión que tienen los profesores respecto a un contenido específico, a través de las siguientes ocho preguntas (Loughran et al., 2004, p. 376):

P1: ¿Qué intentas que los estudiantes aprendan alrededor de esta idea?

P2: ¿Por qué es importante para los estudiantes aprender esta idea?

P3: ¿Qué más sabes sobre esta idea? (Lo que tú no vas a enseñar por ahora a los estudiantes)

P4: ¿Cuáles son las dificultades y limitaciones conectadas a la enseñanza de esta idea?

P5: ¿Qué conocimiento acerca del pensamiento de los estudiantes influye en tu enseñanza de esta idea?

P6: ¿Cuáles otros factores influyen en la enseñanza de esta idea?

P7: ¿Qué procedimientos empleas para que los alumnos se comprometan con la idea?

P8: ¿Qué maneras específicas utilizas para evaluar el entendimiento o confusión de los alumnos sobre la idea?

En el 2011, Hume y Berry (2011, citados en Lehane y Bertram, 2016) concluyeron que el proceso de construcción del CoRe en futuros profesores, dada la poca experiencia en aula, es una tarea compleja; pero con la ayuda oportuna de profesores expertos logran mejorar no solo sus CoRe sino que podían acceder al conocimiento de profesores con experticia tanto en el contenido temático como en el pedagógico.

### **Estudios sobre la función cuadrática**

Dada la complejidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función cuadrática, es de interés caracterizar el PCK de los EPP. La dificultad en la comprensión de este objeto matemático va desde la etapa escolar hasta la universitaria.

Manrique, Gallo y Gallardo (2017) en el estudio que realizan sobre el estado del arte del concepto de función mencionan las investigaciones desarrolladas por autores como Amaya, Pino-Fan y Medina (2016), Flores (2004), Gómez y Carulla (2001) o Hitt (2003), entre otros. Estas investigaciones evidencian las dificultades que subyacen a la enseñanza de este tema, en las que predomina una manipulación algebraica de ecuaciones como forma de trabajar el concepto de función cuadrática, así como una crítica a la metodología tradicional, ya que los estudiantes “repiten” los conceptos sin comprenderlos. Los autores afirman que se abusa del registro algebraico, que conlleva dificultades para relacionarlo con los distintos registros de representación.

Muchos investigadores en educación matemática señalan que, para llegar a la comprensión de un concepto en toda su amplitud, es necesario recurrir a diversos sistemas de representación, ya que cada uno de ellos aporta o hace “visible” ciertas características (Duval, 1998). Castro y Castro (1997, citado en Blázquez y Ortega, 2001) señalan que los sistemas de representación utilizados para trabajar el concepto de función son: verbal, tabular (numérico), gráfico (visual) y algebraico (simbólico). En este estudio se ha denominado sistema de representación verbal al que hace uso del lenguaje común o natural para representar situaciones reales o matemáticas; el sistema numérico a aquel que hace uso de valores numéricos específicos que se representan en una tabla de valores o de

forma tabular; el sistema gráfico a aquel que hace uso del plano cartesiano y el simbólico a aquel que hace uso del campo algebraico y en el que se consideran tres formas simbólicas de representar la función cuadrática: estándar, canónica y multiplicativa (Gómez y Carulla, 2001).

## METODOLOGÍA

La población se conformó por nueve EPP, por este motivo el método empleado en esta investigación ha sido el estudio de casos con el que se ha caracterizado el PCK de los nueve estudiantes de pregrado, que cursaron la asignatura de Práctica preprofesional B, en el VIII ciclo de la carrera de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (Perú) en el segundo semestre del año 2018. Cabe señalar que estos EPP aún no tienen experiencia ejecutando sesiones de aprendizaje en aulas de instituciones educativas. Sin embargo, han conducido sesiones de aprendizaje sobre función cuadrática (véase Tabla 1) con sus compañeros del curso en la asignatura de práctica preprofesional. La carrera se compone de diez ciclos académicos y en cuya malla curricular se contemplan asignaturas de formación básica o general, formativas (pedagógicas y curriculares), humanísticas y de especialidad (asignaturas que abordan contenido matemático y didáctico). El ámbito corresponde al Conocimiento y Desarrollo profesional del profesor (Llinares, 2008) y la metodología de investigación es de tipo cualitativa.

Los contenidos desarrollados por cada uno de los EPP ( $A_1, A_2, \dots, A_9$ ) sobre función cuadrática, que asignó la docente de la asignatura de práctica preprofesional B, se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1. Contenido desarrollado por los nueve EPP: Función cuadrática

Alumno	Contenido matemático
$A_1$	Definición/Notación. Propiedades
$A_2$	Simetría de una función. Dominio y Rango
$A_3$	Sistema de representación simbólico
$A_4$	Estudio de la función estándar como suma de funciones
$A_5$	La función cuadrática como Polinomio de 2° grado y como ecuación cuadrática
$A_6$	Sistema de representación gráfico
$A_7$	Sistema de representación numérico y aplicaciones físicas
$A_8$	Sistema de representación verbal y aplicaciones matemáticas
$A_9$	Conversión del registro gráfico al algebraico

Tomando como base el cuestionario (CoRe) se realizó un análisis de contenido para determinar el PCK de los EPP respecto a la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática; para ello se han relacionado los subdominios del PCK y sus categorías con las preguntas del CoRe, tal como se observa en la Tabla 2.

Tabla 2. Relación entre el CoRe y los subdominios y categorías del PCK

Subdominios del PCK	Categorías de los subdominios	CoRe
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. KMT	C1	P6
	C2	P4 y P7
	C3	P7, P5, P4 y P8
	C4	P6
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas. KFLM	C5	P4
	C6	P5
	C7	P2
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. KMLS	C8	P2
	C9	P1 y P3
	C10	_xxviii

Para poder organizar, presentar y analizar la información recogida de los cuestionarios del CoRe, aplicados en forma individual a cada uno de los nueve EPP, se ha utilizado la técnica del análisis del contenido. Para ello, se establecieron y definieron las unidades de análisis  $UA_i$  a partir de las respuestas dadas por los EPP al cuestionario CoRe –previamente codificadas– y estas se clasificaron en función de las categorías de cada uno de los subdominios del PCK en hojas de codificación (Hernández, Fernández y Baptista, 2003). Las unidades de análisis relacionadas dieron lugar a la formación de las Ideas Núcleo ( $IN_i$ ), tal como se puede evidenciar en la Figura 1:

La  $IN_2$  se obtuvo a partir de las  $UA_{29}$  y  $UA_{30}$  (respuestas del alumno  $A_1$  al cuestionario CoRe) y que pertenecen a la Categoría 3 del subdominio KMT del PCK.

$UA_{29}$ : “En esta parte se usaron comparaciones de una actividad cotidiana con el tema”.

$UA_{30}$ : “Se hace demostraciones con alguna parte del cuerpo como herramienta para recordar los conceptos y diferencias de términos”.

$IN_2$ : Emplea procedimientos para relacionar el contenido matemático con sucesos de la vida diaria.

$IN_2 = PCK, KMT, C3, P7, A_1, UA_{29} \text{ y } UA_{30}$ .

En general, las ideas núcleo se han obtenido de la forma:

$IN_i = \text{Dominio, Subdominio, Categoría, CoRe, } A_i, \text{ Unidades de análisis}$

Figura 1. Obtención de las Ideas Núcleo

Finalmente, la síntesis de las ideas núcleo ha permitido obtener información del conocimiento didáctico del contenido en función de cada una de las categorías del PCK. A continuación, se presentan los resultados de cada uno de los subdominios del PCK de los EPP de matemáticas.

## RESULTADOS

### Resultados del subdominio Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas - KMT

Respecto a la C1, teorías de enseñanza asociadas a la función cuadrática, los nueve EPP manifiestan que los alumnos deben participar activamente en la adquisición del contenido a aprender y para que se produzca el aprendizaje se debe tener presente que el conocimiento a enseñar debe ser significativo, interpretativo y no memorístico; seis sostienen que se debe preguntar continuamente a los alumnos para saber si entienden lo que se les va explicando, resolver dudas, aclarar conceptos y retroalimentar; y siete señalan que deben establecerse relaciones entre el contenido de enseñanza y los sucesos de la vida cotidiana, contextualizar sus ejemplos y problemas y deben relacionarse los conocimientos previos con el contenido a desarrollar. Seis EPP indican que se debe promover tanto el trabajo individual como el grupal de modo que se generen espacios de diálogo, discusión y análisis para que ellos mismos construyan sus aprendizajes.

En cuanto a la C2, recursos materiales y virtuales, cinco EPP manifiestan que se debe trabajar con softwares matemáticos graficadores, que potencian la capacidad de observación de modo que sean los propios alumnos los que propongan sus hipótesis y las comprueben a través del trabajo con gráficas. Además de visualizarlas, podrán relacionar los sistemas de representación de la función cuadrática y sus transformaciones y/o conversiones, así como deducir las implicancias en la gráfica al variar los elementos de la representación simbólica. Señalan también que el tema función cuadrática limita la utilización de material concreto, ya que es muy analítico.

En la C3, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, todos los EPP coinciden en señalar que es la participación activa de los alumnos la que ayuda a la adquisición del contenido a aprender, así como la utilización de ejemplos adecuados y la retroalimentación constante por parte del docente. Siete EPP señalan la importancia de relacionar el concepto y propiedades de la función cuadrática con los sucesos cotidianos, tratando de representar el contenido matemático de manera concreta, utilizando

ejemplos y/o problemas reales, así como emplear el recurso de la visualización, descripción que coincide con Gómez y Carulla (2001). Muy pocos, tres, opinan que se debe hacer uso de contraejemplos. La mayoría de los EPP (ocho de nueve) piensan que solo se pueden hacer conversiones del registro algebraico al gráfico y no al revés. Por otro lado, los EPP piensan que los alumnos se motivan cuando el aprendizaje se realiza tanto a través del juego o competencias, como con la utilización de recursos visuales; además señalan que el tema es novedoso pero complejo. Respecto a las dificultades y limitaciones conectadas a la enseñanza de Funciones Cuadráticas, ocho EPP indican que los alumnos no poseen los conocimientos previos necesarios para comprender el tema (presentan dificultades con las operaciones algebraicas, limitaciones para completar cuadrados, no identifican las formas de representación simbólica, manifiestan dificultades para sumar y/o restar gráficamente la función lineal con la cuadrática; no diferencian ecuación de función cuadrática, entre otros). Siete señalan que deben hacerse preguntas y aplicar fichas de ejercicios para que los alumnos las resuelvan solos o en grupo, y cinco expresan que se debe utilizar y trabajar las representaciones gráficas; así como solicitar a los alumnos explicaciones y demostraciones de lo que se va desarrollando.

### **Resultados del subdominio Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas – KFLM**

En la C4, teorías de aprendizaje, dos de los nueve EPP consideran que un aspecto a tener en cuenta es la organización de los contenidos a aprender, que deben ordenarse y secuenciarse de manera que se favorezca el aprendizaje; primero teniendo claridad en los conceptos de función cuadrática, elementos y propiedades para luego estudiar las transformaciones y conversiones entre registros.

Respecto a la C5, fortalezas y dificultades conectadas al aprendizaje de función cuadrática, ocho EPP indican que una de las mayores dificultades que presentan los alumnos es que no recuerdan o no poseen los conocimientos necesarios para comprender el tema, conflictuándose, incluso, porque no saben diferenciar la ecuación de la función cuadrática. Entre las fortalezas observadas, cinco EPP comentan que los alumnos hacen uso de recursos tecnológicos.

En cuanto a la C6, formas de interacción de los estudiantes con el contenido función cuadrática, ocho de los nueve EPP piensan que los alumnos solo hacen conversiones del registro algebraico al gráfico y no al revés, ya que así se lo enseñaron en el colegio y es la forma en la que se presenta el tema en los libros de texto. Asimismo, cinco afirman que los alumnos aprenden mejor cuando están motivados; indican que el aprendizaje es más fácil y comprensivo si se recurre a herramientas y técnicas visuales, de modo que el alumno no tiene que “imaginarse” el objeto matemático, sino que puede observarlo directamente, hipotetizar, comprobar y elaborar sus propias conclusiones, tal como señala Hitt (2003).

En la C7, referida a intereses y expectativas, siete de los nueve EPP señalan la importancia de comprender el tema de función cuadrática para establecer relaciones entre este concepto y los sucesos cotidianos. A tres EPP no les es familiar ni la forma canónica ni la multiplicativa, solo la forma estándar. Siete de los EPP participantes resaltan la importancia de representar el contenido matemático de manera concreta, aplicando las funciones cuadráticas a situaciones reales.

### **Resultados del subdominio Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas - KMLS**

En la C8, expectativas de aprendizaje, tres de los nueve EPP mencionan la aplicación del concepto y propiedades de la función cuadrática para resolver problemas cotidianos, así como demostrar a los alumnos que no solo se pueden hacer conversiones en un solo sentido –del algebraico al gráfico– sino en ambos. Asimismo, dos EPP expresan que se deben identificar los elementos y propiedades de la parábola para modelizar matemáticamente situaciones reales.

En cuanto a la C9, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, cada uno de los EPP indican que saben otros contenidos que no los enseñarían porque no los consideran necesarios para el nivel de educación secundaria, como la suma y diferencia de funciones (dos de nueve EPP), el estudio de la parábola como sección cónica (solo uno), la demostración de fórmulas para determinar el eje de simetría, el vértice, etc. (dos de nueve), así como la identificación de la representación simbólica a partir de la gráfica (únicamente un EPP).

## CONCLUSIONES

El objetivo de este informe ha sido presentar la caracterización sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido de función cuadrática de los estudiantes para profesor de matemática.

Los EPP tienen un conocimiento formal de teorías de enseñanza de manera general, pero un conocimiento empírico de las teorías de enseñanza de las matemáticas, que es lo que el modelo MTSK contempla; por ello se puede afirmar que conocen ciertos aspectos que les permiten “generar” una teoría empírica o personal de enseñanza. En cuanto a las estrategias de enseñanza, los EPP señalan que estas deben ser diseñadas de tal manera que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones y construir el conocimiento por sí mismos.

Respecto a los recursos materiales y virtuales, los EPP señalan la importancia de la utilización de software gráfico que ayude en la visualización de las representaciones gráficas de la función cuadrática; aunque trabajan primero el proceso de tabulación. Esto permitirá a los alumnos relacionar dos registros de representación, ya que, si solo trabajan uno, no se llega a la comprensión del objeto matemático y su aprendizaje se reduce a la manipulación algebraica.

Se advierte la importancia que los EPP le dan a la utilización de ejemplos y situaciones relacionadas con la vida cotidiana para motivar a los alumnos, ya que trabajar con hechos reales conlleva un aprendizaje significativo. Asimismo, mencionan la aplicación de actividades de transformación y/o conversión que apoyarán a la comprensión del concepto de función cuadrática y a la relación entre los diversos sistemas de representación a través del proceso de visualización. Respecto al conocimiento que tienen los EPP sobre Teorías de aprendizaje, puede señalarse que, si bien los estudiantes no mencionan formalmente teorías de aprendizaje sobre función cuadrática, sí hacen mención a ciertos aspectos que podrían entenderse como teorías personales, tratando de acercar a los estudiantes a hechos reales, indicando la importancia de modelizar matemáticamente situaciones cotidianas.

Los EPP conocen varios softwares matemáticos (Cabri, Derive o GeoGebra) y aunque no se cuenta con datos sobre si conocen sus características matemáticas y didácticas, se puede advertir su uso en el proceso de aprendizaje. Los EPP señalan la importancia de observar y analizar las repercusiones que tienen en las representaciones gráficas las variaciones de los parámetros de la representación simbólica de la función cuadrática, así como la comprensión de las propiedades y elementos de la misma. Todos los EPP mencionan que una dificultad que podrían presentar los alumnos es determinar la expresión simbólica de la función cuadrática a partir de la gráfica, debido a que no se evidencian este tipo de tareas y/o ejemplos en los libros de texto ni en materiales curriculares.

Se ha realizado una búsqueda de la aplicación del CoRe para caracterizar el PCK de los profesores en el campo de la matemática; sin embargo, no se ha podido identificar en esta área la utilización de esta herramienta.

## Referencias

Amaya, T. R., Pino-Fan, L. R. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación matemática*, 28(3), 111-144.

- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Baxter, J. A. y Lederman, N. G. (1999). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 147-161). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME*, 4(3), 219-236.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University y ERME.
- Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 22, 185-205.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Escudero, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Huelva, Huelva.
- Escudero-Ávila, D., Climent, N. y Vasco, D. (2016). Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 42-48). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Escudero-Ávila, D., Contreras, L. C. y Vasco, D. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 35-41). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Escudero-Domínguez, A. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva*. (pp. 49-54). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Flores, C. D. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME*, 7(3), 195-218.
- Flores, E., Escudero, D. I. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2001). Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática. En M. L. Tirado (Ed.), *Educación en Matemáticas* (pp. 337-363). Bogotá, Colombia: IDEP.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación (3ª ed.)*. México D. F., México: McGraw Hill.
- Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213-223.
- Lehane, L. y Bertram, A. (2016). Getting to the CoRe of it: A review of a specific PCK conceptual lens in science educational research. *Educación Química*, 27(1), 52-58.

- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en educación matemática en España: una aproximación desde “ISI-web of knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz: SEIEM.
- Loughran, J., Mulhall, P. y Berry, A. (2004). In search of pedagogical content knowledge in science: Developing ways of articulating and documenting professional practice. *Journal of Research in Science Teaching*, 41(4), 370-391.
- Manrique, J., Gallo, A. y Gallardo, H. (2017). *Estado del arte alrededor del concepto de función*. En R. Prada (Coordinador), II Encuentro Internacional en Educación Matemática. Universidad Francisco de Paula Santander, San José de Cúcuta, Colombia.
- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 18(3), 589-605.
- Pinto, J. E. y González, M. T. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas: una aproximación para su estudio. En P. Bolea, M. Moreno y M. J. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Actas del X Simposio de la SEIEM* (pp. 237-255). Huesca: SEIEM e Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Pinto, J. E. y González, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación matemática*, 20(3), 83-100.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Van Driel, J. H., Verloop, N. y De Vos, W. (1998). Developing science teachers’ pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, 35(6), 673-695.

---

<sup>xxviii</sup> La categoría 10 no se puede relacionar con ninguna de las preguntas del CoRe.