

IMPLICACIONES METODOLÓGICAS DE UN ENFOQUE SEMIÓTICO-ANTROPOLÓGICO PARA LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

JUAN D. GODINO
Universidad de Granada

RESUMEN:

En esta ponencia presentamos las principales nociones teóricas que caracterizan el enfoque de investigación emergente que describimos como "semiótico-antropológico" para la Didáctica de las Matemáticas, describimos una agenda de investigación derivada de dicho enfoque y las estrategias metodológicas consecuentes.

De acuerdo con este marco teórico una agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas se puede describir en términos de «semiometría» (caracterización), «ecología» (interacción) y «dinámica» (evolución) de significados de los objetos matemáticos, aplicables a las facetas epistemológica, cognitiva e instruccional puestas en juego en el estudio de las matemáticas.

Analizamos, asimismo, las relaciones entre el enfoque teórico adoptado para la investigación didáctica, los problemas de investigación específicos y los métodos y técnicas de investigación, resaltando la dependencia de las cuestiones de validez, relevancia y metodología de las investigaciones del enfoque teórico adoptado.

1. RELACIONES ENTRE TEORÍAS, PROBLEMAS Y MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

El hilo argumental de los diversos trabajos presentados en el "ICME Study" celebrado en Washington en 1994, y publicados en Kilpatrick y Sierpinska (1998), fue la pregunta: *¿Qué es un problema de investigación en Educación Matemática y cuáles son sus resultados?* La variedad de los trabajos incluidos en esta publicación indica la complejidad del problema y su dependencia de los marcos teóricos y metodológicos existentes en el área de conocimiento.

Pensamos que el planteamiento de problemas de investigación científica requiere tener en cuenta el sistema de ideas previas elaboradas por la comunidad interesada en la solución de los mismos, los cuales generalmente están articulados en principios,

marcos conceptuales y teorías. A su vez, los resultados pretendidos adoptan la forma de nuevos conocimientos, integrados en las teorías previas y validadas con unos procedimientos metodológicos aceptados. Por tanto, la teoría constituye un punto de partida y de llegada dentro del bucle investigativo, y el método es un elemento mediador fundamental entre los problemas, los hechos y los nuevos conocimientos, como se refleja en la figura 1.

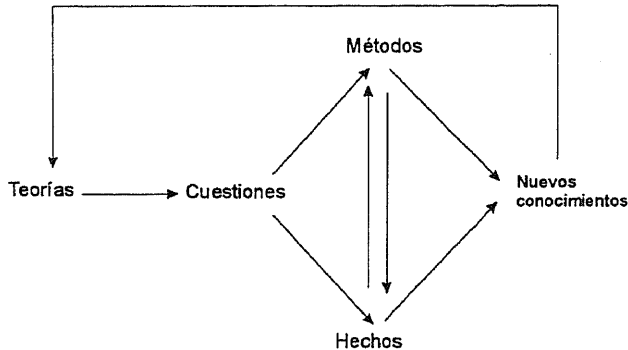


Figura 1: Relaciones entre teoría, problemas y métodos en la investigación

La solución de los problemas de investigación, con criterios de calidad científica, precisa realizar un trabajo sistemático y disciplinado que garantice la validez y fiabilidad de las afirmaciones pretendidas, esto es, debe estar guiada por una metodología adecuada de investigación y por instrumentos teóricos adaptados a las peculiaridades de la investigación requerida. Los fines de la investigación pueden ser la exploración, descripción, predicción, explicación o la acción sobre un campo de problemas; el logro de tales fines requiere observar o evaluar los hechos correspondientes, así como reducir, comparar y relacionar los datos recogidos empleando diversos procedimientos técnicos. Las regularidades así identificadas en los hechos, explicadas dentro de un marco teórico pertinente, constituyen los *fenómenos* que caracterizan el campo objeto de indagación.

En esta ponencia vamos a analizar esta cuestión de las relaciones entre teoría, problemas y métodos de investigación en Didáctica de la Matemática, particularizada en el caso del enfoque que denominamos "semiótico-antropológico" en el que venimos trabajando desde 1993 en el seno del Grupo de Investigación, "Teoría y Métodos de Investigación en Educación de la Matemática" de la Universidad de Granada (véase la página web: <http://www.ugr.es/local/jgodino/semioesp/indices.htm>).

Presentamos, en primer lugar, las principales características de nuestro modelo teórico, que como afirman Kilpatrick y Sierpiska (1998, p.535), constituye «un marco teórico -ciertamente una epistemología- especialmente adaptada para las necesidades de investigación en educación matemática».

2. EL ENFOQUE SEMIÓTICO-ANTROPOLÓGICO PARA LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Con la expresión “enfoque semiótico-antropológico” describimos el modelo teórico para la didáctica de las matemáticas que adopta la noción de *significado* como clave para analizar la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento matemático. Se asumen, asimismo, los presupuestos básicos de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (1953; 1978) y la teoría antropológica desarrollada por Chevallard (1992; 1997) para la Didáctica, aunque reconocemos que la compatibilidad y complementariedad de estos modelos teóricos es un tema abierto que requiere nuevas investigaciones.

No se trata de un modelo teórico acabado sino de un sistema de nociones en proceso de elaboración y desarrollo cuya idea impulsora consiste en tratar de articular dentro de un sistema coherente las dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, adoptando nociones semióticas como enfoque integrador. En cierto modo tratamos de relacionar las epistemologías del significado que describen Sierpiska y Lerman (1996) para referirse a los trabajos de Steinbring (1997), la aproximación a la educación matemática basada en el interaccionismo simbólico (Coob y Baurfeld, 1995; Godino y Llinares, en prensa), la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y la teoría antropológica de Chevallard.

El enfoque semiótico-antropológico se configura en torno a tres modelos teóricos emergentes cuyas características principales describimos en los apartados 2.1 a 2.6 de este trabajo. Se trata de los siguientes modelos:

- Teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998), que es, al menos en parte, equivalente al componente epistemológico de la teoría antropológica desarrollada por Chevallard (1992; 1997), al partir ambas teorizaciones de los supuestos básicos de la filosofía de Wittgenstein (1953; 1978).

- Teoría de las funciones semióticas (Godino y Recio, 1998; Godino y Batanero, en prensa), que es el germen de una teoría semiótico-cognitiva basada en presupuestos lingüísticos (Hjemslev, 1943; Eco, 1979).

- Teoría de las trayectorias didácticas (Godino, 1999), que proponemos como modelización de los procesos de instrucción matemática. Este modelo interpreta y extiende el componente instruccional de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y la teoría de los momentos didácticos (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Aunque el foco de atención de este trabajo es el análisis de las relaciones entre teoría y método en la investigación didáctica, en el caso particular de nuestro enfoque semiótico-antropológico, consideramos necesario presentar brevemente las principales nociones de las tres teorías mencionadas. Remitimos al lector a las referencias citadas para ampliar esta síntesis.

2.1. Nociones primitivas: situaciones matemáticas y prácticas

Nuestro modelo teórico parte de la noción de *situación-problema* como noción primitiva. Para una persona, una situación-problema es cualquier circunstancia en que debe realizar actividades de matematización (Freudenthal, 1991), esto es,

- construir o buscar soluciones que no son inmediatamente accesibles;
- inventar una simbolización adecuada para representar la situación y las soluciones encontradas, y para comunicar estas soluciones a otras personas;
- justificar (validar o argumentar) las soluciones propuestas;
- generalizar la solución a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos.

Una clase de situaciones-problemas mutuamente relacionados, que comparten soluciones, procesos o representaciones similares se consideran como un *campo de problemas*. El sujeto realiza distintos tipos de *prácticas* o acciones para resolver un problema matemático, para comunicar la solución a otras personas, para validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas. El conocimiento surge como consecuencia de la interacción del sujeto con el campo de problemas, siendo mediatizado por los contextos institucionales correspondientes.

2.2. Nociones derivadas: Objetos y significados

Para estudiar los procesos cognitivos y didácticos se introducen dos unidades secundarias de análisis, las *prácticas significativas* y el *significado de un objeto*, para las cuales se postulan dos dimensiones interdependientes: personal e institucional. Una práctica es significativa para una persona (resp. una institución) si cumple una función para resolver el problema, para comunicar, validar, o extender su solución. Las prácticas significativas son, por tanto, formas expresivas situadas orientadas a un objetivo, e implican una situación-problema, un contexto institucional, una persona, y las herramientas semióticas que meditan la acción.

El sistema de prácticas prototípicas significativas, esto es, el sistema de prácticas eficientes para alcanzar el fin pretendido es considerado como el *significado (sistémico) del objeto personal* (resp. institucional). Dicho sistema de prácticas es el origen genético (epistemológico) de los objetos personales (o de los objetos institucionales), y está ligado al campo de problemas que induce la actividad de los sujetos hacia su solución. El término 'significado' lo usamos en nuestro modelo teórico como equivalente a *contenido* de una función semiótica (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943), no en su sentido tradicional de entidad psicológica.

2.3. Tipos de prácticas y objetos emergentes

La noción de práctica hace intervenir un sujeto enfrentado a una tarea, usando diversos instrumentos ostensivos y estando la acción dirigida a la realización de dicha tarea. En nuestro modelo teórico proponemos considerar las prácticas prototípicas como acciones tipificadas (o reguladas) para realizar una clase de tareas. Tales acciones pueden ser descriptivas (de situaciones y de objetos emergentes), procedimentales o argumentativas.

Desde un punto de vista formal y funcional postulamos la existencia de los siguientes tipos primarios de objetos o entidades emergentes de subsistemas de prácticas y que se ponen en juego en la actividad matemática:

- *Ostensivas*: representaciones materiales usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos; en general incluimos en esta categoría las entidades lingüísticas/ notacionales).

- *Extensivas*: las entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones).

- *Actuativas*, modos de actuar ante situaciones o tareas (procedimientos, algoritmos, operaciones).

- *Validativas*: tipos de argumentaciones para validar proposiciones (demostraciones, comprobaciones, justificaciones).

- *Intensivas*: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones).

Esta clasificación nos parece natural si tenemos en cuenta los tipos de entidades que podemos identificar de manera inmediata en un texto matemático:

- notaciones, símbolos, texto ordinario;
- enunciados de problemas, ejercicios;
- definiciones de conceptos, enunciados de proposiciones;

- operaciones, algoritmos;
- demostraciones; comprobaciones.

Además de estas entidades primarias debemos considerar también *entidades secundarias* que articulan varias entidades primarias, como pueden ser una teoría matemática, en la cual se ponen en juego, notaciones, campos de problemas, definiciones, enunciados, operaciones, algoritmos, demostraciones. Podemos denominar a estas entidades secundarias -como proponen Chevallard, Bosch y Gascón (1997)- *organizaciones matemáticas (o praxeologías)*, que consideran formadas por la cuaterna [tareas, técnicas, tecnologías y teorías]. Estos componentes de las praxeologías son equivalentes, al menos parcialmente, a las entidades que hemos denominado extensionales (cuestiones/ tareas), actuativas (técnicas, modos de hacer), validativas (tecnologías, justificaciones de las técnicas), intensionales (teorías).

En nuestro caso consideramos necesario tener en cuenta además las entidades *ostensivas* (notacionales) por el papel instrumental y representacional que desempeñan en la actividad matemática y en los procesos de difusión del conocimiento matemático. Los cinco tipos de entidades primarias descritas constituyen los *elementos estructurales* del significado de una organización matemática.

2.4. Funciones semióticas

La noción de *función semiótica* constituye la entidad que permite tener en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático. Nos permite, además, formular en términos semióticos, y de una manera general y flexible el *conocimiento matemático*.

Hjelmslev (1943) llama función a la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se dice que hay función entre una clase y sus componentes y entre los componentes entre sí. A los terminales de una función (expresión y contenido) los llama *funtivos*, esto es, cualquier objeto que tiene función con otros.

La correspondencia entre expresión y contenido se establece en base a códigos explícitos o implícitos. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los *funtivos* que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas. Los cinco tipos de entidades primarias descritas en el apartado 2.3. pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido de funciones semióticas (Godino y Batanero, en prensa).

En la tabla 1 presentamos un resumen de los tipos de funciones semióticas, atendiendo a distintos criterios, que nos parece relevante tener en cuenta para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 1998; Godino y Batanero, en prensa).

Tabla 1: Tipos de funciones semióticas

Criterio		Tipos	Descripción
Naturaleza del contenido		- <i>Ostensivas</i> - <i>Extensivas</i> - <i>Actualivas</i> - <i>Validativas</i> - <i>Intensivas</i>	El contenido de la función es una entidad ostensiva, extensiva, actuativa, validativa, intensiva, procesual o afectiva (respectivamente)
Agente que interpreta la expresión		- <i>Personal</i> - <i>Institucional</i>	Según que la correspondencia expresión-contenido se hace por un sujeto individual o es compartida en el seno de una institución
Papel desempeñado		- <i>Representacional</i> - <i>Instrumental</i>	Según que la expresión se pone en lugar del contenido, o el contenido usa como recurso la expresión
Grado de complejidad		- <i>Elemental</i> - <i>Sistémico</i>	Según el carácter uniforme o multiforme de las funciones semióticas
Factores Contextuales	Temporales	- <i>Ocasional</i> - <i>Atemporal</i>	Diversas circunstancias que condicionan los procesos de comunicación e interpretación
	Fenomenológicos	- <i>Interno (matemático)</i> - <i>Externo</i>	

2.5. Conocimiento y comprensión de las matemática

El modelo teórico esbozado permite hacer una interpretación del *conocimiento* y la *comprensión* de un objeto *O* (sea ostensivo, no ostensivo, simple o compuesto) por parte de un sujeto *X* (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego *O* como funtuvo. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas identificadas en la tabla 1.

En resumen, el modelo teórico que proponemos para la didáctica de las matemáticas postula una relatividad de los objetos matemáticos, intrínseca a los diferentes grupos de personas e instituciones implicadas en el campo de problemas correspondiente, y también dependiendo de las diferentes formas expresivas disponibles. Esta hipótesis puede ser útil para explicar las adaptaciones (o transposiciones) y las mutuas influencias que sufren los objetos matemáticos cuando son transmitidos entre personas e instituciones.

La evaluación del conocimiento de un sujeto y el diseño de situaciones didácticas para su desarrollo requiere tener en cuenta las diversas facetas o dimensiones identificadas (ostensiva, extensiva, actuativa, validativa, intensiva) y los diversos factores contextuales condicionantes de los procesos de semiosis implicados.

2.6. Esbozo de una teoría instruccional

La investigación didáctica debe afrontar el problema del estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en toda su complejidad. Aunque una investigación particular tenga que centrarse en aspectos específicos (análisis epistemológico y/o cognitivo de un concepto, o un reducido campo de problemas), no se debe perder de vista la perspectiva sistémica, y tratar de desarrollar modelos teóricos que articulen las facetas epistemológica, cognitiva e instruccional.

El foco de atención primario de una investigación didáctica debemos situarlo en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en el seno de los sistemas didácticos. Por tanto, se tratará de caracterizar la naturaleza y factores condicionantes de las relaciones entre un saber, los alumnos que tratan de apropiarse de dicho saber con la ayuda de un profesor, y bajo unas circunstancias contextuales determinadas. En su conjunto estos componentes definen un sistema dinámico, cuya evolución en el tiempo se puede modelizar (al menos metafóricamente) como un proceso estocástico, siendo necesario estudiar los estados del sistema y las trayectorias o secuencias de estados de cada uno de los componentes (Godino, 1999).

Una teoría instruccional coherente con el modelo epistemológico descrito debe tener en cuenta los siguientes criterios:

1) El estudio significativo de los objetos matemáticos debe poner en juego una muestra representativa de las prácticas que constituyen el significado sistémico de los mismos en el seno de un contexto institucional dado.

2) Los estudiantes deben tener oportunidad de explorar problemas relevantes para ellos, formular hipótesis y conjeturas, confrontar diferentes sistemas de representación, comunicar y validar las soluciones propuestas para los problemas a sus compañeros, así como confrontarlas con las convenidas en la cultura matemática.

3) El profesor debe actuar como organizador y director del proceso de estudio.

3. AGENDA DE INVESTIGACIÓN ASOCIADA AL ENFOQUE SEMIÓTICO-ANTROPOLÓGICO

Como se indica en Godino y Batanero (1998), una agenda de investigación para la Didáctica de las Matemáticas se puede describir en términos de «semiometría» (caracterización), «ecología» (interacción) y «dinámica» (evolución) de significados de los objetos matemáticos. La semiometría contempla lo que podemos describir como *estática de significados sistémicos*, esto es, la caracterización de la trama de las funciones semióticas (o al menos una muestra representativa de tal trama) en las cuales un objeto se pone en juego en un contexto y circunstancias fijadas. La «medida» de tales significados (sistemas de prácticas) tendrá un carácter cualitativo y será relativa a una persona, institución, contexto fenomenológico y momento temporal específico. «La medición es el proceso por medio del cual trasladamos el tipo o la intensidad de un concepto teórico en una variable particular» (Dane, 1990; p. 248). Este sentido general de medición es el que atribuimos al término 'semiometría', reconociendo, además en dicha «medición» al menos cinco dimensiones o cualidades inherentes al concepto teórico: intensional, extensional, actuativa, validativa e intensional.

La *ecología de significados* será el estudio de las condiciones de soporte de un objeto, su dependencia de otros objetos y de las funciones o papeles que desempeña en relación a los restantes objetos del sistema. La *dinámica de significados* analiza el cambio de los distintos elementos estructurales del significado de un objeto en el transcurso del tiempo

En la tabla 2 describimos algunos tipos de cuestiones de investigación didáctica clasificadas según dos dimensiones, cada una de ellas con tres facetas:

- Dimensión semiótica: semiometría, ecología y dinámica de significados;
- Dimensión didáctica: epistemológica, cognitiva e instruccional (ingeniería didáctica).

Representaremos por $SD = \langle X; Y; Z; O; C \rangle$ el sistema didáctico formado por un estudiante X , un profesor Y que se propone dirigir y ayudar al estudio a X ; un marco institucional de referencia Z , un objeto intensional O (concepto, proposición, teoría) y un contexto instruccional C que condiciona el proceso de estudio. Representaremos por PE un proceso de estudio particular, que tiene lugar en el intervalo de tiempo $[0, T]$, implementada por Y , en el marco Z y el contexto C , para ayudar a X en el estudio de O .

El enfoque semiótico-antropológico se caracteriza por el tipo de análisis que propone para el objeto matemático O , entidad emergente de un sistema de prácticas ante una cierta clase de situaciones-problemas, y concretada en un término o expresión matemática y su correspondiente regla de uso. La idea clave es asociar a O el sistema de prácticas del que emerge, entidad que se designa como "el significado de O ", así como atribuirle una doble dimensión: personal e institucional. En consecuencia, el objeto O del sistema didáctico considerado da lugar a tres tipos de objetos y significados: los correspondientes al marco institucional Z , $P(O_z)$, el profesor, $P(O_y)$, y el estudiante, $P(O_x)$. Los significados comprenden a su vez las facetas, ostensiva, extensional, actuativa, intensional y validativa.

Tabla 2: Pauta para la generación de problemas didácticos

	SEMIOMETRÍA (Medición)	ECOLOGÍA (Relación)	DINÁMICA (Cambio)
EPISTEMOLOGÍA (Objetos institucionales, O_z , O_y)	¿Qué significa O para Z [Y] en C ?	¿Con qué otros objetos O_i se relaciona y depende O en C ?	¿Cómo cambia $P(O_z)$ [$P(O_y)$] según C y el tiempo T ?
COGNICIÓN (Objetos personales, O_x)	¿Qué significa O para X en C ?	¿Qué relaciones establece X entre O y otros objetos matemáticos?	¿Cómo cambian $P(O_x)$ según C y el tiempo T ?
INSTRUCCIÓN (Interacción mediatizada entre O_z , O_y , O_x)	¿Qué puede hacer Y para ayudar a X a estudiar $P(O_z)$ con en C y el tiempo T ?	¿De qué factores depende la implementación del proceso PE ?	¿Cuáles han sido las trayectorias didácticas de cada componente del proceso PE ?

4. CONSECUENCIAS METODOLÓGICAS DEL ENFOQUE SEMIÓTICO-ANTROPOLÓGICO

Las cuestiones que hemos designado como «semiometría» (caracterización de significados) tienen un carácter esencialmente descriptivo. En nuestro caso, el modelo teórico aporta una tipología de objetos y de funciones semióticas, y por tanto, nuevas categorías de análisis que nos guían en la descripción.

En el caso de la «ecología de significados» el foco de atención es la búsqueda de relaciones entre los diversos tipos de significados y los factores condicionantes, por lo que cuando se pueda distinguir entre variables independientes y dependientes estamos en condiciones de explicar y predecir unos valores en función de los otros.

La «dinámica de significados» implica diseñar nuevos dispositivos de estudio para una organización matemática específica, o bien observar el cambio en sistemas didácticos existentes. El modelo teórico aporta criterios para seleccionar las componentes de los procesos didácticos posibles y elaborar pautas para la observación, encuesta o medida de las variables pertinentes.

Desde el punto de vista metodológico, en las investigaciones desarrolladas dentro del enfoque semiótico-antropológico se deben combinar diversos métodos y técnicas según las distintas facetas de la investigación, dependiendo del problema abordado en las mismas. Al igual que cada problema (o campo de problemas) matemático requiere sus conceptos y técnicas específicas para su solución, desde el punto de vista metodológico somos partidarios de emplear en cada caso los enfoques y técnicas de recogida y análisis de datos pertinentes al problema didáctico planteado. La reconstrucción retrospectiva, para su análisis posterior, de un proceso de estudio requiere registrar de manera sistemática y fiable la trama de hechos didácticos ocurridos: actuaciones del profesor, estudiantes, elementos del significado puestos en juego en cada momento, interacciones, etc. Los diversos métodos y técnicas de recogida de datos (observación, encuesta y medida) tiene que implementarse de manera racional y consistentes.

En consecuencia, se debe combinar el estudio documental en la componente epistemológica con diversas técnicas y enfoques en las partes experimentales, tanto cognitivas como instruccionales. En el estudio de la evolución de los significados personales de los estudiantes como consecuencia de un proceso de instruccional podemos utilizar el método experimental y cuasi-experimental, donde el control de variables, el tamaño de las muestras y su representatividad deben conferir una gran potencia y fiabilidad a los resultados del análisis estadístico de los datos. Por otro lado, y puesto que este enfoque nos indica las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, debemos completar el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo. Particularmente, el estudio de casos nos permite mostrar la consistencia de los significados personales sobre los objetos puestos en juego. Así mismo, la observación y registro de los episodios instruccionales muestra la complejidad semiótica de los procesos elementales de estudio de las matemáticas.

Evidentemente, puesto que el estudio cualitativo se hace con muestras de tamaño reducido su finalidad es exploratoria y están principalmente orientados a la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas formalmente en nuevas investigaciones.

Una implicación metodológica del enfoque semiótico-antropológico será reconocer un papel relevante a los estudios de casos, tanto de experiencias de enseñanza, como de sujetos y episodios didácticos. Esto es una consecuencia del reconocimiento de la complejidad ontológica y semiótica de los diversos objetos que intervienen en la actividad matemática, y los procesos de estudio de las organizaciones praxeológicas elaboradas.

La teoría de los significados sistémicos nos aporta el constructo "sistema de prácticas" asociado a todo objeto u organización matemática O , que pretende ser un instrumento para el diseño, implementación y evaluación de procesos de instrucción matemática, entendida, no como adiestramiento, sino como aprendizaje organizado.

El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos

El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos es planteado por Wheeler (1993) desde su dimensión epistemológica: Si necesitamos evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes para una multiplicidad de fines, la primera cuestión que debe dilucidarse se refiere a la naturaleza del propio conocimiento. La razón que da este autor nos parece obvia: «¿Cómo podemos evaluar lo que no conocemos?» (pág. 87). Esta problemática se corresponde en nuestro modelo teórico con la caracterización de significados sistémicos de objetos intensionales. Precisamente, una de las finalidades de la epistemología del conocimiento matemático que venimos desarrollando es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la evaluación del mismo, pero previamente se necesita adoptar o elaborar una teoría sobre su naturaleza, variedad y estructura.

El sistema cognitivo del sujeto (su conocimiento conceptual y procedimental, sus intuiciones, representaciones, esquemas,...), esto es, según nuestra conceptualización, la red de objetos personales construida en un momento dado, es una totalidad organizada y compleja. La distinción realizada en nuestra teorización entre el dominio de las ideas u objetos abstractos (personales e institucionales) y el dominio de los significados o sistemas de prácticas de donde emergen tales objetos inobservables, permite plantear con nitidez el problema de la búsqueda de correspondencia entre ambos dominios, o sea, el problema de la evaluación de los conocimientos, tanto subjetivos como objetivos o institucionales.

La determinación de los conocimientos subjetivos precisa necesariamente de procesos de inferencia, a partir de los conjuntos de prácticas asociados observados en la situación de evaluación, cuya validez y fiabilidad hay que garantizar (empleamos aquí los términos de validez y fiabilidad en su acepción más amplia: ausencia de sesgo y precisión en los procesos de muestreo de situaciones, sujetos, tiempos y circunstan-

cias inevitables en todo proceso de medición educacional y psicológica) (Messick, 1991; Feldt y Brennan, 1991). La complejidad de este proceso de inferencia se deduce del hecho de que no sólo existen interrelaciones entre los conocimientos referidos a diferentes objetos matemáticos, sino que, incluso para un objeto matemático dado, el conocimiento de un sujeto sobre el mismo, no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado o porcentaje unidimensional (conoce x por ciento), lo que hace difícil aplicar a la evaluación de los conocimientos las teorías clásicas psicométricas de maestría de dominio o del rasgo latente (Webb, 1992; Snow y Lohman, 1991).

Al reconocer esta complejidad queda patente el problema de la evaluación de los conocimientos. ¿Cuáles son los criterios aplicables para la elección e interpretación del sistema de indicadores empíricos que debemos usar para caracterizar el estado cognitivo global (o parcial), o sea, el conocimiento de un sujeto sobre un objeto matemático reconocido como objeto de saber?. Aunque esta problemática, que hemos denominado de la semiometría para diferenciarla de la problemática psicométrica, supone toda una nueva línea de investigación de tipo metodológico en los estudios didácticos, podemos apuntar al menos un primer criterio sobre la selección de las situaciones de evaluación.

El carácter observable de las prácticas sociales permite, mediante un estudio fenomenológico y epistemológico realizado adecuadamente, determinar, para un objeto dado, el campo de problemas asociado, así como los significados institucionales. El análisis de las variables didácticas del campo de problemas proporciona un criterio para estructurar la población de las posibles tareas de las cuales debe extraerse una muestra representativa, si se quiere garantizar la validez de contenido del instrumento de evaluación. Estos dos elementos proporcionarán unos primeros puntos de referencia a tener en cuenta para diseñar las situaciones de evaluación pertinentes para la evaluación de los conocimientos subjetivos, y también para el diseño de ingenierías adecuadas.

5. REFLEXIONES FINALES

La preocupación por el significado y la comprensión en educación matemática es un tema constante en la bibliografía (Sierpiska, 1994), pero nuestro modelo teórico revela la "ingenuidad" ontológica y semiótica de la mayor parte de las investigaciones que se están realizando en el campo. La teoría del conocimiento elaborada identifica al menos cinco dimensiones o componentes en el significado de un objeto u organización matemática: ostensiva, extensiva, actuativa, validativa e intensiva. Además hay que tener en cuenta los elementos procesuales, afectivos y axiológicos. En consecuencia

la validez de los procesos de estudio matemático debe considerarse como multicomponente y gradual al tener este carácter las mediciones de las variables puestas en juego. Carece de sentido decir que una investigación es o no válida, sino que se debe informar sobre las dimensiones y aspectos particulares del significado consideradas.

El modelo teórico que estamos desarrollando para la didáctica de las matemáticas pretende dotar a nuestra disciplina de una epistemología y una semiótica cognitiva adaptada a las características de los procesos de estudio de las matemáticas. Pretende buscar explicaciones de las dificultades de aprendizaje matemático, en primer lugar, en los elementos estructurales del conocimiento puestos en juego, y en los componentes o factores institucionales, procesuales, temporales y afectivos, sobre los cuales tenemos posibilidad de actuar. Secundariamente debemos buscarlas en las carencias cognitivas intrínsecas de los sujetos.

Dada la complejidad del significado de los conceptos matemáticos el estudio de los mismos y los significados personales logrados por los alumnos, dependen de manera determinante de la selección que se haga de los distintos componentes citados. Los significados construidos por los participantes en un proceso instruccional sobre un objeto matemático -o lo que viene a ser equivalente, su conocimiento, comprensión o relación personal a dicho objeto- será siempre parcial y relativa al contexto institucional, material y temporal en que tiene lugar el proceso. Sólo nos queda la pretensión de que éste conocimiento sea lo más completo posible en cada circunstancia y que se facilite su evolución futura, contando además con estimular su interés personal.

Los significados sistémicos y la tipología de prácticas (y objetos emergentes) identificadas aporta nuevos elementos a tener en cuenta en el diseño y evaluación de los procesos de estudio de las matemáticas. Así mismo, la generalización del modelo aportada por la teoría de las funciones semióticas proporciona nuevos instrumentos de análisis de procesos cognitivos y microinstruccionales, al revelar el sistema de objetos e interpretaciones que se ponen en juego.

Hemos mostrado que los métodos de investigación son subsidiarios de los problemas planteados y éstos a su vez dependen de los instrumentos teóricos con los cuales se analiza la actividad humana objeto de estudio. En nuestro caso el marco teórico trata de tener en cuenta las facetas epistemológica, cognitiva e instruccional que se pone en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, introduciendo elementos semióticos. Además se aboga por tener en cuenta tanto las regularidades observables como la variabilidad propia de los fenómenos psico-sociales. Por este motivo, necesitamos usar tanto métodos cualitativos como cuantitativos, y las

diversas técnicas (análisis de documentos, observación, encuesta y medida) en una racional combinación metodológica para tratar de lograr el grado óptimo en la validez y fiabilidad de los resultados.

Este trabajo nos ha permitido mostrar la íntima relación existente entre las cuestiones de validez y relevancia de las investigaciones con los marcos teóricos utilizados para plantear el problema e interpretar los resultados. El relativismo epistemológico postulado por la aproximación semiótico-antropológica obliga a pensar en el conocimiento, el significado y la comprensión como nociones relativas y siempre determinables de manera parcial. Esto lleva a considerar el problema de la validez de las investigaciones desde la misma perspectiva relativista, multicomponente y parcialmente determinable. Nuestro modelo aporta elementos para controlar y en su caso optimizar la *correlación epistémica* (Dane, 1990, p. 260), esto es, la relación teórica entre el componente verdadero de una medida y el concepto que representa.

Las investigaciones formulables bajo el enfoque semiótico-antropológico son diversas, como se ha indicado, y por tanto, también son diversos los métodos y técnicas de investigación. Hay que destacar el carácter sistémico y la naturaleza frecuentemente cualitativa de las variables que se deben manejar. Esto lleva a utilizar de manera intensa los métodos multivariantes de análisis de datos como hemos hecho en diversos trabajos (Batanero, Estepa y Godino, 1995; Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1995). En esta ponencia hemos estudiado los métodos de investigación pertinentes según los tres tipos de problemas derivados (semiometría, ecología y dinámica de significados). Dado el carácter holístico y sistémico propuesto se aboga por una racional combinación de métodos cualitativos y cuantitativos y las diversas técnicas disponibles: observación etnográfica, análisis de documentos, entrevistas, etc. Atención particular se debe conceder a los métodos de análisis multivariante de datos.

La tipología de entidades y de funciones semióticas identificadas permite implementar un método de análisis semiótico que puede aportar explicaciones para las dificultades de los procesos de estudio matemático basadas en la complejidad semiótica de las tareas demandadas y la negociación de significados. En diversos trabajos previos (Godino y Recio, 1998; Godino, 1998; Godino y Batanero, en prensa) describimos ejemplos mediante los cuales se muestra la trama compleja de entidades y relaciones que se ponen en juego en actividades matemáticas elementales. Este tipo de análisis puede ser útil para describir procesos de comunicación e interpretación del conocimiento matemático en el seno de los sistemas didácticos, así como identificar factores condicionantes de los mismos. Una parte de las dificultades en el estudio de las matemáticas puede ser explicada por la falta de conciencia del nivel de complejidad ontológica y semiótica que se pone en juego en dichos procesos.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1995). Correspondence analysis as a tool to analyze the relational structure of students' intuitive strategies. En: R. Gras y M. Artigue (Eds). Colloque "Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques." (pp. 155-166). Caen: A.R.D.M.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1995). The use of implicative and correspondence analysis to assess student's combinatorial reasoning. En: R. Gras y M. Artigue (Eds). Colloque «Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques.» (pp. 245-256). Caen: A.R.D.M.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 7, nº 2: 33-115.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.

Chevallard, Y., (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17 (3): 17-54.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

Coob, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, N. Y.: Lawrence Erlbaum A. P.

Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Belmont, CA: Brooks/Cole.

Eco, U. (1976). *Tratado de semiótica*. Barcelona: Lumen.

Feldt, L. S. y Brennan, R. L. (1991), Reliability. En: R. L. Linn (Ed.) *Educational measurement* (Third ed.), pp. 263-331). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.

Freudenthal, H. (1991), *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, Kluwer AC.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings, and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 417-424). University of Valencia. (Versión en español recuperable en URL:

<http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/pme20es.htm>

Godino, J. D. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. Comunicación presentada en el VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica. Granada.

(Recuperable en URL: <http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/msemiotoico.html>)

Godino, J. D. (1999). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. (Recuperable en URL: <http://www.ugr.es/local/semioesp/>)

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C.. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity*. (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P. (Versión en español recuperable en URL: <http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/clarifies.htm>)

Godino, J. D. y Batanero, C. (en prensa). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En, M. Anderson, V. Cifarelli, A. Sáenz-Ludlow y A. Vile, *Semiotics Perspectives in Mathematics Education*. (Versión en español recuperable en URL: <http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/funciones.html>)

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática. '*Research Report Proposal*' presentado a la 22 Conferencia PME (Sudáfrica). (Versión en español recuperable en URL: <http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/pme22es.htm>)

Godino, J. y Llinares, S. (en prensa). El interaccionismo simbólico en la educación matemática. *Educación Matemática*, México.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Kilpatrick, J. y Sierpinska, A. (1998). *Mathematics education as a research domain: A search for identity*. Dordrecht, HL: Kluwer A. P.

Messick S. (1991), Validity. En: R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (Third ed.), pp. 13-104). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32: 49-92.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding mathematics*. London: The Falmer Press.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL.: Kluwer A. P.

Snow, R.E. y Lohman, D.R. (1991), Implication of cognitive psychology for educational measurement. En: R. L. Linn (Ed.) *Educational measurement* (Third ed.), pp. 263-331). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.

Webb, N. L. (1992), Assessment of student's knowledge of mathematics: step toward a theory. En: D.A. Grouws, (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, Macmillan.

Wheeler, D. (1993), Epistemological issues and challenges to assessment: What is mathematical knowledge? En: M. Niss (Ed.) *Investigations into assessment in mathematics education, An ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer A.P.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica, 1988

Wittgensteing, L. (1978). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad, 1987.