

Enseñar desde el cerebro del que aprende

José Antonio Fernández Bravo

(Centro de enseñanza Superior Don Bosco. España)

La matemática es una actividad mental, y más que el arte de calcular es el arte de **COMPRENDER**

La caja de fichas

Había un alumno que había dejado ya las matemáticas por imposibles, y en las clases (cuando iba) se sentaba en la última fila y se dedicaba a dibujar... Él era feliz así y a mí no se me ocurría qué hacer con él; era un “caso difícil”.

Un día llegué a esa clase con una caja que contenía unas fichas amarillas. Les pregunté: “¿Qué veis dentro de esta caja?” Ellos miraron con esa mirada típica de adolescentes y me dijeron: “Fichas amarillas, ¿no?” Así que les propuse un juego con la caja y comencé así:

—Vais a cerrar los ojos para que no veáis lo que hago. Voy a coger una ficha de la caja, la guardaré en mi bolsillo y preguntaré entonces de qué color es.

Uno se reía, otro abrió los ojos, el “caso difícil” dejó de dibujar... y me observaba curioso, otro más atrevido me miró y dijo:

—Pero ¿qué hay que hacer?

—Tenéis que cerrar los ojos y...

—¿Pero la ficha la vas a coger de la caja, de esa caja? —interrumpió.

—Sí, claro —confirmé.

—¿¡Y para qué vamos a cerrar los ojos!?! —preguntó.

Comenzaron todos a reír.

El del dibujo ... ¡Estaba atendiendo por primera vez!, debió de ser la primera clase que entendía y la primera vez que estaba de acuerdo con sus compañeros. El chico me miraba con aprecio, se sintió cercano a mí.

Así que, como no querían cerrar los ojos (porque, según ellos, no entendían qué era exactamente lo que había que hacer) les dije:



—¡Pues está clarísimo! Pero, bueno, como no queréis cerrar los ojos tendré que esconder la caja. Voy a coger una ficha y la guardaré dentro de mi bolsillo, así que, por favor, ahora que no habéis visto la ficha que he cogido, ¿me queréis decir de qué color es?

—Pero ¿qué hay que adivinar? ¿Qué es, dónde estaba la ficha de la caja o qué? —insistió uno.

—Que no colega, que no, que hay que averiguar de qué color es la ficha... —aclaró otro.

En ese momento, uno que era líder se levantó muy gallito, miró a todos, me miró a mí, y dijo:

—¿Amarilla? ¡Ja, ja, ja! ¡Mire a ver, mire a ver si es amarilla! —dijo en tono burlón.

Todos se rieron.

Para el “caso difícil” la clase iba bien porque se enteraba de lo que estaba pasando. Yo saqué la ficha y dije:

—Pues sí, amarilla. Ahora vamos a cerrar los ojos y...

—¿Pero para qué hay que cerrar los ojos? ¿Pero va a ser de la misma caja? —cuestionaron varias voces más.

—Vamos a ver, ¿qué es lo que os pasa?, explicádmelo. ¿Qué os pasa con este juego?

La respuesta vino dada por una alumna que estaba en la tercera fila:

—Pues que yo creo que no hay que cerrar los ojos porque si todas las fichas son amarillas y nos vas a preguntar por su color, ¿para qué vamos a cerrar los ojos?

—¿Y eso lo piensas tú o lo piensan todos? —pregunté.

—Claro, lo pensamos todos —respondieron, incluido el “caso difícil”.

—¿Y si sacara una ficha roja?, pregunté.

—No se puede. Eso es imposible porque has dicho que ibas a “coger una ficha de la caja”, respondieron casi al unísono con indignación.

Una vez fueron conscientes de que no hacía falta cerrar los ojos e identificaron situaciones imposibles les propuse que, por pequeños grupos, encontraran situaciones de la vida real en las que “no hiciera falta cerrar los ojos”, y en las que sí hubiera que “cerrar los ojos”. El trabajo iba dando sus frutos, distinguiendo con sus palabras experimento, suceso, espacio muestral, etc. Escribían distintos experimentos a los que asociaban sucesos seguros, posibles e imposibles, y también los asociaban a un mismo experimento. Les escuchaba hablar. Decían que si lanzas un dado había que cerrar los ojos porque había seis posibilidades. Dependía -decía otro alumno- porque si sales un número menor que 7, no hace falta cerrar los ojos.

Después de trabajar en pequeños grupos. Les pregunto por lo que tendría que suceder con la caja de fichas amarillas para que tuvieran que cerrar los ojos. Me dicen que tendría que haber también fichas rojas. Cuento las fichas amarillas delante de ellos y hay diez, después meto en la caja dos fichas rojas. Divido la clase en dos grupos A y B. Les doy a elegir color, ganando el que acierte, al sacar una ficha. Hay grandes protestas todos quieren amarillas. Les hago explicarse y me dicen que para que sea “justo” debería haber el mismo número de fichas rojas que amarillas. Deciden poner una amarilla y una roja. Jugamos, unas veces gana A y otras B. Posteriormente, meto en la caja una ficha de color verde. Les pregunto si haría falta o no cerrar los ojos. Un alumno me dice rápidamente que ahora hay que “cerrar los ojos más” (me encanta su expresión y hago que entre todos la expliquen). Con los dos grupos de clase A y B hago que uno juegue con el “Sí” (la ficha que cojas si es de color...) y, el otro grupo, con el “No” (la ficha que salga no es de color...). Rápidamente son conscientes de que el “No” tiene más posibilidades, como ellos dicen, porque tienen 2 de 3 y los del Sí solo 1 de 3. Les pregunto cuál sería el total de posibilidades con 4 fichas de distinto color. Cuando me dicen 4, yo les digo que ahora voy a sacar dos fichas, y quiero que me digan cuáles son esas cuatro posibilidades. Son conscientes de que el número de posibilidades depende de lo que vayas a hacer con las fichas. Sigo jugando y trabajamos juntos con 8 fichas, dos de cada color. Dicen que da igual, que... Marco con una cruz una ficha de cada color y les pregunto si ahora es igual... Discutimos mucho y salen nuevos interrogantes a los que hay que ir dando respuesta. Continuamos con...

Ahora ya es cuestión de recoger sus ideas con sus palabras y expresiones, utilizando otros ejemplos que ayuden a generalizar. Esto nos dará permiso para enunciar con el vocabulario científico, donde se pondrá nombre convencional a lo que han descubierto: situaciones de azar, experimento, espacio muestral, tipos de sucesos, probabilidad, regla de Laplace, unión de sucesos, experimentos compuestos, condicionada, total, etc.

No se puede pasar del no saber al saber, sino del saber al saber más.

**Emoción, creatividad, razonamiento y cálculo,
es el orden preciso para aprender Matemáticas**

El número que escribo

Les digo que voy a escribir el número treinta y cuatro y escribo: 25. Espero a que ellos reaccionen: ¿qué observas?, pregunto; siempre hay reacción (risas). (Si no las hubiera preguntaría: ¿se corresponde lo que he dicho que iba a escribir con lo que he escrito?) Hago lo mismo, confundiéndome intencionadamente, ... Ahora les digo que voy a escribir el número veinticinco y escribo: 42. Los alumnos se ríen y reaccionan:

Alumnos: - “Lo escribes mal”

Maestro: - ¿Qué escribo mal?, pregunto.

- El número veinticinco, dicen ellos.

- Lo escribo mal porque lo he escrito así “beintizinco” (contraejemplo)

- ¡NO! Es que has puesto otros números distintos de los que dices.



- Ah, ya entiendo. Les digo que voy a escribir el número 34 y escribo $29 + 5$, diciéndoles: ahora también he escrito números distintos de los que digo (Contraejemplo)

- Pero eso sí vale. Es que tú has escrito números que no valen.

- Y ¿qué números no valen?, pregunto.

- Los que escribes.

- ¿El 56 no vale?, les pregunto.

- Pero ¿cuál dices tú primero?, me preguntan ellos. Y me explican rápidamente: si dices 56 primero sí vale, pero si dices 34 no vale, o 59 dice otro, o 63, dice otro, ... (descontrol por participación masiva).

- Entonces vamos a jugar a “no vale”. Si yo digo 23, jugando a no vale tú escribirías... (todos participan, expresando números “distintos”).

Les digo que si lo que escribo no se corresponde con lo que he dicho, entonces, “respecto a lo que he dicho he cometido error con lo que he escrito”. Les pido que escriban ellos cometiendo “error”, respecto a lo que se dice. Dicto números y compruebo que han entendido perfectamente el significado de “cometer error”.

Les pido que me digan un número. Lo escribo correctamente en la pizarra y les pregunto si he cometido error. Me dicen que no he cometido error. Les pido que escriban números que cometan error respecto al que ellos han dicho. Más tarde, escribo un número cualquiera y les pregunto si he cometido error. Me dicen que no lo saben si desconocen el número que quería escribir.

Verbalizo el número 56 y escribo: 34 y 50. Les dejo hablar ante la cuestión: Si tuvieran que conseguir 56 cosas, ¿quién crees que comete mayor error: una persona que consiga 34 o una persona que consiga 50? No tienen dificultad alguna en intuir la cercanía al número dictado. (Algunos me dicen que comete mayor error 34 porque 56 no tiene ninguna de esas cifras. Les pido entonces que me digan con cuáles de los siguientes números se comete mayor error respecto a 56: 12 y 43. Rápidamente ven que “está más lejos” el 12 del 56, que el 43. Les pregunto cómo saben ellos que están más lejos, y me dicen que “los puedes contar y cuentas más del 12 al 56 que del 43 al 56. Guardo silencio y les planteo lo siguiente: Dos personas distintas han escrito 30 y 70, respectivamente, ¿Cuál de los dos ha cometido mayor error? Rápidamente me preguntan por lo que se dijo, pues sin ese dato es imposible decidir. Les comento que se dijo: 50. Me dicen que “el error es 20 porque si cuentas te da”. Les hago dudar bastante cuando insisto para que decidan cuál de las dos personas ha cometido mayor error. Unos dicen que “los dos iguales”; otros, que ha cometido mayor error el que no llega, porque el otro, aunque se haya pasado, al menos ha llegado. Alguien argumenta que el mayor error lo ha cometido el que se ha pasado porque tendría que haber parado en 50, mientras que el de 30 no puede hacerlo porque todavía no ha llegado.

Les digo que en matemáticas el error es la distancia y se calcula con una resta. La diferencia de esa resta es el error cometido. A igual distancia debe haber igual diferencia. El error es un número positivo. Para comparar errores hay que comparar números. Representamos en la recta numérica: 30, 50 y 70. Comprobamos distancias. Calculamos el error que se comete: $70 - 50 = 20$; $50 - 30 = 20$. Comprobamos $20 = 20$, y decidimos que el error es el mismo.

Escribo en un papel un número de dos cifras que no ven. Les pido que escriban el número que ellos creen que yo he escrito. Representamos en la recta numérica y calculamos el error cometido, ordenando de mayor a menor o de menor a mayor. Les pido que me expliquen qué significa para ellos “error igual a cero”.

Escribo en un papel un número de dos cifras que no ven. Les pido que escriban el número que ellos creen que yo he escrito. Me va diciendo cada uno el número que ha escrito, yo le digo el error que ha cometido. Sólo pueden decir el número que yo he escrito cuando estén completamente seguros de cuál es, sin ambigüedad alguna. Ahora les pido que escriban con decenas enteras los números que dicto, cometiendo el menor error: 57 (ellos escriben 60); 89 (ellos escriben 90); ... Todos escriben las mismas. Comprobamos: 60 está más cerca de 57 que 50, porque: $60 - 57 = 3$, $57 - 50 = 7$; y, $3 < 7$. Les digo que a eso llamamos aproximar un número a las decenas.

Les pido que escriban un número cualquiera. Una vez que lo han escrito les pregunto por el error cometido. Me dicen que no pueden calcularlo porque no saben el número con respecto al cual se trabaja.

Les digo que con lo que se trabaja ahora es con la medida en cm de la longitud de un bolígrafo que les muestro. Se expresan libremente, después medimos y representamos en la recta numérica, la medida del bolígrafo y lo que ellos han expresado a priori, para calcular distancias respecto a la medida real.

Ahora ya es cuestión de recoger sus ideas con sus palabras y expresiones, utilizando otros ejemplos que ayuden a generalizar. Esto nos dará permiso para enunciar donde se pondrá nombre convencional a lo que han descubierto. Y podremos, a partir de ahora, expresarnos con el vocabulario científico hablando de Error absoluto y, de Error relativo como el cociente entre el Error absoluto y la medida real.

Les pregunto que, si conocieran la medida que se realiza y la medida real, ¿podrían calcular siempre el Error absoluto? Aseguran que sí. Les digo que la medida real es $\frac{2}{5}$ unidades de medida, y la medida que se realiza es 0,36 unidades. Dicen que es un poco más difícil pero que no hay problema porque siempre que se sepa el número se puede calcular el error. Les digo que escriban otro número cualquiera y que calculen el error con respecto a otro que les pondré después.

Una vez que todos tienen el número les escribo: $\sqrt{2}$. Rápidamente descubren que no se puede calcular el error porque tiene infinitas cifras decimales 1,414213... Hablamos para decidir cuál es el máximo error que se puede cometer. Convenimos en cometer un error máximo de una centésima. Dialogamos para ver la necesidad de aproximación y estudiamos qué números deberían escribir para cometer un error máximo de una centésima. Dicen que el número se tiene que aproximar a las centésimas: 1,41.

Escribimos números para que el error nunca sobrepase de una décima; de una centésima; de una milésima. Decidimos sobre el error máximo que podríamos cometer a partir de determinadas medidas.

En este caso, les presentaría, después de conquistar el concepto, la nomenclatura, expresión y formulación científica de “cota de error: absoluto y relativo”.

**Además de enseñar Matemáticas a partir de la vida real,
hay que enseñar VIDA a partir de las Matemáticas**



José Antonio Fernández Bravo. Centro de Enseñanza Superior Don Bosco (UCM), Madrid. Doctor en Ciencias de la Educación, por la especialidad de *Didáctica*. Licenciado en Filosofía - Lógica Simbólica y Matemática-.Diplomado en Magisterio (ciencias y matemáticas). Investigación de procesos para la innovación en la enseñanza de las matemáticas en España, Canadá, Michigan, Paraguay, Perú, Colombia, México, Alemania e Italia. Director de Proyectos Europeos Leonardo de Investigación eInnovación Educativa. Colaborador del departamento de Primera Infancia y Educación Inclusiva de la UNESCO. Premio de Metodología Creativa (Italia, Reggio Emilia, 2009), por el libro “*La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*”. Autor de ciento veinte obras sobre Educación y aprendizaje de la Matemática.

Email: anto194017@gmail.com; www.facebook.com/fdezbravo; centropedagogicofernandezbravo.com