

Estadística con Software de Geometría Dinámica

José Alexandre dos Santos Vaz Martins¹

Maria Manuel da Silva Nascimento²

Resumen

La visualización es extremadamente importante para ayudar a los jóvenes estudiantes a captar el real sentido de algunos conceptos matemáticos y estadísticos. Así, presentamos la aplicación de un software de geometría dinámica (Cabri-Géomètre II) para la ilustración y exploración de algunos conceptos de estadística, como sus propiedades y representaciones gráficas. El objetivo es permitir una mejor asimilación por parte de los alumnos, una mayor facilidad de exposición por parte de los profesores, y una fructífera interacción entre profesor y alumnos, fomentando una exploración progresiva e intuitiva por parte de los alumnos y haciendo uso de herramientas computacionales, con énfasis en la visualización, contribuyendo al mejoramiento del pensamiento y razonamiento estadístico de nuestros alumnos.

Introducción

Como escribió Caraça (2000), los griegos, en el siglo V a.C., impusieron la separación entre lo numérico y lo figurativo, que llegó hasta los siglos XV y XVI. A pesar de la aproximación que se dio entre los campos geométrico y analítico, en los últimos cuatro siglos, y de acuerdo con Guzmán (2001), inclusive durante gran parte del siglo XX existieron fuertes tendencias formales que dieron origen a una cierta sospecha y aprehensión en relación a la visualización matemática. Pero, por otro lado, hay que realzar que en las últimas décadas la visualización emergió como una clara y fuerte tendencia desempeñando un nuevo e importante papel en la enseñanza de la matemática y de la estadística. Esto nos permite, hoy, con la ayuda de los ordenadores, ir más allá, tanto a los alumnos como a los profesores.

En la matemática y en la estadística, algunas ideas, conceptos y métodos presentan una gran riqueza de contenidos visuales. Así, como Guzmán (2001) refirió, es natural considerar la visualización como un aspecto extraordinariamente importante en la actividad matemática en general, como tareas de creación, descubrimiento de nuevas relaciones o de transmisión de conocimiento.

Desde este punto de vista, los Softwares de Geometría Dinámica (SGD) pueden ser muy útiles, pues tienen propiedades de medida, constructivas y dinámicas que posibilitan la creación de algunas aplicaciones con un enorme potencial en relación a características de la visualización ya mencionadas. Además, con ayuda de los SGD, es posible ayudar a los

¹ Instituto Politécnico da Guarda – Portugal

² Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – Portugal

jasvm@ipg.pt

mmsn@utad.pt

estudiantes a superar algunas de sus dificultades, como por ejemplo: pensamiento lógico e intuitivo; sistematización; argumentación; interpretación; selección y evaluación de información; además, desarrollo de una actitud multidisciplinar. Esto se aplica a numerosas áreas de la matemática y, en particular, a la estadística.

Uno de los objetivos es presentar el potencial de los SGD al servicio de la aprehensión de conceptos de estadística, contribuyendo, de esa forma, para mejorar la enseñanza de la estadística, que alcanzó una importancia creciente en el plan curricular y social. Se pretende también facilitar el trabajo del profesor mostrando ideas para alcanzar esos anhelos. Pero como Godino (1995) sugiere, estos tipos de software de aplicación no solucionan por sí todos los problemas de la enseñanza, siendo necesaria una gran labor de reflexión e investigación para construir guías didácticas adecuadas.

En este sentido, presentaremos algunas aplicaciones hechas con Cabri-Géomètre II y construidas para obtener una estimulación visual y para facilitar la adquisición de conceptos como el de la media, mediana, moda y varianza. Esto será basado en la interpretación geométrica de esos conceptos y de sus propiedades, bien como en la manipulación dinámica y exploración de sus características geométricas. Estas aplicaciones desempeñan un importante papel para experimentar el efecto del cambio dinámico de los valores de los datos en las medidas estadísticas. Se presentarán también algunas aplicaciones Cabri que permiten analizar algunos tipos de gráficos así como algunas interrelaciones entre ellos.

Presentación de las Aplicaciones

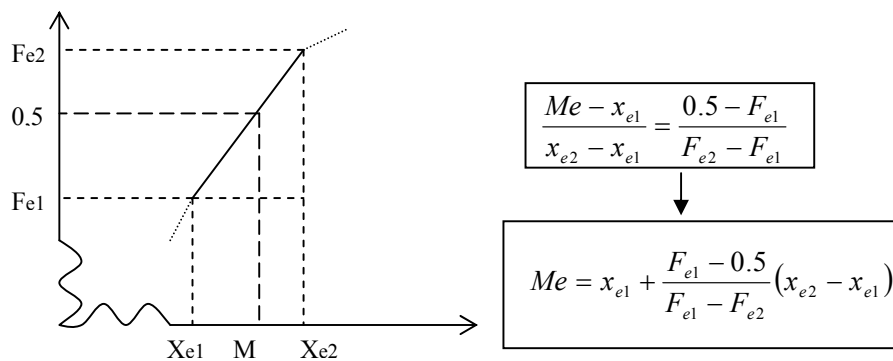
Las aplicaciones que se presentan seguidamente fueran construidas en Cabri Géomètre II, y la mayoría de ellas pueden ser implementadas con conocimientos básicos de Cabri u otro SGD.

Mediana

De acuerdo con Cobo y Batanero (2000) las definiciones usuales de mediana presentan algunas dificultades y ambigüedades. Las mismas autoras sustentan que el cálculo de la mediana se basa en la comprensión de la gráfica de las frecuencias

cumulativas, en un razonamiento proporcional correcto y también en el entendimiento de las semejanzas de triángulos.

Considerando para el trazado del polígono integral la hipótesis de que las frecuencias se distribuyen uniformemente dentro de cada rango, ó lo que es lo mismo, que las frecuencias acumuladas tienen una variación lineal dentro de cada rango, y utilizando semejanza de triángulos, se obtiene la fórmula para el cálculo de la mediana:



Así, la aplicación propuesta muestra como obtener la mediana a partir de la gráfica de las frecuencias acumuladas, establece la relación entre el histograma y la gráfica de las frecuencias acumuladas y, la deducción de la fórmula para el cálculo de la mediana en el caso continuo, basada en relaciones de semejanza de triángulos, como se puede ver en la figura 1.

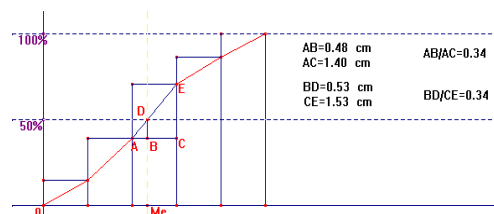
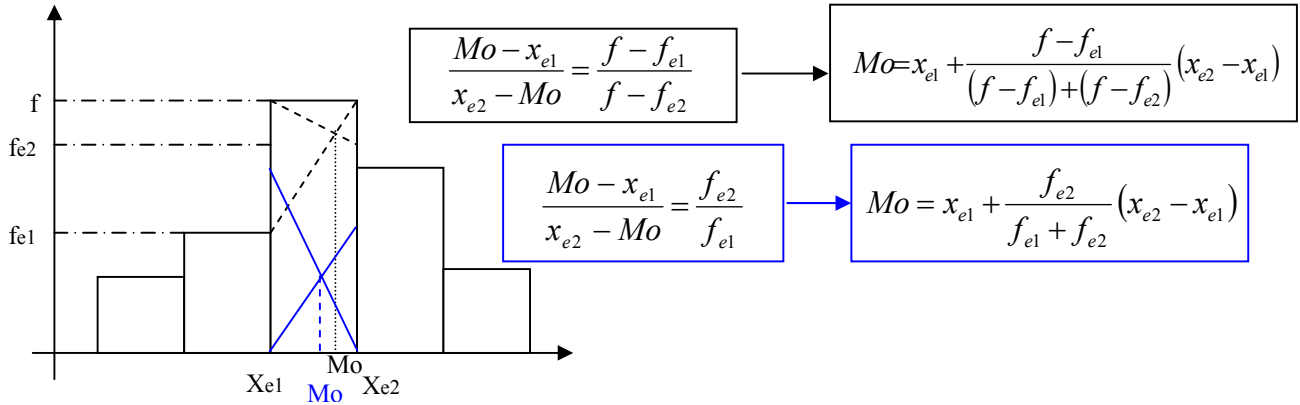


Figura 1 – Obtención geométrica de la mediana y de su fórmula

Moda

Existen varias fórmulas para establecer el valor de la moda en el rango modal. Este valor es una aproximación, y por eso necesita una interpretación cuidadosa. En este sentido, es muy importante tener un mayor conocimiento sobre el funcionamiento de estas fórmulas. Como podemos observar en la figura 2, se presentan dos procesos geométricos para obtener

el valor de la moda bien como sus fórmulas de cálculo basadas en el principio de que, en el rango modal, la moda debe estar más cerca del rango vecino con mayor frecuencia.



Desde la duplicación del histograma, es posible comparar los valores de la moda obtenida y también estudiar y comprender el comportamiento de cada uno de los procesos geométricos. A partir de relaciones de triángulos, también es posible deducir las fórmulas de cálculo y confirmarlo de una forma dinámica.

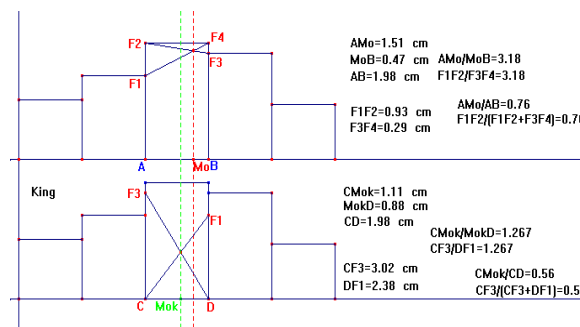


Figura 2– Procesos geométricos para obtener la moda

Media

Como sabemos, la media puede tener una interpretación física como “centro de gravedad”. De este modo, con base en la propiedad de la media aritmética $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$, o sea, que la suma de las distancias de la media a los datos que le son inferiores es igual a la suma de las distancias de ella a los datos que le son superiores, se construyó una balanza donde la media aritmética respectiva representa el punto de equilibrio, como es posible confirmar en la figura 3. De este modo, y sin pérdida de generalidad, en una recta están colocados siete puntos, x_1, \dots, x_7 , con frecuencia unitaria, y está también colocado el punto

M que puede moverse a lo largo de la recta. Al mover el punto M se observa en la pantalla el valor, $vsoma$, de la medida del vector suma de los vectores con origen en el punto M y la otra extremidad en cada uno de los puntos, x_1, \dots, x_7 . Entonces, se puede procurar, de forma dinámica, la media haciendo el punto M correr la recta de forma a que el valor $vsoma$ pase a ser nulo.

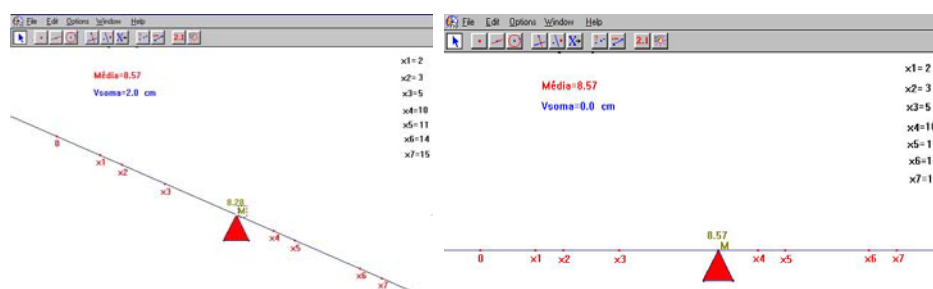


Figura 3 – La balanza de la media aritmética

Además de la interpretación física, es aún posible ayudar a los estudiantes en algunas de las dificultades relacionadas con la media aritmética, en particular evidenciando algunas propiedades que son mencionadas por Batanero (2000):

- La media se localiza entre los valores extremos;
- La suma de los desvíos en relación a la media es cero;
- La media es influenciada por todos los datos;
- La media no es necesariamente igual a uno de los datos;
- La media puede tener un valor que no tiene significado real;
- Cuando se calcula la media y se tiene un dato con valor nulo, este debe ser incluido en el cálculo;

Varianza

En la primera aplicación se pretende, para el caso de las variables continuas, relacionar simplemente el histograma con el valor de la varianza y su evolución. Para eso se construyó un histograma en el que es posible alterar dinámicamente las frecuencias y además se puede constatar, por la área de un círculo, el valor de la varianza correspondiente.

Así, se pueden explorar alteraciones en las frecuencias, experimentando varias situaciones. En particular, tiene interés experimentar situaciones con medias semejantes pero claramente con varianzas muy distintas (ver imagen 1).

Por otro lado, con estos experimentos es posible entender la real complejidad e interdependencia que el concepto de varianza encierra.

De esta manera se cree estar estimulando aspectos intuitivos y la capacidad crítica de los alumnos relativamente a la dispersión y sus medidas estadísticas.

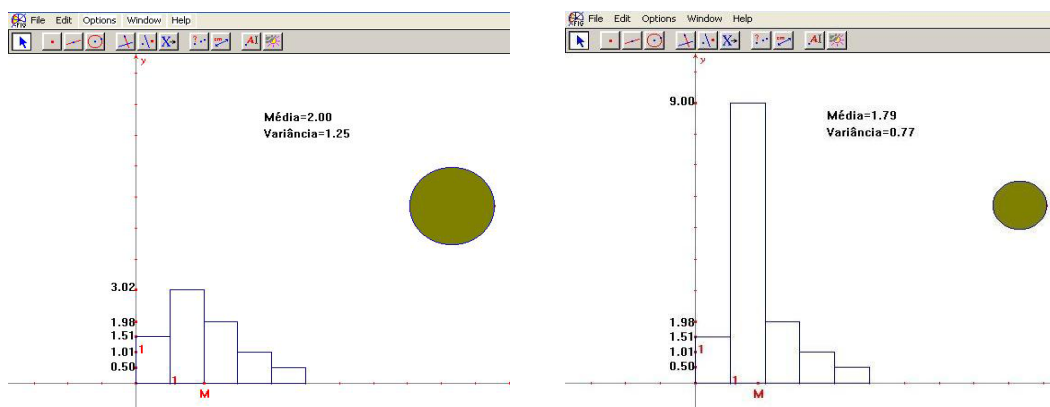


Figura 4: Varianza y frecuencia

En la segunda aplicación se pretende, para el caso de una variable discreta (usando 5 valores de una variable) y partiendo de la fórmula de la varianza, visualizar, a través de cuadrados (con sus áreas y las medidas de sus lados), el valor de la varianza y su evolución.

Claramente, la varianza, $\sigma^2 = \sum_k (x_k - \bar{x})^2 / n$, surge, en contexto geométrico, como la media aritmética de las áreas de los cuadrados que tienen la medida de sus lados iguales a la distancia entre cada uno de los datos y la media aritmética de esos mismos datos.

Con base en esta interpretación geométrica, la aplicación representa, tal como se puede observar en la figura 4, a la izquierda de la media de los datos y para cada uno de los datos de valor inferior a la media, los cuadrados que tienen la medida de sus lados iguales a la distancia entre cada uno de esos datos y la media aritmética de los datos. Lo mismo pasa con los datos superiores a la media, pero en este caso a la derecha de la misma. Finalmente se presenta un cuadrado de área igual a la media de las áreas de los cuadrados referidos y que tiene la medida del lado igual al valor del desvío estándar.

Con esta aplicación es posible estimular en los estudiantes aspectos intuitivos y capacidades críticas, visualizando el contenido geométrico de la varianza y también explorando alteraciones dinámicas de los valores de la variable, evidenciando que la varianza es muy sensible a variaciones de los datos y que su valor depende mucho de la orden de los valores de los datos.

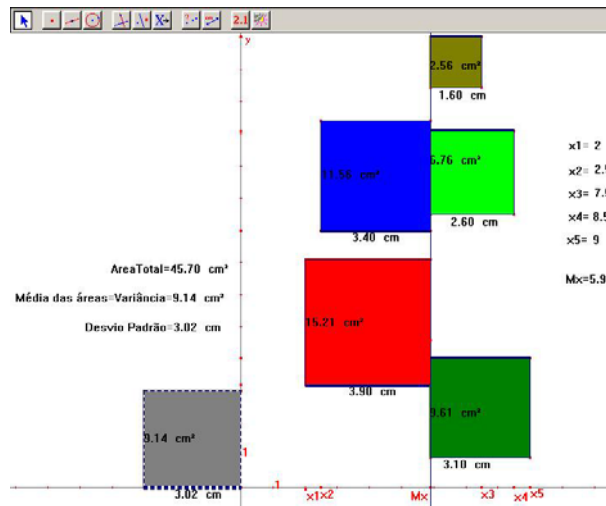


Figura 5 - Representación gráfica de la varianza

Gráficos

Un primer ejemplo del uso del Cabri aplicado al tema de los gráficos es uno que muestra dinámicamente la relación entre histograma, gráfico de frecuencias acumuladas y gráfico de extremos y cuartiles, como es visible en la figura 6.

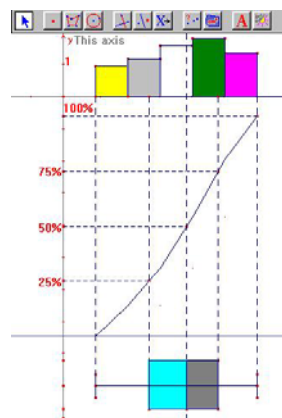


Figura 6 – Histograma, gráfico de frecuencias acumuladas y gráfico de extremos y cuartiles

Otro ejemplo es una aplicación que relaciona el gráfico de barras y el correspondiente gráfico circular y que presenta la relación constante entre el área de la barra y el ángulo del sector respectivo, como se mostrado en la figura 7.

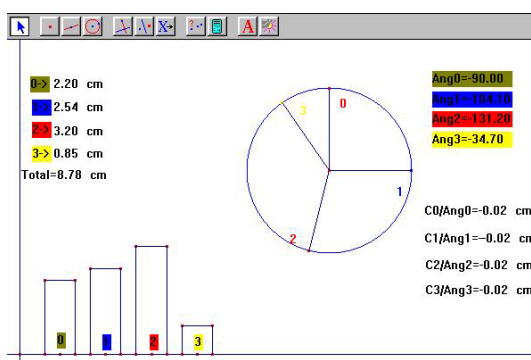


Figura 7- Relación entre el gráfico de barras y el gráfico circular

Conclusión

Las aplicaciones expuestas, que cualquier persona con conocimientos mínimos de Cabri-Géomètre u otro SGD consigue implementar, tendrán cumplido los objetivos iniciales si, a través del potencial de la geometría dinámica, pudieren ser considerados, no sólo, como ejemplos versátiles, capaces de estimular y facilitar la asimilación, interpretación y comprensión de algunos conceptos básicos de estadística y de algunas de sus propiedades, pero también como siendo capaces de promover una mayor interacción en ambiente de aula.

Así, creemos que es posible mejorar la enseñanza de la estadística usando SGD de una forma cuidadosa y reflexionada.

Hay, seguramente, innumerables posibilidades de exploración de estas aplicaciones pudiéndose profundizar, mejorar y/o añadir otras potencialidades, teniendo como motivación la curiosidad, la imaginación y la voluntad.

Bibliografía

Batanero, C., *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística, 2000

Caraça, Bento, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Gradiva, 2000