

EVOLUCIÓN DE LOS TIPOS DE PRUEBA QUE PROPORCIONAN ESTUDIANTES AL TRABAJAR CON LA METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE COLABORATIVO, DEBATE CIENTÍFICO Y AUTO-REFLEXIÓN

Álvaro Sebastián Bustos Rubilar

Cinvestav

bustos.rubilar@gmail.com

En este anteproyecto de investigación de doctorado se propone, mediante la metodología ACODESA (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Auto-reflexión), estudiar la evolución de las pruebas de conjeturas ofrecidas por los estudiantes de normal superior a lo largo de los siguientes pasos: 1) Formulación individual de las pruebas con lápiz y papel, 2) Estudio de las proposiciones en equipo utilizando software de geometría dinámica, y 3) Análisis con todo el grupo bajo la lógica del método de pruebas y refutaciones. Se describen: el método de pruebas y refutaciones, los niveles y tipos de prueba, así como el uso de software de geometría dinámica en el aprendizaje de las matemáticas, y el diseño de actividades enmarcadas en la metodología ACODESA.

Palabras claves: Tipos de prueba, pruebas y refutaciones, ACODESA.

1. Introducción

En Bustos (2014) se reportó el proceso de reformulación de conjeturas falsas llevado a cabo por futuros profesores de educación secundaria en un ambiente basado en elementos del método de pruebas y refutaciones. En dicho trabajo se describe cómo a partir de una conjetura falsa, los estudiantes exploraron, conjeturaron y analizaron, mediante el uso de un software de geometría dinámica, ejemplos y contraejemplos que surgieron durante el proceso de reformulación de conjeturas; este trabajo se concluyó en la etapa en que los estudiantes reformularon determinada conjetura y la aceptaron como válida; momento idóneo para pasar a la siguiente etapa, a saber, la formulación de una prueba para validar la conjetura. Tomando en cuenta lo anterior, en el presente documento se exponen los lineamientos del anteproyecto de investigación de doctorado, en el cual se pretende dar continuidad al trabajo mencionado previamente, esto es, estudiar el proceso durante el cual los estudiantes analizan bajo la lógica de pruebas y refutaciones, las pruebas que proponen. Es importante mencionar que algunos elementos teóricos que sustentan la investigación de doctorado se están aún

desarrollando a partir de la revisión de la literatura relacionada, sobre todo en lo que respecta a la utilización de tecnología en procesos de prueba.

En esta investigación la palabra *prueba* tendrá dos acepciones. La primera, cuando se hable de una *prueba* proporcionada por los estudiantes. De acuerdo con Balacheff (1987/2000), se tratará de una explicación aceptada por una comunidad, la cual “puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya” (p. 12). Así, en este contexto, se puede tratar de uno de los siguientes tipos de prueba: empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico, experiencia mental o cálculo sobre los enunciados¹. La segunda significación se relaciona con el método de pruebas y refutaciones (éste se describe en la sección 4.1), en el sentido de Lakatos (1986): como un experimento mental.

2. Antecedentes

En las dos décadas más recientes, el método de pruebas y refutaciones ha sido estudiado por investigadores de educación matemática. En la revisión de la literatura se han identificado dos líneas de trabajos relacionadas con el método:

- i) Estudios en los que se señala la aplicabilidad de algunos principios del método de pruebas y refutaciones (Atkins, 1997; De Villiers, 2000; Reid, 2002; Sriraman, 2003).
- ii) Investigaciones inmersas en un marco conceptual basado en el método de pruebas y refutaciones (Swinyard & Larsen, 2010; Fujita, Jones, Kunimune, Kumakura & Matsumoto, 2011; Karakus & Bütün, 2013; Bustos, 2014) propuesto por Larsen y Zandieh (2007).

En todos estos trabajos se ha reportado la efectividad de la incorporación de elementos del método de pruebas y refutaciones en la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles educativos, desde la educación básica hasta la educación superior, ésta específicamente en matemáticas, así como en la profesionalización de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.

3. Problema de investigación y justificación

Cuando un estudiante proporciona una prueba de una conjetura, además de clasificarla según los tipos de prueba sugeridos por Balacheff (1987/2000), se podrán generar instancias en las cuales se discuta la validez de la prueba, se modo que el estudiante tenga la posibilidad de plantear argumentos sobre la veracidad de sus aseveraciones,

¹ Para mayores detalles véase la sección 4.3.

con la finalidad de mejorar la prueba y aproximarla a una prueba formal. Se considera que el método de pruebas y refutaciones es idóneo para que los estudiantes realicen un proceso de análisis minucioso de la prueba. Sin embargo, la evolución desde una prueba proporcionada por un estudiante hasta una prueba formal debe ser un proceso gradual en el que los estudiantes mismos sean los constructores.

En el libro *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático* de Lakatos (1986), se expone una situación ficticia durante la cual un profesor y sus estudiantes discuten en torno a la prueba de la fórmula de Euler². El episodio comienza cuando el maestro propone una prueba para la conjetura y a continuación, los estudiantes critican tanto la prueba como su conjetura mediante contraejemplos. En el episodio ficticio expuesto por Lakatos, los estudiantes partícipes de la discusión muestran que tienen un amplio dominio de los conceptos matemáticos involucrados en la prueba de la conjetura, lo cual provoca mayor fluidez en la discusión de las aseveraciones que surgen en el proceso de análisis. Luego, para que los estudiantes prueben conjeturas deben estar familiarizados con los contenidos matemáticos implicados, y así se dé un proceso de discusión efectivo. Entonces, es necesario determinar cuáles son los conocimientos, según los contenidos de la actividad, que los estudiantes deben dominar para analizar pruebas bajo la lógica del método de pruebas y refutaciones, a fin de sustentar sus aseveraciones matemáticas frente a sus pares.

Para generar un ambiente de interacción social en el cual se produzcan instancias donde los estudiantes formulen pruebas individualmente, las estudien junto a sus pares en un trabajo en equipo y luego las analicen en plenario (toda la clase) bajo la lógica de pruebas y refutaciones, es conveniente utilizar una metodología que permita dar espacio a los alumnos para presentar sus argumentos de por qué sus aseveraciones son verdaderas. Para ello, se utilizará la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión (*acodesa*³), la cual permitirá observar los tipos de pruebas que surgen cuando los estudiantes trabajan en distintas modalidades: individual, en equipo y con toda la clase. Dado lo anterior, en esta investigación se estudiara la evolución de los tipos de prueba proporcionados por los estudiantes, desde que son formuladas individualmente con lápiz y papel, estudiadas en equipo, hasta que son analizadas en plenario por la clase bajo la lógica de pruebas y refutaciones. Para llevar a cabo el

² Fórmula que relaciona los vértices, aristas y caras de un poliedro ($V - A + C = 2$).

³ Acrónimo del francés “*apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d’auto-reflexion*”.

estudio se formulan objetivos y preguntas que servirán de guía durante el proceso de investigación, las que se detallan en los apartados siguientes.

3.1 Objetivo de investigación

El objetivo general de esta investigación es el siguiente.

Estudiar la evolución de los tipos de prueba que proporcionan los estudiantes al trabajar en la metodología de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión.

3.2 Preguntas de investigación

La pregunta general que guiará esta investigación es la siguiente:

¿Cómo evoluciona una prueba desde que es formulada por un estudiante con lápiz y papel, luego estudiada en equipo y finalmente analizada por todo el grupo de la clase bajo la lógica de pruebas y refutaciones?

Las preguntas específicas que guiarán el trabajo para responder la pregunta general son las siguientes:

1. ¿Cuáles son los conocimientos necesarios que requieren los estudiantes para llevar a cabo un proceso de discusión efectivo que les permita argumentar matemáticamente sus aseveraciones al analizar pruebas bajo la lógica del método de pruebas y refutaciones?
2. ¿Qué tipos de prueba proporcionan los estudiantes en modalidad lápiz y papel al trabajar en forma individual?
3. ¿Qué tipos de prueba proporcionan los estudiantes al trabajar en equipo y utilizar un software de geometría dinámica?
4. ¿Cómo evoluciona una prueba proporcionada por un equipo al ser analizada en sesión plenaria, con todo el grupo, bajo la lógica de pruebas y refutaciones?

Para dar respuesta a las preguntas de investigación se diseñaran actividades apegadas a los lineamientos de la metodología de *acodesa* propuesta por Hitt (2007).

4. Marco Conceptual

4.1 Lakatos y el método de pruebas y refutaciones

El eje principal del método de pruebas y refutaciones es el descubrimiento de conocimiento matemático por medio del análisis de la prueba de una conjetura.

Mediante este método, se genera una instancia de discusión entre pares, creándose un ambiente similar al experimentado por los matemáticos cuando formulan o proponen una nueva proposición matemática. Lakatos (1986, p. 25) se refiere a la prueba como "un experimento mental (o «cuasi-experimento») que requiere una descomposición de la conjetura original en subconjeturas o lemas". Este experimento mental consiste en analizar cada uno de los pasos –lemas según Lakatos– que componen la prueba, por muy triviales que sean. Dicho análisis puede llevar a la modificación de la prueba mediante la reformulación de los lemas inconsistentes, así como a la modificación del campo de dominio de la conjetura, e incluso a la reformulación de la conjetura misma por los cambios en las definiciones subyacentes de su enunciado.

En el método de pruebas y refutaciones son fundamentales los contraejemplos. A partir de estos es posible crear controversia respecto a alguna declaración y así generar un ambiente de discusión que permita analizar detalladamente tanto la prueba como la conjetura. Es posible plantear contraejemplos globales o locales. Los contraejemplos globales cumplen con las condiciones de la conjetura, pero refutan su conclusión. Los contraejemplos locales refutan algún paso o lema de la prueba de una conjetura y no necesariamente refutan la conjetura, aunque sí causan la reformulación de la prueba. La combinación de estos dos tipos de contraejemplos da origen a un tercer tipo, contraejemplo local y global, el cual refuta tanto un lema de la prueba como la conclusión de la conjetura.

Para resolver la tensión que se genera con la aparición de los contraejemplos, Lakatos (1986) plantea diferentes estrategias, a las que llama métodos. Algunas consisten en lo siguiente: rechazar la conjetura a causa de un contraejemplo global (método de la rendición); excluir el contraejemplo al redefinir los conceptos a los cuales hace referencia la conjetura (método de exclusión de monstruos); limitar el campo de validez de la conjetura (método de exclusión de excepciones); reinterpretar un contraejemplo e incluirlo como ejemplo de la conjetura (método de ajuste de monstruos); o la modificación de la conjetura a partir de la incorporación de un lema, a causa de un contraejemplo local (método de incorporación de lemas).

4.2 El modelo simplificado de Lakatos para la heurística del descubrimiento matemático

Una interpretación resumida del método de pruebas y refutaciones es la presentada por Davis, Hersh y Marchisotto (2012). Estos autores proponen el *Modelo simplificado de Lakatos para la heurística del descubrimiento matemático*. En este modelo se da un sentido

cíclico al método de pruebas y refutaciones (véase el esquema de la Figura 1), de modo que tanto la conjetura como su prueba se constituyen en objeto de reiteradas evaluaciones, verificaciones, refutaciones y reformulaciones.



Figura 1. Modelo de Lakatos simplificado para la heurística del descubrimiento matemático (Davis et al., 2012, p. 324).

Si bien es cierto que el modelo propuesto por Davis et al. (2012) no refleja la verdadera complejidad del método de pruebas y refutaciones, este ha sido incorporado como elemento teórico de la investigación porque su esquema facilita la comprensión de los procesos de evaluación, refutación y reformulación de una conjetura y de su prueba.

4.3 Niveles y tipos de prueba

Al analizar pruebas bajo la lógica del método de pruebas y refutaciones, debe tenerse en cuenta que las pruebas proporcionadas por los estudiantes, generalmente están alejadas de la rigurosidad y de la argumentación propios de un matemático profesional. Es por ello, la importancia de la clasificación sugerida por Balacheff (1987/2000) sobre los tipos de pruebas que puedan brindar los alumnos. El autor clasifica en cinco tipos de pruebas los procedimientos que utilizan los estudiantes para validar conjeturas: empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico, experiencia mental y cálculo sobre los enunciados.

Empirismo ingenuo. Ocurre cuando el estudiante afirma la validez de un enunciado después de verificarlo en casos particulares. En este tipo de prueba se evidencia una resistencia del estudiante a la generalización.

Experiencia crucial. El estudiante verifica con un ejemplo lo menos particular posible. En este tipo de prueba el alumno generaliza explícitamente a partir del ejemplo con el cual verifica el enunciado.

Ejemplo genérico. El estudiante da un ejemplo que representa la generalidad, es decir, un ejemplo que no es considerado un caso particular, sino un representante de una clase de casos para los cuales sí es verdadero el enunciado. En este tipo de prueba se explica por medio de operaciones y transformaciones del objeto matemático por qué el enunciado es válido.

Experiencia mental. El estudiante explica las razones mediante el análisis de las propiedades implicadas en el enunciado, descontextualizándolo y sacándolo de una representación particular.

Calculo sobre los enunciados. “Estas son construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas de las nociones en juego en la solución de un problema. Estas pruebas aparecen como el resultado del cálculo inferencial sobre enunciados. Se fundamentan en definiciones o en propiedades características explícitas” (Balacheff, 1987/2000, p. 80).

Además, Balacheff (1987/2000) agrupa los tipos de prueba descritos anteriormente en pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales. El empirismo ingenuo, la experiencia crucial y el ejemplo genérico son pruebas pragmáticas: “recurren a la acción o a la ostensión” (p. 22). La experiencia mental y el cálculo sobre los enunciados son pruebas intelectuales: “separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones” (p. 22).

4.4 Software de geometría dinámica

En las tres últimas décadas la enseñanza de las matemáticas se ha visto bajo un constante cambio debido a la incorporación de nuevas tecnologías. Siendo una de las áreas más favorecidas la geometría euclidiana. De Villiers (2010) señala que la geometría ha renacido con la incorporación de software de geometría dinámica, ya que con esta herramienta se tienen nuevas maneras de explorar, específicamente porque los elementos de una configuración geométrica dejan su naturaleza estática para convertirse en configuraciones dinámicas.

Una configuración geométrica hecha con software de geometría dinámica puede verificarse rápidamente mediante el arrastre de uno de los elementos independientes que la componen. De acuerdo con De Villiers (2010, p. 211), “el software de geometría dinámica es particularmente útil en este sentido, ya que una configuración puede ser fácil y rápidamente arrastrada en muchas variaciones diferentes con el fin de comprobar la validez general de uno de los supuestos”. La ventaja de trabajar con software de geometría dinámica radica en que los objetos de determinada configuración dejan de ser

estáticos, dando la oportunidad de observar propiedades y patrones que en un ambiente de lápiz y papel son más difíciles de visualizar. Algunas herramientas del software como las de arrastre y medida, ayudan en los procesos de exploración y de verificación de enunciados matemáticos (De Villiers, 2010).

5. Aspectos metodológicos

5.1 Tipo de estudio

El enfoque de esta investigación es cualitativo. Se obtendrá información a partir de las hojas de trabajo de los estudiantes, así como de la videograbación de sesiones de trabajo.

5.2 Sujetos participantes

Se han tomado en cuenta las características de los sujetos participantes en la investigación reportada en el trabajo previo de Bustos (2014), a fin de darle continuidad al trabajo con sujetos que tengan un nivel educativo equivalente. Así, los sujetos participantes en esta investigación serán estudiantes de Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad Matemáticas, turno vespertino, de la Escuela Normal Superior de México.

5.3 Diseño de actividades

Las actividades enmarcadas en la metodología de *acodesa* deben estar diseñadas para fomentar el pensamiento diversificado⁴. De acuerdo con Hitt (2013, p. 17), “la metodología de *acodesa* tiene significado cuando se trata de resolver situaciones problemas o problemas donde se tiene la intención de promover un pensamiento diversificado, como paso previo antes de promover un pensamiento hacia una meta exacta”. La metodología de *acodesa* se compone de cinco fases: trabajo individual, trabajo en equipo, debate científico, auto-reflexión e institucionalización. En las dos primeras etapas se promueve el pensamiento diversificado en los estudiantes, y en las tres restantes el pensamiento dirigido hacia un objetivo⁵. Enseguida se describe cada una de las fases, su relación con la tecnología y el método de pruebas y refutaciones para el diseño de las actividades.

⁴ “El pensamiento diversificado emerge en la lectura de una declaración que demanda reflexión, y un algoritmo o método de resolución no surge inmediatamente.” (Hitt & González-Martín, 2014, p. 3-4)

⁵ El pensamiento dirigido hacia un objetivo “emerge de la lectura de un enunciado el cual alienta al lector a asociar la tarea con un algoritmo o método de resolución que aplica directamente e inconscientemente sin mucha reflexión.” (Hitt & González-Martín, 2014, p. 3)

1. Trabajo individual. El estudiante desarrollará la actividad en forma individual con lápiz y papel, y propondrá una prueba en base a sus conocimientos.

2. Trabajo en equipo. Los estudiantes trabajarán en equipos de tres o cuatro integrantes; cada integrante presentará su prueba y explicará a sus compañeros de equipo por qué la considera válida. En esta etapa será importante la utilización del software de geometría dinámica, para refinar los argumentos que proporciona cada estudiante, así como para elaborar una prueba en equipo. Además, en esta fase surgirá la distribución de roles (Hitt, 2013), de modo que cada alumno aportará a la construcción de la prueba en equipo.

3. Debate científico. Cada equipo presentará su propuesta de prueba a todo el grupo. La prueba se descompondrá en pasos para que se analicen bajo la lógica del método de pruebas y refutaciones. El profesor promoverá el debate entre los estudiantes, desempeñándose como moderador.

4. Auto-reflexión. Los alumnos realizan un proceso de reconstrucción de la actividad. La importancia de esta parte radica en que, según lo señala Hitt y González-Martín (2014), el consenso logrado en la fase anterior puede ser efímero para algunos estudiantes, por lo que es necesario que cada alumno reconstruya con lápiz y papel lo hecho durante el trabajo en equipo y con todo el grupo.

5. Institucionalización. El docente hará un resumen de los resultados de las fases anteriores, destacando las distintas soluciones propuestas por los equipos. Será conveniente que en ocasiones retome discusiones que hayan surgido en la actividad.

5.4 Recolección de datos

La recolección de datos será a través de distintas fuentes. Por medio de la recopilación de las hojas de trabajo de los estudiantes producidas tanto en forma individual como en equipo. También se obtendrán datos mediante dos videocámaras: con una se videograbará un plano general de lo que suceda en el aula, y con otra se capturarán episodios específicos. Otra fuente de datos se creará por medio de un software con el que se almacenará todo lo que los estudiantes digan frente a la pantalla del computador, así como lo que hagan al trabajar con el software de geometría dinámica.

Referencias

Atkins, S. (1997). Lakato's Proofs and Refutations Comes Alive in an Elementary Classroom. *School Science and Mathematics*, 97(3), 150-154.

- Balacheff, N. (1987/2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (trad. Gómez, P.). Colombia, Bogotá: Una empresa docente.
- Bustos, A. (2014). *Perfeccionamiento de conjeturas mediante pruebas y refutaciones: estudio de casos con estudiantes normalistas* (Tesis de Maestría inédita). México: Cinvestav-IPN.
- Davis, P., Hersh, R., & Marchisotto, E. (2012). *The Mathematical Experience, Study Edition*. Boston: Birkhäuser.
- De Villiers, M. (2000). A Fibonacci generalization: A Lakatos example. *Pythagoras*, 10-29. Recuperado de <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/fibo.pdf>.
- De Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics. *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, 205-221.
- Fujita, T., Jones, K., Kunimune, S., Kumakura, H., Matsumoto, S., & Society, R. (2011). Proofs and Refutations in Lower Secondary School Geometry. En *cerme 7* (Vol. 7). Rzeszów, Poland. Recuperado de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/4/WG4_Fujita.pdf
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements Informatisés et Ressources Numériques Pour L'apprentissage. Conception et Usages, Regards Croisés*, 65-88.
- Hitt, F. (2013). Theorie de l'activite, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre theorique autour des representations dans la construction des connaissances mathematiques? *Annales de Didacqique et de Sciences Cognitives*, 18, 9-27.
- Hitt, F., & González-Martín, A. (2014). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 201-219. doi:10.1007/s10649-014-9578-7
- Karakus, F., & Bütün, M. (2013). Examining the Method of Proof and Refutations in Pre-Service Teachers Education. *Boletim de Educação Matemática*, 27(45), 215-232.
- Lakatos, I. (1986). *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático* (trad. Solis, C.). Madrid: Alianza.
- Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). Proof and refutations in the undergraduate. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 205-216. doi:10.1007/s10649-007-9106-0.
- Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5-29. doi:10.2307/749867
- Sriraman, B. (2003). Can mathematical discovery fill the existential void? The use of conjecture, proof and refutation in a high school classroom. *Mathematics in School*, 32(2), 2-6.
- Swinyard, C., & Larsen, S. (2010). Proofs and Refutations as a Model for Defining Limit. Trabajo presentado en la *Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Raleigh, Carolina del Norte. Recuperado de <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Archive/Swinyard.pdf>