

UTILIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN DE VALORES

JOSÉ SIGARRETA Y JULIETA TORRES

En este artículo se propone una caracterización del concepto de problema a partir del estudio de las diferentes concepciones didácticas desarrolladas hasta la actualidad para dicho término. Además, el trabajo aporta una clasificación de problemas matemáticos así como las características de los mismos para incidir en el desarrollo de la personalidad en general y en los valores en particular. Como soporte a los elementos teóricos presentados se plantean un conjunto de problemas tipo y de criterios para evaluar tal desarrollo.

In this paper we propose a characterization of the concept of problem based on the study of different didactic conceptions developed until now. Besides, this work provides a mathematical problems classification as well as certain problems characteristics that promote development of personality in general and values in particular. We present a set of problems types and criteria for evaluation purposes that supported the theoretical elements exposed.

Palabras claves: resolución de problemas, tipos de problemas matemáticos, formación de valores, enseñanza.

INTRODUCCIÓN

La sociedad actual exige de la escuela la formación integral de la personalidad, razón por la cual en todas las asignaturas se están haciendo esfuerzos en esa dirección, incluyendo las matemáticas, considerada por muchos como una asignatura en la cual tal intención se hace prácticamente imposible.

A nivel mundial en la enseñanza de las matemáticas escolares hoy día, se dedican grandes esfuerzos a promover la resolución de problemas como elemento definitivo en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo para Blanco (1991), la resolución de problemas tiene una importancia notable en cuatro direcciones: como objetivo de aprendizaje (saber resolver problemas), como actividad docente (dedicar la clase a la solución de problemas), como instrumento de aprendizaje (aprender resolviendo problemas) y como elemento evaluador (proponer problemas en los exámenes). En Cuba, casi siempre el objetivo principal de los problemas que los profesores presentan en la escuela es la fijación o aplicación de los contenidos matemáticos, y los

procedimientos para su solución son, en mayor o menor medida, conocidos por los alumnos. Uno de los propósitos de la investigación¹ que realizamos, era llegar así a una caracterización de los problemas matemáticos escolares para su efectiva utilización como recurso en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, particularmente en la formación de valores en los estudiantes.

En este artículo se encara entonces el estudio de diferentes definiciones para el concepto de problema, utilizadas en el contexto didáctico de las matemáticas. Además, se realiza una revisión de las posiciones asumidas por diferentes autores a la hora de establecer clasificaciones de problemas matemáticos; en tal sentido, en primer lugar, se realiza una clasificación de los problemas sobre la base del desarrollo de valores y, en segundo lugar, se proponen las características que deben tener los problemas para incidir en la dirección establecida. Se plantea luego un conjunto de problemas tipo que ejemplifican los elementos teóricos expuestos. Al final se presentan algunos criterios que pueden emplearse para detectar y evaluar el desarrollo de los valores.

APROXIMACIÓN TEÓRICA AL CONCEPTO DE *PROBLEMA*

Para este trabajo era perentorio precisar una definición que aclarara el significado del concepto de *problema* en el ámbito de la escuela, puesto que en su uso generalizado surgen diferencias acerca de lo que distintos autores entienden al respecto. Se comenzó por analizar diversos significados del término "problema". Su uso en el léxico común, en su acepción más amplia, se refiere a una situación de la cual se busca un resultado a partir de ciertos datos. Al buscar en los diccionarios Aristos y Cervantes la definición para este término, se encontró que allí está asentado, respectivamente, lo siguiente: "Cuestión o proposición dudosa que se trata de resolver. Proposición encaminada a averiguar el modo de obtener un resultado cuando se conocen ciertos datos", "Cuestión que se trata de resolver por procedimientos científicos. Mat.: proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado".

El significado del concepto de *problema* para las personas dedicadas a la enseñanza de las matemáticas es más complejo; por tanto, si se pretende realizar un análisis profundo de la definición de problema, hay que investigar la dimensión psicopedagógica y particularizar en el punto de vista de la Di-

1. Esta investigación se tituló "Incidencia de la resolución de problemas matemáticos en la formación de la personalidad" y fue realizada en Cuba desde el año 1999 al 2000, por los autores de este artículo en conjunto con el investigador Joaquín Palacio.

dáctica de la Matemática. Para llevar a cabo tal análisis se siguió la recomendación de Hadamard (1945, p. 1), cuando expresó:

[...] este asunto [definir el término problema] involucra dos disciplinas, Psicología y Matemáticas, y requiere ser tratado adecuadamente en ambas y en ese orden[...]

Desde los postulados de la Psicología se estudiaron algunas definiciones importantes del término en este campo, que orientan la actividad de caracterizar el concepto problema incorporando el factor subjetivo. A título de ejemplo veamos la definición dada por Rubinstein (1965) cuando plantea que “un problema es aquella situación en la que aparece una contradicción entre lo conocido y lo desconocido para el sujeto y éste se activa en función de resolver dicha contradicción”. Es lícito mencionar que esta definición de Rubinstein y las establecidas por otros psicólogos como Leontiev (1975) y González (1954), encarnan dos características que parecen estar ligadas a una situación que se ve como un problema: el sujeto desconoce la vía de solución y al posicionarse frente al problema mismo, adopta un comportamiento activo.

Dentro del campo de la Didáctica de la Matemática existe diversidad de criterios en relación con lo que es un problema. Al parecer, en muchos casos hay interferencia semántica con los términos “ejercicio” y “tarea”, y para muchos autores los tres se solapan. Investigaciones en este campo tales como Sigarreta (2003) y Antibí (1990), han puesto de relieve que los profesores identifican el concepto de problema con los de ejercicio y tarea, a la vez que confunden el significado del término problema en la enseñanza con el significado general que se le da al mismo en la vida cotidiana. Para Kantowski (1981) un problema “es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que lo conducirá con certeza a la solución” (p. 111).

Para Majmutov (1983) la tarea es un fenómeno objetivo que para el alumno existe desde el inicio mismo en forma material (en sonidos o signos), y se transforma en fenómeno subjetivo sólo después de que la percibe y toma consciencia de ella. En la tarea aparecen sin falta elementos tales como los datos y las exigencias (hallar “lo desconocido”), mientras que los elementos fundamentales de un problema son lo conocido y lo desconocido (hallar el nexo o las relaciones entre lo conocido y lo desconocido). De esta explicación se desprende que la definición de tarea abarca la definición de problema, es decir, es un concepto más amplio.

Autores como Ballester et al. (1992) no diferencian claramente ejercicio de problema en la enseñanza de las matemáticas, pues dicen estos autores que:

Un ejercicio es una exigencia que propicia la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etc. De cada acción debe precisarse el objetivo que nos mueve a transformar la premisa para obtener la tesis; el contenido que comprende los tipos de acciones (identificar, comparar, clasificar, fundamentar, etc.), el objeto de las acciones (conceptos, proposiciones, procedimientos algorítmicos), la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y matemáticas, los procedimientos heurísticos y los medios heurísticos auxiliares. (p. 406)

En Cuba, en los trabajos de González (1954), el concepto de problema enfatiza fundamentalmente en su parte cuantitativa, al puntualizar que “problema es toda proposición (generalmente de carácter práctico) en que se pide la determinación de ciertas cantidades (numéricas, geométricas, físicas, etc.) mediante las relaciones que existen entre ellas y otras conocidas” (p. 365).

Otra definición que aparece como constante en un conjunto de investigaciones en el campo de la resolución de problemas, es la dada por Palacios y Zambrano (1993), la cual precisa que: “el problema puede ser definido como cualquier situación que produce por un lado, un cierto grado de incertidumbre y, por otro lado, una conducta tendiente a la búsqueda de su solución” (p. 52).

En la definición anterior y en la definición siguiente, dada por Campistrous y Rizo (1996), “toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida y la persona debe querer realizar la transformación” (p. ix), se observa una relación entre los significados atribuidos al término “problema”, pero se entiende que la expuesta por estos dos últimos autores es más elaborada, pues explicita características esenciales del término para su definición.

En este mismo sentido Labarrere (1988) ha señalado que “[...] un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre objetos que no son accesibles de forma directa o indirecta a la persona; [...] es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que éste se esfuerza por hallar” (p. 6).

Al analizar las definiciones expuestas encontramos elementos que son de suma importancia para hacer una definición diáfana de problema escolar, que permita un acceso lingüístico–conceptual de mayor precisión en la elaboración de los problemas y en el reconocimiento de ellos por parte de los profesores, cuando están realmente ante su presencia. Estos elementos son: la vía para pasar de la situación inicial a la nueva situación debe ser desconocida por la persona que enfrenta la situación, lo que establece así diferen-

cias esenciales entre ejercicio y problema; la persona quiere realizar esa transformación; y lo que constituye un problema para uno puede no serlo para otro.

A modo de conclusión de esta parte, puede resumirse que aunque existe una gran diversidad de criterios para considerar una situación como un problema en el medio educativo, desde una perspectiva general los autores mencionados no se contradicen; en tal sentido, los rasgos fundamentales establecidos para definir el término *problema* son: existe una situación inicial y una situación final; la vía para pasar de una situación a otra debe de ser desconocida o no se puede acceder a ella de forma inmediata; existe el estudiante que quiera resolver la situación; el estudiante dispone de los elementos necesarios para buscar las relaciones que le permiten transformar la situación.

Desde posiciones psicopedagógicas es importante tener presente tanto el carácter activo del alumno frente al problema como el carácter relativo del problema, antes mencionados. Estos dos aspectos son muy importantes para la finalidad que se persigue, es decir, favorecer el proceso de formación de valores a partir de la utilización de los problemas matemáticos, ya que establecen la necesidad de tener en cuenta los conocimientos del estudiante y la naturaleza de la actividad que éste realiza, aspectos básicos en la formación axiológica. Es bueno aclarar que para presentar un problema que resulte significativo para el alumno, debemos cerciorarnos de que esté a su alcance en relación con el nivel de conocimientos y habilidades que posee y que atienda realmente a sus intereses; en otras palabras, que el problema aparezca contextualizado en función del desarrollo alcanzado por los alumnos en cuestión.

DISTINTAS CLASIFICACIONES DE PROBLEMAS

Para adentrarnos en el estudio de las tipologías, es menester reconocer que aunque evidentemente todos los esfuerzos de los maestros empeñados en la labor de promover valores, están dirigidos al trabajo con los problemas que se les propondrán a los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sus pasos iniciales al proponer problemas giran en torno a la naturaleza de la asignatura, es decir, al tipo de disciplina que enseña cada maestro. En la actualidad, la clasificación de los problemas de acuerdo al área donde se usan, es la más generalizada dentro del ámbito escolar; no obstante, se confirma que en la literatura relacionada aparecen problemas en matemáticas, física, química, etc., cuyo contenido no es específico de ninguna de estas asignaturas, y en los que por lo general para su

solución se apela a los elementos de la lógica formal y son llamados “problemas de razonamiento lógico”.

A partir de la significación del término “problema” como “cuestión que debe ser realizada, y como interrogante que debe ser resuelto”, y sobre la base del contenido semántico del enunciado de los problemas, Majmutov (1983) plantea que éstos se pueden clasificar en diferentes categorías, por ejemplo, como: cotidianos, técnico-prácticos, jurídicos, pedagógicos, etcétera.

En los trabajos de Polya (1945) se diferencian los problemas por resolver y los problemas por demostrar. Por su parte, González (1954) distingue los problemas en particulares y generales. En los trabajos de Bertoglia (1990) aparece una clasificación más elaborada, ya que se enfatiza no sólo en el proceso de solución, sino que además pone al descubierto la utilización de la lógica dentro del proceso:

Problemas cerrados: la solución se deduce de forma lógica a partir de la información que aparece en el planteamiento del problema y que resulta suficiente para encontrar la respuesta correcta. El resolutor dispone de toda la información, sólo necesita integrarla aplicando los recursos de la lógica; por ello suelen llamarse “problemas de inferencias lógicas”.

Problemas abiertos: el resolutor necesita ir más allá de la información recibida, utilizándola de manera directa y/o modificando los significados atribuidos a los elementos del problema. (p. 111)

Palacios y Zambrano (1993), clasifican los problemas dentro de tres campos: el campo del conocimiento implicado, el campo del tipo de tarea, y el campo de la naturaleza del enunciado y características del proceso de solución. En este último campo los problemas se dividen en cerrados y abiertos.

Los problemas cerrados son enfocados como aquellas tareas que contienen toda la información precisa y son resolubles mediante el empleo de un cierto algoritmo por parte del solucionador. Los problemas abiertos, por el contrario, implican la existencia de una o varias etapas en su resolución, que deben ser aportadas por el solucionador mediante la acción del pensamiento productivo. Bajo este criterio, los problemas cualitativos pueden ser considerados en la mayoría de los casos como problemas abiertos y los cuantitativos como cerrados. (p. 54)

Al apreciar esta clasificación se evalúa que es mucho más estrecha que la dada por Bertoglia (1990) pues no contempla elementos de la lógica.

Esta revisión bibliográfica de clasificaciones de los problemas hizo aportes a nuestro trabajo en varios sentidos. En primer lugar, permitió ver que no es tan fácil encontrar una clasificación de problemas en función de la formación de valores y que tampoco es frecuente que se considere en la enseñanza, al menos de manera explícita, el uso de problemas matemáticos para el desarrollo de valores imprescindibles en la formación integral de los educandos. En segundo lugar, la revisión sirvió de base teórica-conceptual pues permitió establecer una nueva clasificación de problemas matemáticos, a partir de los elementos generales tratados por los diferentes autores. En tercer lugar, facilita ver que una clasificación a partir de los tres componentes de los valores que se describen en la siguiente sección, puede insertarse de manera natural en el conjunto de las clasificaciones estudiadas.

LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y SU RELACIÓN CON LA FORMACIÓN DE VALORES

Los valores

No es usual que los problemas matemáticos se utilicen con la finalidad de formar valores; en particular, son mínimas las ocasiones en que los profesores proponen un determinado problema que tenga como objetivo favorecer la formación de valores, por lo menos explícitamente. Sin embargo, se debe reconocer que se han hecho algunos esfuerzos en esa dirección en el campo de la enseñanza de las matemáticas en general, y de la resolución de problemas en particular, como por ejemplo los esfuerzos reportados por Zilmer (1981) y Bernel (1982).

Todo valor puede ser estudiado a partir del análisis de tres componentes: cognitivo-ideológico, afectivo-volitivo, y el de las experiencias acumuladas en la actividad del individuo. Resulta atinado plantear que los valores poseen indicadores, que se forman y desarrollan durante la actividad que se propone con el fin de promoverlos. Una de las vías para incidir sobre los valores es a través de estos indicadores. Debe quedar claro que los componentes de cualquier valor son siempre los tres mencionados, sin importar la naturaleza o clasificación del valor, y lo que puede cambiar son sus indicadores. A partir del trabajo sobre determinados indicadores y sobre los componentes de los valores específicos, se intenta favorecer el desarrollo de dichos valores.

Existen varias definiciones de “valor” que han sido estudiadas tanto desde el punto de vista filosófico, como psicológico y pedagógico. Cabe anotar que ninguna de tales definiciones entra en contradicción en lo referente a la formación de valores en los estudiantes y, en este sentido, plantean como

elemento imprescindible, que el profesor comprenda que no existen valores que no sean asumidos por las personas, que los valores necesariamente se reflejan en su comportamiento, se forman en la actividad y son el resultado de la valoración de los procesos, objetos y fenómenos de la realidad, sobre la base de relaciones hombre–hombre, hombre–naturaleza y hombre–sociedad. Nuestro enfoque atiende a ver la personalidad como una combinación de configuraciones psíquicas que permite integrar las posibles influencias que actúan sobre ellas en una misma dirección, más que a analizarla como un conjunto de cualidades.

De acuerdo con todo lo anterior, los valores son el grado de significación que poseen los objetos, procesos y fenómenos para el individuo y dependen además de la función que tengan en la actividad que él realiza. Al igual que hay diversas definiciones, existen múltiples clasificaciones para los valores; las más conocidas o estudiadas los organizan en: valores universales e individuales; valores sociales y espirituales; valores morales y estéticos.

En nuestra investigación asumimos la segunda de estas clasificaciones, dentro de la cual se trabajó específicamente con los valores sociales *laboriosidad* y *responsabilidad*. En el caso del valor *laboriosidad* se asumió como definición operacional la siguiente: “la dedicación y satisfacción por el trabajo creador”, para nuestro caso, en la clase de matemáticas. El valor *responsabilidad* es precisado como: “la asunción de las obligaciones por el individuo como un compromiso consecuente con su actuación”, es decir un compromiso que se refleja en todos sus actos.

Las características de los problemas y los indicadores

Para el logro de los objetivos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas relacionados con la formación de valores en los estudiantes, hay que tener presente que los contenidos matemáticos a tratar deben verse en dos direcciones: como objeto de apropiación y como base para el desarrollo de valores. Siguiendo las tendencias de los educadores matemáticos que destacan la resolución de problemas como un objetivo instructivo fundamental en la enseñanza de las matemáticas, aunque no la única habilidad a desarrollar, la resolución de problemas se ve como una vía a utilizar para favorecer la formación de los valores que la educación se propone cultivar.

La metodología que hemos seguido y proponemos seguir para formar valores a través de la resolución de problemas, consta de los siguientes pasos:

- 1) Seleccionar los valores a trabajar.
- 2) Realizar un estudio de sus indicadores.
- 3) Buscar aquellos indicadores que son comunes a los valores estudiados.

- 4) Elaborar, a partir de las definiciones de los indicadores, las características de los problemas para incidir en un determinado componente del valor.
- 5) Proponer actividades que complementen el desarrollo de los indicadores que no fueron abordados mediante los problemas propuestos.

Entre los indicadores fundamentales del valor *laboriosidad* elegido para nuestra investigación, se pueden mencionar la disposición para enfrentar la tarea, la perseverancia, la autoproposición de metas, la autoexigencia, la crítica y autocrítica, la seguridad y confianza en las propias posibilidades y la ayuda mutua. Por otra parte, los indicadores fundamentales que aparecen implicados en el valor *responsabilidad* también trabajado en la investigación, son la seguridad en sí mismo, la toma de decisiones, la perseverancia, la autoproposición de metas, el responder por los propios actos, y la crítica y autocrítica. Como se ve estos valores tienen indicadores en común que a su vez también forman parte de otros valores. Para un trabajo eficaz se analizan y buscan los indicadores que les son comunes a varios valores.

Se comienza luego a trabajar en delimitar las características de los problemas matemáticos relativas a favorecer la formación de los valores seleccionados, y en revelar la estructura interna de los problemas, es decir, destacar qué tipo de información se brinda en el texto del problema, cuáles son los datos que se deben proporcionar y cómo son, qué tipo de interrogante se hará y cuál es la manera de formularlo. En consecuencia, los problemas se clasifican a partir de sus características y teniendo en cuenta el desarrollo del contenido. La clasificación está centrada en la estructura del problema, el carácter de la incógnita (carácter cuantitativo o cualitativo) y el mensaje que encierra el texto. Los problemas, cualesquiera sean las características que posean para incidir en los componentes de los valores, deben permitirle al estudiante posibilidades de éxito en un primer nivel. La información que se trate en el texto del problema es de suma importancia, bien sea que se refiera a un determinado contenido matemático o describa una situación real o histórica ligada a un dilema moral relativo al valor que se pretende potenciar.

Los problemas contemplados en nuestro trabajo tienen características diversas desde el punto de vista estructural, que están relacionadas con los indicadores a desarrollar tales como: la perseverancia, la crítica y la autocrítica, la toma de decisiones y la confianza en sí mismo; en lo fundamental potencian el componente afectivo-volitivo del valor, aunque lo que se pretende es potenciar todos los componentes del valor, de lo contrario el trabajo en la formación de valores perdería todo sentido. En algunos de los problemas propuestos en la sección de ejemplos que se expone más adelante, la pregunta formulada no posee un carácter cuantitativo sino cualitativo,

que apunta a que el estudiante exprese la definición del valor estudiado y la forma en que éste se manifiesta, es decir, sus indicadores. Evidentemente tal situación está relacionada con el componente cognitivo del valor en el que se quiere incidir.

Como todo el trabajo está sustentado en la actividad de resolución de problemas dentro de la clase de matemáticas, el desarrollo de cada indicador se puede ver en función de la actividad del estudiante y debe ser analizado a partir de su desempeño allí. Algunas de las características que tienen los problemas considerados para desarrollar los indicadores de tales valores así como algunas de las actividades para los estudiantes implicadas en la resolución de dichos problemas, se esbozan a continuación.

Los problemas cuyas características favorecen la perseverancia son: problemas en los que dado un conjunto de premisas se pide obtener un conjunto de tesis; problemas en los que su resolución requiere de la resolución de subproblemas que aparecen ordenados atendiendo a su grado de complejidad; problemas que exigen para su solución la búsqueda de una información que el estudiante no tiene. Este tipo de problemas lo lleva a esforzarse en encontrar la solución de manera independiente a partir de sus potencialidades. Permite así, que el estudiante gane en su capacidad de no descuidar la actividad que realiza debido a los obstáculos que enfrenta, y por supuesto se espera que cuando se encuentre ante un problema con otros requerimientos, tenga más disposición a desarrollar la actividad implicada en su solución.

Los problemas que presentan un conjunto de premisas para obtener un conjunto de tesis, aportan al desarrollo de la perseverancia puesto que la idea es que conduzcan al estudiante a esforzarse, dentro de sus posibilidades, en obtener la mayor cantidad de resultados posible, poniendo a prueba todas sus fuerzas tanto físicas como intelectuales. Al plantearle el problema a los estudiantes el maestro, que como es natural conoce la mayor cantidad de tesis posibles, declara cuántas tesis pueden obtenerse. Los problemas que contienen subproblemas contribuyen igualmente al desarrollo de la perseverancia puesto que para llegar a la meta final el estudiante debe haber superado un conjunto de barreras previas. Por supuesto que los subproblemas deben ir de lo fácil a lo difícil para que los estudiantes con bajo nivel de desempeño, no pierdan su interés en la actividad de resolución del problema. Para los problemas que exigen buscar información, se sitúan en el aula variedad de materiales auxiliares, donde el alumno puede buscar o consultar la información que necesite, con el fin de romper en un primer momento con su tendencia a pensar que si no lo pudo resolver con lo que conoce, todo está perdido; además para que considere que puede necesitar más tiempo del que utiliza en los ejercicios tradicionales.

Para el desarrollo de la crítica y autocrítica, se consideró que el estudiante debía ser capaz de valorar distintas situaciones, en los diferentes terrenos que se le presenten, siempre en concordancia con el tipo de actividad a realizar en ese momento. Debe valorar el problema de manera integral, es decir, en relación con su formulación, su estructura y el proceso de solución a seguir.

Los problemas utilizados para incrementar el espíritu crítico y autocrítico son: problemas con datos insuficientes; problemas con datos superfluos; problemas donde aparezcan datos contradictorios; problemas que se presentan con soluciones que incluyen errores “sutiles” o difíciles de detectar a priori; problemas que se presentan con diferentes soluciones. Este tipo de problemas permite que el estudiante pueda criticar la redacción del problema, su lógica interna y sus elementos relacionados; pueda plantear datos que faltan o son contradictorios, o eliminar los que sobran. Se pueden aprovechar estas circunstancias para que el alumno reformule el problema y luego a partir de los razonamientos del maestro, autocriticar su propio trabajo. En los problemas donde se presenten errores difíciles de detectar, en caso de no verlos, el alumno tendrá que asumir la crítica a su falta de estudio o conocimientos.

En lo relativo a la toma de decisiones, el análisis de la actitud y actividad del sujeto estuvo ceñido a considerar la elección de una dirección por parte del estudiante, que en la clase de matemáticas está matizada por la capacidad que tenga el estudiante para discernir entre un conjunto de opciones posibles, para determinar cuál considera correcta y para explicitar las razones de su elección. Adicionalmente, se espera que el estudiante se proponga cumplir la opción escogida con firmeza, trazándose con claridad los caminos a seguir y las maneras de actuar. Sobre la base de su entorno sociocultural, también se tienen en cuenta el momento en que el alumno elige una determinada estrategia de solución y el tipo de respuesta dada al problema.

Los problemas cuyas características favorecen la toma de decisiones son: problemas que no exigen realizar cálculos para encontrar su solución, pero requieren de una sólida fundamentación teórica; problemas que presentan varias soluciones mediante estrategias de solución correctas e incorrectas; problemas cuya respuesta requiere un análisis complementario (estimar valores negativos, fraccionarios, etc.). Los problemas que no exigen cálculos para su solución y sí una fuerte fundamentación teórica, preparan al estudiante para defender el hecho de la elección tomada a partir de sus propios argumentos. Los problemas cuyas respuestas necesiten de un análisis complementario, muestran que no se puede tomar una decisión a la ligera sin tener conocimiento de causa. El resto de los problemas mencionados aquí, tienen estas mismas funciones.

Para el desarrollo de la confianza en sí mismo, se tuvo en cuenta que el estudiante que inicialmente no era capaz de dar una respuesta a una determinada situación, después de que empezaba a abordar el problema ya graduado a su nivel de conocimiento, mostraba disposición por el trabajo y era capaz de obtener al menos una respuesta; estos indicios se aceptaban como un crecimiento personal en función del indicador analizado.

Los problemas que contribuyen a fomentar la confianza son: problemas donde se le presente al alumno una información respecto a un determinado contenido, y a partir de esa información, se le pide obtener un resultado; problemas cuya solución es condicional, es decir, su respuesta depende de la posición que asuma el resolutor, y por lo tanto la respuesta es “abierta”; problemas para los que, dado el nivel de conocimiento del estudiante, le sea cómodo obtener múltiples vías de soluciones. Los problemas con soluciones condicionadas, le ofrecen al alumno la posibilidad de percatarse de que puede lograr un resultado y justificarlo. El último tipo de problemas mencionados aquí, permite al estudiante aumentar su autovaloración y la confianza en sus capacidades al ver que él también puede resolver problemas matemáticos. La posibilidad de implementar varias estrategias de solución conduce al estudiante a que tenga una buena disposición inicial para emprender la solución. También las características de los problemas utilizados para el desarrollo de la perseverancia, permiten ser extrapoladas hacia los problemas que favorecen la confianza de los alumnos en sí mismos. Así, la información que se presenta en los problemas debe estar graduada en función del nivel de complejidad, de manera que permita al estudiante obtener un determinado resultado que no conocía y demostrarle así, que es capaz de obtener información desconocida a partir de sus propios esfuerzos.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS

A manera de ejemplo, se presentan problemas con características que ilustran las descritas anteriormente para incidir en indicadores específicos. Los dos primeros problemas expuestos se proponen para favorecer la toma de decisiones y están dentro de los problemas clasificados en relación con la estructura del problema: en el primero, se le brinda al estudiante una determinada información, para que a partir de ella tome una decisión y sea capaz de justificar tal decisión a partir de la información dada. En el segundo, se proponen dos soluciones posibles a un mismo problema, para que el estudiante las critique, tome partido, llegue a conclusiones y las argumente.

- 1) Cuando la función seno se define en $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces ella es inyectiva y puede determinarse su inversa, arcoseno, definida en la ima-

gen de la función seno. De acuerdo con esta consideración, ¿cuáles de las siguientes igualdades no son correctas?

$$\arcsen(1/2) = \pi/6, \arcsen(0) = \infty, \arcsen(x) = 5\pi/2.$$

- 2) Apoyándose en el resultado $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, dos estudiantes logran descomponer el número 9991. La solución del alumno José A. es: $(x - 3)(x + 3) = (x^2 - 9) = 9991$ entonces $x^2 = 10000$ y $x = 100$. Luego $9991 = 97 \times 103$. La solución de la alumna Rosa S. es: $9991 = 10000 - 9 = (100 - 3)(100 + 3)$. Valore las soluciones dadas.

Para los problemas siguientes, la pregunta se formula en correspondencia con el valor sobre el cual se quiere trabajar, propiciando, a partir de ella, la profundización en el componente cognitivo del valor. La clasificación de estos problemas está relacionada con el carácter de la incógnita que trabajan. Este tipo de problemas posibilita desarrollar un debate con los estudiantes respecto a lo que se entiende por el valor en cuestión; además impulsan la reflexión, el compromiso y la valoración crítica. En su solución los estudiantes deben inferir y formular juicios conforme a valores.

- 3) Dos estudiantes de preuniversitario, Julio e Isabel, deben entregar un trabajo extraclase; ambos se comprometen a entregarlo a tiempo, es decir dentro del plazo fijado por el profesor. Julio, laborando arduamente, sólo necesitó para realizar el trabajo la mitad del tiempo asignado por el profesor. Isabel, aunque su faena fue consciente, precisó un día más que Julio para concluir la tarea. El tiempo utilizado por ambos estudiantes fue exactamente de una semana. Julio entregó el trabajo tantos días después de asignada la tarea, establecidos como el doble más uno de los que necesitó para resolverlo; mientras que Isabel, necesitó dos días más de los que utilizó para resolver dicha tarea. Valore el nivel de responsabilidad de cada estudiante.
- 4) Se les propone a los estudiantes Alberto C., Maglenis R. y Wilfredo G. resolver un problema con un alto grado de dificultad, en tres días. Alberto, trabajó los tres días y cada día laboró una hora más que el día anterior. Por el contrario Maglenis, trabajó una hora menos que el día anterior. El primer día Alberto y Maglenis trabajaron la misma cantidad de horas, justamente las que Wilfredo logró acumular en los tres días de trabajo. Sabiendo que no se logró resolver el problema y que el último día fue el que más se trabajó, valore cuál estudiante fue más laborioso y por qué.

Entre los problemas clasificados de acuerdo con el mensaje que encierra el enunciado, aparecen problemas como los que se exponen a continuación, cuyos textos realizan una función adicional al desarrollo del componente afectivo-volitivo, pues llevan una alta dosis de carga afectiva relacionada con sucesos históricos, símbolos de la patria, algún conflicto social, etc. Con ello se propicia desde su solución, la interpretación de un determinado suceso o conflicto de la vida real. Además, facilitan que el profesor realice un conjunto de preguntas encaminadas al logro del objetivo propuesto, por ejemplo, a desarrollar la consciencia de la importancia que reviste la defensa de la patria y la responsabilidad social que tienen en sus manos los soldados.

- 5) Para la defensa de las conquistas de un determinado sistema, existen dos posiciones muy importantes: la primera relacionada con elementos teóricos para defender las ideas políticas y la otra referida a la preparación para enfrentar las agresiones militares; en este campo la artillería tiene un peso muy importante y las matemáticas sirven de fundamento a una gran parte de su actividad. Por ejemplo: una pieza de artillería se halla en la posición A(12500, 18300). Su objetivo se halla en la posición B(25500, 18200). ¿A qué distancia de la pieza se halla el objetivo?
- 6) La bandera es uno de los símbolos patrios, amarla a ella y a lo que representa es una cualidad de todo ciudadano que se considere patriota. ¿Qué conoces sobre la Bandera Cubana? ¿Cuántas figuras geométricas aparecen en ella? ¿Qué relación existe entre su largo y su ancho? ¿Tiene la estrella de la bandera cubana las mismas características de las que utilizaban los pitagóricos como símbolo? Clasifica el triángulo de la bandera. ¿Qué área representa el triángulo con respecto al área del rectángulo de la bandera?
- 7) Un niño pesa 10 libras al nacer y tres años después su peso es de 30 libras. Suponga que el peso w , en libras, está relacionado linealmente con la edad en años, t . Expresa w en términos de t . ¿Cuál es el peso del niño al sexto año de vida? ¿A qué edad el niño pesará 70 libras? Esta situación, ¿se manifiesta en los países del Tercer Mundo?

CRITERIOS PARA EVALUAR EL DESARROLLO DE LOS INDICADORES

Para la fase de experimentación de la investigación se escogió una muestra de estudiantes con edades comprendidas entre los quince y diecisiete años, que trabajaron en la resolución de problemas matemáticos similares a los expuestos anteriormente. La investigación se llevó a cabo a lo largo de todo

el curso escolar 2000-2001 en la institución que lleva por nombre “Mario Martínez Arará” del municipio de Calixto García, provincia Holguín, Cuba. Al comienzo se utilizaron problemas destinados a diagnosticar en dos sesiones de trabajo, cada uno de los indicadores para los estudiantes y con el fin de poder comparar posteriormente los resultados acerca de los indicadores obtenidos en todo el año escolar.

Otorgarle un carácter objetivo a los indicadores estudiados precisó proponer un conjunto de criterios para su evaluación y control. En consecuencia el análisis de los indicadores se realizó sobre la base de contemplar cuatro niveles de desempeño de los estudiantes: un nivel alto (nivel 4), un nivel medio (nivel 3), uno bajo (nivel 2) y un último nivel, que lo denominamos como muy bajo (nivel 1).

A continuación se exponen los criterios propuestos y utilizados en nuestra investigación, que creemos que pueden suministrar información relevante sobre el desarrollo de los indicadores en los estudiantes, y por lo tanto acerca del desarrollo de los valores en cuestión.

Se consideró que un alumno es perseverante en la clase de matemáticas, cuando mantiene con la misma intensidad su actuación sobre la solución de un determinado problema y no mengua sus fuerzas por los obstáculos, tanto internos como externos, que se presenten. Para esto se requirió identificar los aspectos del trabajo del estudiante indicados en la Tabla N° 1.

	Se es perseverante frente a la solución del problema
Nivel 4	Dedica a la solución del problema de 15 a 20 minutos. Intenta encontrar la solución tres veces o más. Busca la información que se necesita sin pedir ayuda. No se distrae ni descuida la actividad que realiza en la solución del problema. Encuentra más del 50% de la cantidad de tesis de las halladas por los profesores.
Nivel 3	Dedica a la solución del problema de 10 a 14 minutos. Intenta encontrar la solución a lo sumo dos veces. Solicita ayuda una vez con respecto a la información que se necesita buscar. Se dispersa a lo sumo una vez. Encuentra del 40% al 50% de la cantidad de tesis de las halladas por los profesores.
Nivel 2	Dedica a la solución del problema de 5 a 9 minutos. Sólo intenta encontrar la solución una vez. Solicita ayuda dos veces con respecto a la información que se necesita buscar. Se dispersa a lo sumo dos veces. Encuentra del 20% al 40% de la cantidad de tesis de las halladas por los profesores.

Tabla N° 1. Criterios para la evaluación y control de la perseverancia

Nivel 1	Dedica a la solución del problema menos de 5 minutos.
	Desiste de intentar encontrar la solución al leer el enunciado.
	Solicita ayuda más de dos veces con respecto a la información que necesita buscar.
	Se dispersa más de dos veces.
	Encuentra menos del 20% de la cantidad de tesis de las halladas por los profesores.

Tabla N° 1. Criterios para la evaluación y control de la perseverancia

Se consideró que el estudiante es crítico y autocrítico cuando valora situaciones diferentes en circunstancias distintas, de acuerdo con el tipo de actividad que se realiza en cada momento; también cuando, en una primera aproximación, el estudiante tiene condiciones para valorar el problema de manera integral, es decir, en relación con su formulación, su estructura y el proceso de solución seguido. Por último fue significativo en la investigación valorar la realidad sobre la que el educando experimentó mientras resolvía el problema, tanto en su plano externo como interno. La Tabla N° 2 expone la ubicación de los estudiantes en los distintos niveles para este indicador, según su trabajo.

	Se es crítico frente a los elementos del problema
Nivel 4	Tiene en cuenta la redacción, la lógica interna, los elementos relacionantes, los datos que sobran, faltan o son contradictorios. Reformula el problema con base en el análisis.
Nivel 3	No tiene en cuenta dos de los aspectos, o la justificación no es correcta.
Nivel 2	Analiza cuanto más un solo aspecto.
Nivel 1	No hace señalamientos a alguno de los aspectos.

Tabla N° 2. Criterios para la evaluación y control de la crítica y autocrítica

El análisis de la toma de decisiones (ver Tabla N° 3) estuvo ceñido a considerar las posibles estrategias contempladas, el momento en que el alumno elige una determinada estrategia de solución, la estrategia seleccionada y el tipo de respuesta dada al problema, sobre la base de su entorno sociocultural. También tuvo en cuenta que después de tomada la decisión el estudiante debe proponerse cumplirla con firmeza, trazándose con claridad los caminos a seguir y las maneras de actuar.

Para el estudio de la confianza y seguridad en sus posibilidades, se partió de que el estudiante mostrara disposición para emprender la solución de un determinado problema. En un segundo momento, cuando el alumno comenzaba a abandonar la solución, el análisis se apoyó en la observación y en preguntas como: ¿Qué haces? ¿Cómo pretendes resolver el problema? ¿Crees que posees los elementos para resolverlo? ¿Por qué no trabajas? ¿Qué te impide trabajar? De acuerdo con sus respuestas, se pudo inferir si las causas

estaban realmente relacionadas con la poca confianza en sus habilidades. La Tabla N° 4 presenta los aspectos de acuerdo a los cuales se organizó el trabajo de los estudiantes en los distintos niveles.

	Elige una estrategia y la desarrolla.
Nivel 4	Considera y relaciona posibles estrategias para enfrentar la solución del problema. Selecciona la correcta. Fundamenta de manera acertada su elección. La lleva hasta el final.
Nivel 3	Realiza de manera correcta las tres primeras acciones.
Nivel 2	Realiza de manera correcta dos de las primeras acciones.
Nivel 1	Realiza de manera correcta una de las primeras acciones.

Tabla N° 3. Criterios para la evaluación y control de la toma de decisiones

	Comprensión del problema mediante la respuesta a las preguntas.
Nivel 4	Trabaja y aporta elementos suficientes en las respuestas a cada una de las preguntas.
Nivel 3	Trabaja y aporta elementos suficientes en las respuestas a al menos las dos primeras preguntas.
Nivel 2	No trabaja; después de la explicación del profesor comienza a hacerlo y aporta elementos suficientes en la respuesta a al menos una de las preguntas.
Nivel 1	No trabaja; luego de la explicación del profesor intenta comenzar, pero no prosigue. Las respuestas a las dos últimas preguntas están relacionadas con la desconfianza en el logro de una solución.

Tabla N° 4. Criterios para la evaluación y control de la confianza

En relación con el estudio de la ayuda mutua que se da entre los estudiantes, ésta se verificó en las actividades que se realizaron en grupo, como la solución de problemas que exigen resolver subproblemas, los cuales debían ser asignados a diferentes estudiantes del grupo sin importar su caudal de conocimiento. La ayuda mutua se evaluó en todo momento como la satisfacción por brindar o recibir cualquier tipo de cooperación y la disposición a las acciones compartidas.

REFERENCIAS

- Antibi, A. (1990). *Tratamiento didáctico de los problemas matemáticos*. Francia: Universidad de Toloux.
- Ballester, S. et al. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Bernel, R. (1982). *Problem solving and mathematics*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishers.

- Bertoglia, L. (1990). *Psicología del aprendizaje*. Chile: Universidad de Antofagasta.
- Blanco, L.J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de E.G.B. y estudiantes para profesores*. Madrid: UNEX Nro11.
- Campistrous, L y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- González, M. (1954). *Matemática. Complementos de aritmética*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.
- Kantowski, M.G. (1981). Mathematics education research implications for the 80's. *Problem solving*, 4, 111-126.
- Labarrere, A.F. (1988). *Bases psicológicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Leontiev, N. (1975). *Actividad, conciencia, personalidad*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Majmutov, M. (1983). *Enseñanza problémica*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Palacios, C. y Zambrano, E. (1993). Aprender y enseñar ciencias: una relación a tener en cuenta. *Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe. Boletín 31 de UNESCO/OREALC*, 120-128.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Rubinstein, S.L. (1965). *El ser y la conciencia*. La Habana: Editora Nacional de Cuba.
- Sigarreta, J.M. (2003). Evolución histórica del concepto problema desde una perspectiva didáctica. *Didáctica de la Matemática*, 2 (2).
- Zilmer, W. (1981). *Complementos de metodología de la enseñanza de la matemática*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

José María Sigarreta
Julieta Torres
Departamento de Matemática
Universidad de Moa
Cuba
E-mail: jmsigarreta@ismm.edu.cu
jtorres@ismm.edu.cu